现代变分原理

牛庠均 著

北京工业大学出版社

内 容 简 介

本书系统地论述了固体力学范畴中，作为工程结构近似求解方法的理论基础的现代变分原理。在本书中采用统一的方法论述了弹性、非线性弹性、塑性、蠕变理论范畴的三类、二类、一类独立变量函数的现代变分原理。

本书共分九章，内容包括：固体力学概述；变分法简介；古典变分原理；广义变分原理；修正变分原理；可动边界变分原理；最佳剖分变分原理；断裂分析中的变分问题；模糊因子加权变分原理。

本书可作为理工类高校师生的教材，也可作为有关科学研究人员、工程技术人员的参考读物。

现代变分原理

牛庠均 著

*

北京工业大学出版社出版发行

各 地 新 华 书 店 经 销

北 京 育 才 印 刷 厂 印 刷

*

1992年7月第一版　1992年7月第一次印刷

850×1168毫米　32开　23.5印张　583千字

印数：1～2500册

ISBN7-5639-0202-3/O·10

定价：12.00元

（京）新登字212号

序

现代变分原理是利用变分问题来描述力学、物理、工程范畴中的现象的理论性学科。近30年来，变分原理得到了迅速的发展，特别是离散方法的进展，如有限元法、边界元法、变分方法、广义伽略金方法等对变分原理的发展产生了深刻的影响，以至于形成系统完整的现代变分原理学科。相辅相成，现代变分原理的发展也促进了力学、物理和数学中的某些分支学科的发展。

现代变分原理是以积分形式的数学模型来描述力学、物理、工程中的现象，与描述同一现象的微分形式的数学模型具有同等的重要意义。现代变分原理为各类离散方法，以及开拓新的离散方法提供了系统的理论基础，也为探讨解决当代工程结构中的疑难问题提供了理论基础。

当代变分原理研究的焦点集中在广义变分原理的研究与应用，修正变分原理的研究与应用，可动边界变分问题的理论研究与应用，自适应有限元与边界元法的误差分析的研究与应用，非结构领域中的变分问题的理论研究与应用，以及离散方法统一理论的研究与应用。

本书的内容正是针对上述的现代变分原理的核心内容，结合作者多年来的研究成果进行了系统的论述。第1～3章对固体力学、数学中的变分法、古典变分原理进行了概述。第四章论述了广义变分原理。基于势能密度与余能密度的新的表示式的基础上，根据变分条件、变分约束条件及一般约束条件之间的匹配原理，利用拉氏乘子法建立了三类变量函数的广义变分原理。然后利用规一化方法，从三类变量函数的广义变分原理中，既导出一

系列新型的变分原理，又导出已有的变分原理。第五章论述了修正变分原理。第六章为可动边界变分问题的论述。这一章为解决接触问题、弹塑性问题、断裂分析问题、自适应有限元边界元的误差分析等提供了理论依据。第七～八章为可动边界变分问题在离散分析与断裂分析中的应用。第九章论述了具有模糊因子的加权变分原理。这些原理是描述工程结构问题的最广泛的统一形式的数学模型，为编制大型通用系统软件提供了理论依据。同时，在数值分析过程中，通过不断改进数学模型的表达式，改进解的精度可达到理想的逼近解。

最后，向阅读部分原稿并提出许多宝贵意见的山东建筑工程学院院长姚传玺教授，以及在编辑过程中提出许多宝贵意见的周汝忠编审表示衷心的感谢。

于北京工业大学

牛庠均

1991年6月

目　录

第一章　固体力学概述

§1.1　概　述

固体在某些外界因素作用下，产生应力、应变和位移。研究应力、应变、位移之间的客观规律，形成了固体力学的基本理论方面的内容，应用这些基本理论去解决有关工程结构中的实际问题，形成了固体力学应用方面的内容。这些固体力学范畴内的问题，可以化为微分方程的边值问题来描述和解决，亦可在某些条件下化成与之等价的泛函的变分问题来描述和解决。就固体力学而言，这种等价的变换是存在的。在解决固体力学范畴内的问题时，用求解微分方程边值问题的方法去处理问题，往往会遇到较多的困难，但化为与之等价的泛函的变分问题，用各种不同的近似方法去解决固体力学范畴内的问题，常常是方便的。当前由于经济发展的需要与计算技术的迅速发展，促使了固体力学中的变分原理的蓬勃发展。

为了分析、研究、建立和应用固体力学中的变分原理，本章概括介绍在解决固体力学范畴内的问题时，待解函数(应力函数、应变函数、位移函数）应满足的微分方程与边界条件。这些方程可分为四类：其一是平衡方程；其二是应力应变关系式；其三是应变位移关系式；其四是边界条件，包括已知的力的边界条件和已知的位移边界条件。

为了方便，采用卡氏张量符号表示固体力学中的物理量与几何量。

固体体系记为V，其边界记为$S=S_1+S_2$；在整体边界S_1上

作用着已知的表面力$\bar{P}_i$；在整体边界S_2上已知位移$\bar{u}_i$。

卡氏坐标系记为O $(x_i, i=1,2,3)$；

应力分量记为σ_{ij} $(i,j=1,2,3)$；

应变分量记为ε_{ij}；

有限变形的应变分量记为e_{ij}；

位移分量记为u_i；

体积应变记为$\varepsilon_{ii}=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$，这里符号$i$是哑标符号，在同一项中的足标符号相同时，表示该符号的数从1到3求和。

平均应力分量记为

$$\sigma_{cp}=\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})=\frac{1}{3}\sigma_{ii}$$

平均应变分量记为

$$\varepsilon_{cp}=\frac{1}{3}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})=\frac{1}{3}\varepsilon_{ii}$$

应力偏张量分量记为$\sigma'_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma_{cp}\delta_{ij}$；

应变偏张量分量记为$\varepsilon'_{ij}=\varepsilon_{ij}-\frac{\sigma_{cp}}{\varepsilon_{cp}}\delta_{ij}$，其中$\delta_{ij}$为克氏符号（Kronecker符号），定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$$

应力速度分量记为$\dot{\sigma}_{ij}$；

应变速度分量记为$\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\dot{e}_{ij}$；

位移速度分量记为$\dot{u}_i$；

固体密度记为ρ（单位体积的质量）；

固体的单位体积的体积力记为$\bar{F}_i$；

整体边界$S=S_1+S_2$的外法线的方向余弦记为l_j；

杨氏模数记为E；

泊桑比记为ν；

剪切模量记为G；

拉梅系数记为

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)},\quad \lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$T=\frac{1}{\sqrt{6}}[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2$$

$$+6(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$H=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}[(\dot{\varepsilon}_{11}-\dot{\varepsilon}_{22})^2+(\dot{\varepsilon}_{22}-\dot{\varepsilon}_{33})^2+(\dot{\varepsilon}_{33}-\dot{\varepsilon}_{11})^2$$

$$+\frac{3}{2}(\dot{\varepsilon}_{12}^2+\dot{\varepsilon}_{23}^2+\dot{\varepsilon}_{31})]^{\frac{1}{2}}$$

下面简要介绍求解固体力学问题时所需的基本方程，详细内容请参阅文献[1～17]。

§1.2 弹性力学

1.2.1 弹性力学的基本方程

在边界S_1上作用着已知表面力$\bar{P}_i$，在边界S_2上的已知位移$\bar{u}_i$和具有已知的体积力$\bar{F}_i$的固体体系，处于弹性静力平衡状态时，待解函数（应力函数、应变函数、位移函数）应满足下面四类基本方程：

（1）平衡方程

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \quad (1.1)$$

（2）应变位移关系式

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad (V) \quad (1.2)$$

式中
$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=u_{i,j}$$

（3）应力应变关系式

应变表示应力为

$$\sigma_{ij}=\frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_{cp}\delta_{ij}+2G\varepsilon'_{ij} \qquad (V) \quad (1.3)$$

或为

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}=0$$

应力表示应变为

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1-2\nu}{E}\sigma_{cp}\delta_{ij}+\frac{1}{2G}\sigma'_{ij} \qquad (V) \quad (1.4)$$

或为

$$\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$$

其中a_{ijkl}，b_{ijkl}为弹性常数，有

$$a_{ijkl}=a_{jikl}=a_{ijlk}=a_{klij}$$

$$b_{ijkl}=b_{jikl}=b_{ijlk}=b_{klij}$$

$$a_{ijkl}\,b_{klmn}=\delta^{ij}_{mn}=\begin{cases}1 & ij=mn\\ 0 & ij\neq mn\end{cases} \quad (i,j,k,l=1,2,3)$$

对于各向异性弹性体而言，有21个弹性常数；对于各向同性弹性体而言，仅有两个独立弹性常数。

应力应变关系式亦可写为

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (1.5)$$

和

$$\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (1.6)$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为弹性体的势能密度；$B(\sigma_{ij})$为弹性体的余能密度。

(4) 边界条件

已知力的边界条件为

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (1.7)$$

已知位移边界条件为

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (1.8)$$

满足上述四类基本方程的待解函数是唯一的（刚体位移除外），称为弹性力学问题的真实解。

1.2.2 势能密度与余能密度

弹性体由于变形而具有弹性势能。对复杂应力而言，弹性势能密度为

$$A(\varepsilon_{ij})=\int_0^{\varepsilon_{ij}}\sigma_{kl}d\varepsilon_{kl}=\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \tag{1.9}$$

弹性体具有的弹性余能密度为

$$B(\sigma_{ij})=\int_0^{\sigma_{ij}}\varepsilon_{kl}d\sigma_{kl}=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \tag{1.10}$$

弹性势能密度与余能密度具有互补性质，其互补条件为

$$A(\varepsilon_{ij})+B(\sigma_{ij})=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{1.11}$$

在$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0$成立时，弹性势能密度可表示为

$$A(\varepsilon_{ij})=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-B(\sigma_{ij})=\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \tag{1.12}$$

在$\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$成立时，弹性余能密度可表示为

$$B(\sigma_{ij})=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-A(\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \tag{1.13}$$

§1.3 有限变形弹性力学

1.3.1 有限变形弹性力学的基本方程

这里采用拉格朗日坐标系来描述有限变形弹性力学问题。

当固体处于静力的弹性有限变形状态时，待解函数应满足下面四类基本方程：

(1) 平衡方程

考虑到单元体表面面积变形的影响，有限变形的平衡方程为

$$[\sigma_{ij}(\delta_{kl}+u_{k,i})]_{,j}+\overline{F}_k=0 \qquad (V) \tag{1.14}$$

(2) 应变位移关系式

考虑到非线性的影响，有限变形的应变位移关系式为

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}) \qquad (V) \quad (1.15)$$

(3) 应力应变关系式

假定变形过程中是等温过程，并且变形状态不依赖于加载过程。

假定用应变表示应力的函数为

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(e_{kl}) \qquad (V) \quad (1.16)$$

若

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial e_{kl}}=\frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial e_{ij}} \qquad (1.17)$$

成立，一定存在势能密度$A(e_{ij})$。定义

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (1.18)$$

假定用应力表示应变的函数为

$$e_{ij}=e_{ij}(\sigma_{kl}) \qquad (V) \quad (1.19)$$

若

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial\sigma_{kl}}=\frac{\partial e_{kl}}{\partial\sigma_{ij}} \qquad (1.20)$$

成立，则存在余能密度$B(\sigma_{ij})$。定义

$$e_{ij}-\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (1.21)$$

(4) 边界条件

已知力的边界条件为

$$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0 \qquad (S_1) \quad (1.22)$$

已知位移边界条件为

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (1.23)$$

满足上述基本方程的待解函数为有限变形弹性力学问题的真实解。

1.3.2 势能密度和余能密度

由(1.18)式可知，有限变形弹性体的势能密度为

$$dA(e_{ij})=\sigma_{kl}de_{kl} \tag{1.24}$$

当应变e_{ij}较小时，可略去(1.16)式展为e_{ij}的幂级数的高阶项，于是可得到应力应变线性关系式，即

$$\sigma_{ij}=a_{ijkl}e_{kl} \tag{1.25}$$

将此式代入(1.24)式积分可求得

$$A(e_{ij})=\int_0^{e_{ij}}a_{ijkl}e_{kl}de_{kl}=\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl} \tag{1.26}$$

即为小应变时，有限变形弹性体的势能密度。

由(1.21)式可知，有限变形弹性体的余能密度为

$$dB(\sigma_{ij})=e_{kl}d\sigma_{kl} \tag{1.27}$$

当应变e_{ij}较小时，可略去(1.19)式展为幂级数的高阶项，仅取应力应变线性关系(1.25)式，其逆关系为

$$e_{ij}=b_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{1.28}$$

将此式代入(1.27)式，积分后可得

$$B(\sigma_{ij})=\int_0^{\sigma_{ij}}b_{ijkl}\sigma_{kl}d\sigma_{kl}$$

$$=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \tag{1.29}$$

再考虑到微元体的变形的影响，有限变形弹性体等效余能密度为[7~8]

$$B_E(\sigma_{ij},u_i)=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij} \tag{1.30}$$

§1.4 塑性力学的形变理论

1.4.1 形变理论的基本方程

塑性力学的形变理论不能准确的描述固体处于塑性状态的塑性性质，但是由于它具有运算简单，应用方便等优点，所以经常

被应用于实际问题之中。对于静力学问题，在满足简单加载和屈服条件下，固体处于塑性状态时，待解函数应满足下面塑性形变理论的基本方程：

(1) 平衡方程

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \quad (1.31)$$

(2) 应变位移关系式

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad (V) \quad (1.32)$$

(3) 应力应变关系式

当采用应变表示应力时，假定应力应变关系式为

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}) \qquad (V) \quad (1.33)$$

$$(i,j,k,l=1,2,3)$$

或定义为

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}=0 \qquad (1.34)$$

A存在的充要条件是方程(1.33)式中的σ_{ij}与ε_{kl}必须满足

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}=\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (i,j,k,l=1,2,3) \qquad (1.35)$$

的条件。

当采用应力表示应变时，假定应力应变关系式为

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(\sigma_{kl}) \qquad (V) \quad (1.36)$$

$$(i,j,k,l=1,2,3)$$

或定义为

$$\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (1.37)$$

B存在的充要条件是方程(1.36)式中的ε_{ij}与σ_{kl}必须满足

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}=\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (i,j,k,l=1,2,3) \qquad (1.38)$$

的条件。

(4) 边界条件

已知力的边界条件为

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (1.39)$$

已知位移边界条件为

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (1.40)$$

1.4.2 应力应变关系类型

上述应力应变关系是一般的形式，下面介绍几种具体的应力应变关系式。

1. 割切模量理论

满足应力应变关系

$$\sigma'_{ij}=\mu\varepsilon'_{ij} \qquad (1.41)$$

的理论叫割切模量理论。其中μ为正值比例常数。

由(1.41)式有

$$\Sigma=\frac{\mu}{2}\Gamma \qquad (1.42)$$

其中

$$\Gamma^2=2\varepsilon'_{kj}\varepsilon'_{ij},\quad \Gamma\mathrm{d}\Gamma=2\varepsilon'_{ij}\mathrm{d}\varepsilon'_{ij} \qquad (1.43)$$

$$\Sigma^2=\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij},\quad \Sigma\mathrm{d}\Sigma=\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\mathrm{d}\sigma'_{ij} \qquad (1.44)$$

Σ与Γ为单值连续函数，且有

$$\Sigma=\Sigma(\Gamma) \qquad (1.45)$$

或

$$\Gamma=\Gamma(\Sigma) \qquad (1.46)$$

如图1-1所示。Σ与Γ的关系式可用简单拉伸或简单剪切实验的结果决定。

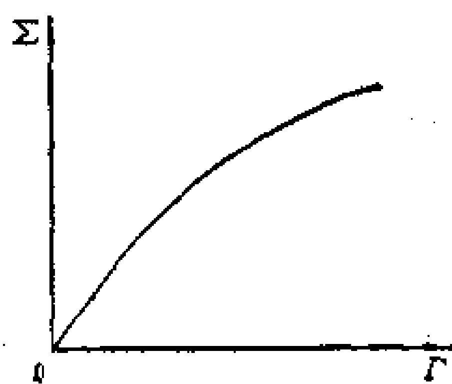


图1-1 Σ-Γ曲线

由上述结果，方程(1.41)式可改写为

$$\sigma'_{ij}=\frac{\Sigma(\Gamma)}{\Gamma}\varepsilon'_{ij} \qquad (1.47)$$

这是用应变表示应力的应力应变关系式。或

$$\varepsilon'_{ij}=\frac{\Gamma(\Sigma)}{\Sigma}\sigma'_{ij} \tag{1.48}$$

这是用应力表示应变的应力应变关系式。

方程(1.47)式与(1.48)式各含6个方程，但其中仅有5个是独立的，为此须加上附加条件，即

$$\sigma_{cp}=\frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_{cp} \tag{1.49}$$

此式说明塑性变形不产生体积变化。

根据方程(1.47)式与(1.48)式，求得割切模量理论的势能密度为

$$A=\int_0^\Gamma\Sigma(\Gamma)\mathrm{d}\Gamma+\frac{3E}{2(1-2\nu)}\varepsilon_{cp}^2 \tag{1.50}$$

余能密度为

$$B=\int_0^\Sigma\Gamma(\Sigma)\mathrm{d}\Sigma+\frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_{cp}^2 \tag{1.51}$$

2. 理想塑性材料（Hencky材料）

当屈服条件采用Mises 条件时，则割切模量理论的应力应变关系式变为Hencky的应力应变关系式。当 $\Sigma<\sqrt{2}k$时，固体仅产生弹性变形；当 $\Sigma=\sqrt{2}k$时，固体产生塑性流动，k为纯剪时的屈服限。

理想塑性材料的势能密度为

$$A=G\Gamma^2+\frac{3E}{2(1-2\nu)}\varepsilon_{cp}^2,\ (\Gamma\leqslant\Gamma_0) \tag{1.52}$$

或 $$A=G\Gamma_0^2+\frac{3E}{2(1-2\nu)}\varepsilon_{cp}^2+\sqrt{2}k(\Gamma-\Gamma_0),\quad \Gamma\geqslant\Gamma_0 \tag{1.53}$$

理想塑性材料的余能密度为

$$B=\frac{1}{4G}\Sigma^2+\frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_{cp}^2,\qquad \Sigma<\sqrt{2}k \tag{1.54}$$

或 $$B=\frac{1}{2G}k^2+\frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_{cp}^2,\qquad \Sigma=\sqrt{2}\,k \tag{1.55}$$

理想塑性材料的Σ-Γ关系，如图1-2所示。

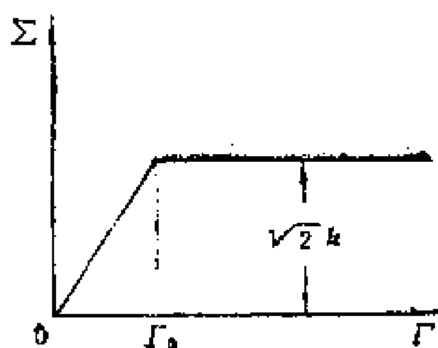


图1-2　Σ-Γ曲线

由(1.34)、(1.52)和(1.53)式，得

$$\sigma_{ij}=2G\varepsilon'_{ij}+\frac{E}{(1-2\nu)}\varepsilon_{cp}\delta_{ij},\qquad \Gamma\leqslant\Gamma_0 \tag{1.56}$$

$$\sigma_{ij}=\frac{\sqrt{2}\,k}{\Gamma}\varepsilon'_{ij}+\frac{E}{(1-2\nu)}\varepsilon_{cp}\delta_{ij},\qquad \Gamma\geqslant\Gamma_0 \tag{1.57}$$

由(1.37)、(1.54)和(1.55)式，得

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2G}\sigma'_{ij}+\frac{1-2\nu}{E}\sigma_{cp}\delta_{ij},\qquad \Sigma<\sqrt{2}\,k \tag{1.58}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2G}\sigma'_{ij}+\frac{1-2\nu}{E}\sigma_{cp}\delta_{ji}+\lambda\sigma'_{ij},\qquad \Sigma=\sqrt{2}\,k \tag{1.59}$$

其中λ为正值未定标量。

3. 理想刚塑性材料

这里介绍Hencky材料的一种特列情况。假定

(1) $E\to\infty$，$G\to\infty$，即略去弹性变形；

(2) 固体全域处于屈服状态；

(3) 材料为不可压缩，即$\varepsilon_{ij}=0$。

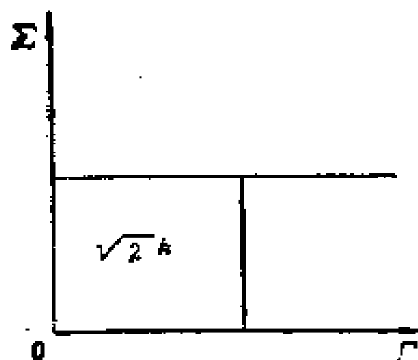


图1-3　Σ-Γ关系

这时Σ-Γ关系如图1-3所示，于是应力应变关系式为

$$\sigma'_{ij}=\frac{\sqrt{2}\,k}{\sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}}\varepsilon_{ij} \tag{1.60}$$

理想刚塑性材料的势能密度为

$$A=\sqrt{2}\,k\Gamma \tag{1.61}$$

理想刚塑性材料的余能密度为

$$B=0 \tag{1.62}$$

§1.5 塑性力学的流动理论

1.5.1 流动理论的基本方程

在固体内部开始出现塑性区时，在塑性区里应变不仅取决于最终的应力状态，而且还与加载过程有关，因此塑性力学中的应力应变关系应是应力增量与应变增量之间的关系。由应力增量与应变增量形成的塑性理论叫流动理论（或叫增量理论）。

采用欧拉方法描述塑性流动理论问题的提法是：假定在某瞬时 t，固体处于静力平衡状态时，已知固体内部各点的应力状态及其加载路线；又假定在瞬时$t+dt$时，在固体的整体边界 S_1 上已知外力增量为$d\bar{P}_i$；在固体的整体边界 S_2上已知位移增量为$d\bar{u}_i$。这时的待解函数（应力增量、应变增量、位移增量）应满足下面的流动理论的基本方程。在给定的边界条件下，只要求出流动理论的基本方程，则可求得待解函数。这时的待解函数就叫塑性流动理论问题的真实解，以后为了叙述简便有时把增量二字略去。

塑性流动理论的四类基本方程：

(1) 平衡方程

$$d\sigma_{ij,j}=0 \qquad (V) \tag{1.63}$$

(2) 应变位移增量关系式

$$d\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(du_{i,j}+du_{j,i}) \qquad (V) \tag{1.64}$$

(3) 应力应变增量线性关系式

采用应变增量表示应力增量的关系式为

$$d\sigma_{ij}=d\sigma_{ij}(d\varepsilon_{kl}) \qquad (V) \quad (1.65)$$

或定义为

$$d\sigma_{ij}-\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}=0 \qquad (V) \quad (1.66)$$

采用应力增量表示应变增量的关系式为

$$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ij}(d\sigma_{kl}) \qquad (V) \quad (1.67)$$

或定义为

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B(d\sigma_{ij})}{\partial(d\sigma_{ij})}=0 \qquad (V) \quad (1.68)$$

这里$A(d\varepsilon_{ij})$为固体的势能增量密度，$B(d\sigma_{ij})$为余能增量密度。只有在确定了应力应变增量关系式的具体形式之后，才能求得A与B的具体形式。

(4) 边界条件

已知力的边界条件为

$$d\sigma_{ij}l_j-d\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (1.69)$$

已知位移边界条件为

$$du_i-d\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (1.70)$$

下面介绍几种应力应变增量关系式的具体形式。

1.5.2 硬化材料

应变增量$d\varepsilon_{ij}$可分解为弹性应变增量$d\varepsilon^e_{ij}$和塑性应变增量$d\varepsilon^p_{ij}$，故有

$$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon^e_{ij}+d\varepsilon^p_{ij} \qquad (1.71)$$

设硬化材料的应力应变增量关系式为

$$d\varepsilon^p_{ij}=h\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}df \qquad (1.72)$$

其中h、f为σ_{ij}的正值确定的函数，故有

$$d\varepsilon_{ij}=\frac{1-2\nu}{E}d\sigma_{cp}\delta_{ij}+\frac{1}{2G}d\sigma'_{ij}+\alpha h\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}df \qquad (1.73)$$

式中α的取值为

(1) 在加载过程：

当$f(\sigma_{ij})=c$，且$df>0$时，$\alpha=1$；

(2) 在中性或卸载过程：

当$f(\sigma_{ij})<c$或$f(\sigma_{ij})=c$，且$df\leqslant0$时，$\alpha=0$。

其中c表示硬化最终状态的参数，其值随场所而变，是预先指定的。

由(1.73)式可求得其逆关系式为

$$d\sigma_{ij}=\frac{E}{(1-2\nu)}d\varepsilon_{cp}\delta_{ij}+2G\left[d\varepsilon'_{ij}-\alpha\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}d\varepsilon_{kl}\right)\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}}{\frac{1}{2Gh}+\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}}\right] \qquad (1.74)$$

式中α的取值为

(1) 在加载过程：

当$f(\sigma_{ij})=c$，且$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}d\varepsilon_{kl}>0$时，$\alpha=1$；

(2) 在中性或卸载过程：

当$f(\sigma_{ij})<c$或$f(\sigma_{ij})=c$，且$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}d\varepsilon_{kl}<0$时，$\alpha=0$。

对应于上述应力应变增量关系，其硬化材料的势能增量密度为

$$A(d\varepsilon_{ij})=\frac{3E}{2(1-2\nu)}(d\varepsilon_{cp})^2+G\left[d\varepsilon'_{ij}d\varepsilon'_{ij}-\frac{\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}d\varepsilon_{kl}\right)^2}{\frac{1}{2Gh}+\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}}\right] \qquad (1.75)$$

余能增量密度为

$$B(\mathrm{d}\sigma_{ij})=\frac{3(1-2\nu)}{2E}(\mathrm{d}\sigma_{cp})^2+\frac{\mathrm{d}\sigma'_{ij}\mathrm{d}\sigma'_{ij}}{4G}+\frac{1}{2}\alpha h(\mathrm{d}f)^2 \tag{1.76}$$

其中

$$\mathrm{d}\sigma_{cp}=\frac{1}{3}\mathrm{d}\sigma_{ii},\quad \mathrm{d}\varepsilon_{cp}=\frac{1}{3}\mathrm{d}\varepsilon_{ii}$$

1.5.3 理想塑性材料

方程(1.72)式中的$h=1/\beta$，且

$$\lim_{\substack{\beta\to 0\\ \mathrm{d}f\to 0}}\frac{\mathrm{d}f}{\beta}=\mathrm{d}\lambda \tag{1.77}$$

其中β是常数；$\mathrm{d}\lambda$是正值不定量。于是，理想塑性材料的应力应变增量的关系式为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}=\frac{1-2\nu}{E}\mathrm{d}\sigma_{cp}\delta_{ij}+\frac{\mathrm{d}\sigma'_{ij}}{2G}+\alpha\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\mathrm{d}\lambda \tag{1.78}$$

其中α取值为

(1) 当$f(\sigma_{ij})=c$，且$\mathrm{d}f=0$时，$\alpha=1$；

(2) 当$f(\sigma_{ij})<c$或$f(\sigma_{ij})=c$，且$\mathrm{d}f<0$时，$\alpha=0$。

方程(1.78)式的逆关系为

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}=\frac{E}{1-2\nu}\mathrm{d}\varepsilon_{cp}\delta_{ij}+2G\left[\mathrm{d}\varepsilon'_{ij}-\alpha\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}\mathrm{d}\varepsilon_{kl}\right)\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}}{\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}}\right] \tag{1.79}$$

其中α取值为

(1) 当$f(\sigma_{ij})=c$，且$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}\mathrm{d}\varepsilon_{kl}>0$时，$\alpha=1$；

(2) 当$f(\sigma_{ij})<c$或$f(\sigma_{ij})=0$，且$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}\mathrm{d}\varepsilon_{kl}<0$时，$\alpha=0$。

根据上述可得，理想塑性材料的势能增量密度和余能增量密

度。其势能增量密度为

$$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})=\frac{3E}{2(1-2v)}(\mathrm{d}\varepsilon_{cp})^2+G\left[\mathrm{d}\varepsilon'_{ij}\mathrm{d}\varepsilon'_{ij}-\frac{\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}\mathrm{d}\varepsilon_{kl}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{mn}}}\right] \quad (1.80)$$

余能增量密度为

$$B(\mathrm{d}\sigma_{ij})=\frac{3(1-2v)}{2E}(\mathrm{d}\sigma_{cp})^2+\frac{\mathrm{d}\sigma'_{ij}\mathrm{d}\sigma'_{ij}}{4G} \quad (1.81)$$

1.5.4 理想刚塑性材料

对理想刚塑性材料而言，假定

(a) 略去弹性应变速度效应；(b) 材料不可压缩，即 $\varepsilon_{ij}=0$；(c) 固体全域处于塑性状态。在这样的条件下，待解函数应满足下面的基本方程：

(1) 平衡方程

$$\sigma_{ij,j}=0 \qquad (V) \quad (1.82)$$

或

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \quad (1.83)$$

(2) 应变位移速度关系

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i}) \qquad (V) \quad (1.84)$$

(3) 应力与应变速度关系

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\mu\sigma'_{ij} \quad \left(\mu=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right) \qquad (V) \quad (1.85)$$

(当 $\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2$，且 $\sigma'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij}=0$。)

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=0 \qquad (V) \quad (1.86)$$

(当$\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}<2k^2$，或$\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2$，且$\sigma'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij}<0$。)

由(1.85)式，可得

$$\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}=\mu^2\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=\mu^2(2k^2)$$

所以

$$\mu^2 = \dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}/2k^2$$

由此得到采用应变速度表示应力的关系为

$$\sigma'_{ij} = \frac{\sqrt{2}\,k}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}}\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad (V) \quad (1.87)$$

(4) 边界条件

已知力的边界条件为

$$\sigma_{ij}l_j - \overline{P}_i = 0 \qquad (S_1) \quad (1.88)$$

已知位移边界条件为

$$\dot{u}_i - \dot{\overline{u}}_i = 0 \qquad (S_2) \quad (1.89)$$

(5) 势能增量密度

定义

$$\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} = \sigma'_{ij} \qquad (1.90)$$

将(1.90)式积分，可得

$$A(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \int_0^{\dot{\varepsilon}_{ij}} \sigma'_{kl}\,d\dot{\varepsilon}_{kl} = \sqrt{2}\,k\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}} \qquad (1.91)$$

满足上述基本方程的待解函数为理想刚塑性材料问题的真实解。

§1.6 蠕变理论

1.6.1 蠕变流动理论的基本方程

固体处于不变荷载作用下，应变随时间的延续而不断增加的现象称为蠕变，如金属、砼等固体材料都具有此特性。在高温条件下工作的固体构件（或结构）具有明显的蠕变现象。

固体处于稳定蠕变状态时，待解函数应满足下面基本方程：

(1) 平衡方程

$$\sigma_{ij,j} + \overline{F}_i = 0 \qquad (V) \quad (1.92)$$

(2) 应变位移速度关系式

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i}) \qquad (V) \quad (1.93)$$

(3) 应力应变速度关系式

采用应变速度表示应力的关系式为

$$\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}=0 \qquad (V) \quad (1.94)$$

或定义为

$$\sigma'_{ij}-\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (1.95)$$

采用应力表示应变速度的关系式为

$$\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0 \qquad (V) \quad (1.96)$$

或定义为

$$\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (1.97)$$

其中

$$H=\omega T^{m},\ T=\bar{\omega}H^{\mu} \quad \left(\mu=\frac{1}{m},\ \bar{\omega}=\omega^{-\mu}\right)$$

$$\omega=3^{\frac{m+1}{2}}\omega_1,\quad f(T)=\omega T^{m-1},\ g(H)=\bar{\omega}H^{\mu-1}$$

式中ω_1是材料的蠕变系数（为常数）；m为材料的蠕变指数（为常数）；A为蠕变理论的势能率密度；B为蠕变理论的余能率密度。

(4) 边界条件

已知力的边界条件为

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (1.98)$$

已知位移边界条件为

$$\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i=0 \qquad (S_2) \quad (1.99)$$

(5) 附加条件

不可压缩条件为

$$\dot{\varepsilon}_{ii}=\dot{u}_{i,i}=0 \qquad (1.100)$$

(6) 势能率密度

$$A(\dot{e}_{ij})=\int_0^{\dot{e}_{ij}}\sigma'_{ij}\mathrm{d}\dot{e}_{ij}=\int_0^{\dot{e}_{ij}}2g(H)\dot{e}_{ij}\mathrm{d}\dot{e}_{ij}$$

$$=\int_0^H g(H)H\mathrm{d}H=\int_0^H\bar{\omega}H^{\mu}\mathrm{d}H=\frac{\bar{\omega}}{1+\mu}H^{\mu+1} \quad (1.101)$$

(7)余能率密度

$$B(\sigma_{ij})=\int_0^{\sigma_{ij}}\dot{e}_{ij}\mathrm{d}\sigma_{ij}=\int_0^{\sigma'_{ij}}\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\mathrm{d}\sigma'_{ij}$$

$$=\int_0^T f(T)T\mathrm{d}T=\int_0^T\omega T^m\mathrm{d}T$$

$$=\frac{1}{1+m}\omega T^{m+1} \quad (1.102)$$

(8) 互补条件

势能率密度与余能率密度都具有互补性质。其互补条件为

$$A+B=TH \quad (1.103)$$

如图1-4所示。

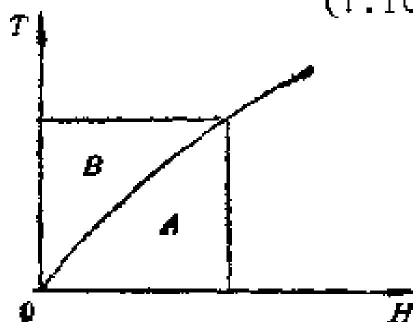


图1-4 T-H关系

1.6.2 有限变形蠕变流动理论的基本方程

待解函数应满足下面有限变形稳定蠕变流动理论的基本方程：

(1) 平衡方程

$$[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})]_{,j}+\bar{F}_k=0 \quad (V) \quad (1.104)$$

(2) 应变位移速度关系

$$\dot{e}_{ij}=\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i}+u_{k,i}\dot{u}_{k,j}+u_{k,j}\dot{u}_{k,i}) \quad (V)(1.105)$$

(3) 应力应变速度关系

采用应变速度表示应力偏量的关系式为

$$\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij}=0 \quad (V) \quad (1.106)$$

或定义为

$$\sigma'_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \dot{e}_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (1.107)$$

采用应力偏量表示应变速度的关系式为

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0 \qquad (V) \quad (1.108)$$

或定义为

$$\dot{e}_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (1.109)$$

其中A为势能率密度；B为余能率密度。

(4) 边界条件

已知力的边界条件为

$$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0 \qquad (S_1) \quad (1.110)$$

已知位移边界条件为

$$\dot{u}_i-\dot{\bar{u}}_i=0 \qquad (S_2) \quad (1.111)$$

(5) 附加条件

不可压缩条件为

$$\dot{e}_{ii}=0 \qquad (1.112)$$

这里略去了伸长度的乘积项[9]。

(6) 势能率密度$A(\dot{e}_{ij})$与余能率密度$B(\sigma_{ij})$

$$A(\dot{e}_{ij})=\int_0^{\dot{e}_{ij}}\sigma'_{ij}\mathrm{d}\dot{e}_{ij}=\int_0^H\omega H^{\mu}\mathrm{d}H=\frac{\omega}{1+\mu}H^{1+\mu} \qquad (1.113)$$

$$B(\sigma_{ij})=\int_0^{\sigma_{ij}}\dot{e}_{ij}\mathrm{d}\sigma_{ij}=\int_0^T\omega T^m\mathrm{d}T=\frac{\omega}{1+m}T^{1+m} \qquad (1.114)$$

今后为了方便，将势能率密度与余能率密度简写为势能密度与余能密度。

参 考 文 献

1 钱伟长，叶开沅．弹性力学．北京：科学出版社，1980

2　徐芝纶．弹性力学(上，下册)．北京：高等教育出版社，1978
3　王龙甫．弹性理论．北京：科学出版社，1979
4　冯康，石钟慈著．弹性结构的数学理论．北京：科学出版社，1981
5　Sokolnikoff I S. Mathematical Theory of Elasticity. McGraw-Hill, 1956
6　杨桂通编．弹塑性力学．北京：人民教育出版社，1980
7　钱伟长著．变分法及有限元(上册)．北京：科学出版社，1980
8　郭仲衡著．非线性弹性理论．北京：科学出版社，1980
9　诺沃日洛夫 B B；朱兆祥译．非线性弹性力学基础．北京：科学出版社，1958
10　王仁等著．塑性力学基础．北京：科学出版社，1982
11　卡恰诺夫 L M．著；周承倜译．塑性理论基础．北京：人民教育出版社，1959
12　伊留申 A A．著；王振常译．塑性．北京：建筑工程出版社，1958
13　(日)鹫津久一郎著；刘亦珩译．塑性论．上海：上海科学技术出版社，1961
14　徐秉业，陈森灿编著．塑性理论简明教程．北京：清华大学出版社，1981
15　Качанов V M. Теория Ползучести. Фцzmatгuz, 1960
16　希尔 R；王仁等译．数学塑性理论．北京：科学出版社，1966
17　Fung Y C. Continuum Mechanics. Prentice-Hill, 1977

第二章　变分法简介

§2.1 概　述

变分法是研究求解泛函极值（极大和极小）的方法，所谓变分问题就是求泛函的极值问题。因为多数情况是研究泛函的驻值问题，所以有的著作亦把求泛函驻值问题叫作变分问题。所谓泛函系指对应于某一类变量函数 $Y(x)$中的每个函数 $y(x)$，有一个 $J(y(x))$的值与之对应，这个变量 $J(y(x))$是取决于变量函数 $Y(x)$的泛函。泛函是变量与函数之间的关系。泛函的定义域是变量函数组成的一个集合或空间。

如弹性势能

$$\Pi(\varepsilon_{ij})=\iiint\limits_V \frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\mathrm{d}v$$

是取决于变量函数ε_{ij}的泛函。

2.1.1 著名的变分问题

变分学的发展与下面3个变分问题的发展有密切关系。

1. 最速降线问题

如图2-1所示，设在不同铅垂线上的两点A与B连结成某一曲线，质点P在重力作用下，沿曲线由A点自由滑落到B点（略去摩擦影响），完成滑落过程所需时间与AB曲线的不同而易，求沿什么样的曲线滑落所需时

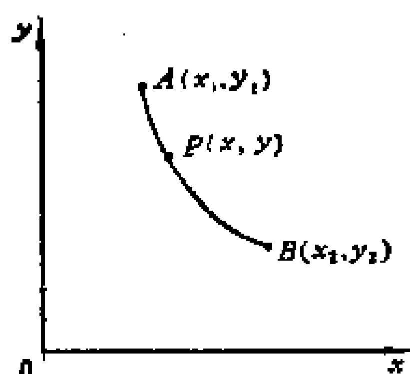


图2-1　最速降线问题

间最少？这是一个无变分约束条件的变分问题。

变分问题的数学描述：

在满足 $y=y_1(x_1)$，$y=y_2(x_2)$的容许函数中，选取一个变量函数$y(x)$，使泛函

$$T(y(x))=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{1+y'^2}{2gy}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

实现最小值（g为重力加速度）。

2. 等周问题

求给定长度的封闭曲线l，使曲线所围的面积S最大。这是具有变分约束条件的变分问题。

变分问题的数学描述：

在满足$x(t_1)=x(t_2)$，$y(t_1)=y(t_2)$和变分约束条件

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \tag{2.2}$$

的容许函数$x(t)$，$y(t)$中，选取一组变量函数，使泛函

$$S=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

为最大值。

3. 短程线问题

如图2-2所示，设在已知$\varphi(x,y,z)=0$的曲面上，给定两点A与B，求两点间长度为最短的曲线。这是具有变分约束条件的变分问题。

变分问题的数学描述：

在满足$\varphi(x,y,z)=0$的容许函数$y(x)$，$z(x)$中，选取一组变量函数，使泛函

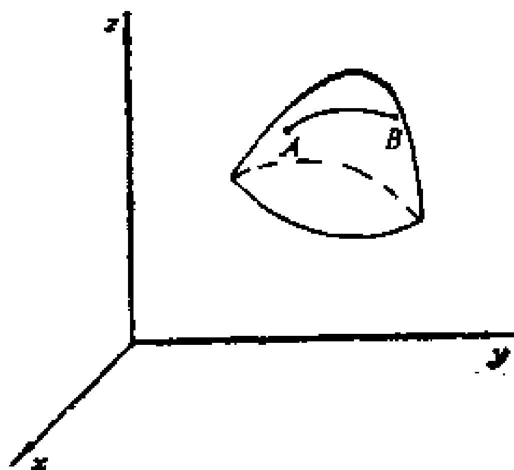


图2-2 短程线问题

$$L=\int_{x_1}^{x_2}(1+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \tag{2.4}$$

为最小值。

2.1.2 泛函及其变分

1. 泛函定义

如果对某一类变量函数$Y(x)$中的每一个变量函数$y(x)$，有一个J的值与之对应，这个变量J称为依赖于变量函数$y(x)$的泛函，记为$J=J(y(x))$。

2. 变量函数的变分

泛函的变量函数的变分系指两个变量函数之间很小的改变量，记为$\delta y=y_1(x)-y(x)$。这里假定$y(x)$是在某一函数类（容许函数）中任意的改变。所谓很小的改变量系指变量函数$y(x)$与$y_1(x)$的接近程度。

当$\delta y=y_1(x)-y(x)$的模很小时，称$y(x)$与$y_1(x)$有零阶接近度。当下面诸模都很小时，

$$\delta y=y_1(x)-y(x)$$
$$\delta y'=y_1'(x)-y'(x)$$

称$y(x)$与$y_1(x)$有一阶接近度。当下面诸模都很小时，

$$\delta y=y_1(x)-y(x)$$
$$\delta y'=y_1'(x)-y'(x)$$
$$\cdots\cdots$$
$$\delta y^k=y_1^k(x)-y^k(x)$$

称$y(x)$与$y_1(x)$有k阶接近度。

变量函数$y(x)$的变分是x的函数，这个函数可以进行若干次微分，则有

$$(\delta y)'=y_1'(x)-y'(x)=\delta y'$$
$$(\delta y)''=y_1''(x)-y''(x)=\delta y''$$
$$\cdots\cdots$$
$$(\delta y)^k=y_1^k(x)-y^k(x)=\delta y^k$$

3．泛函的连续性

如果对于任意一个正数ε，可以找到一个对应的ξ，当

$$|y(x)-y_0(x)|<\xi$$
$$|y'(x)-y'_0(x)|<\xi$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|y_1^k(x)-y_0^k(x)|<\xi$$

时，使泛函$|J(y(x))-J(y_0(x))|<\varepsilon$，就认为泛函$J(y(x))$在$y=y_0(x)$处是$k$阶接近的连续泛函。

4．线性泛函

泛函$J(y(x))$满足

$$J(cy(x))=cJ(y(x))$$
$$J(y_1(x)+y_2(x))=J(y_1(x))+J(y_2(x))$$

条件时，称$J(y(x))$为线性泛函。

5．泛函的变分

如果泛函的增量

$$\Delta J=J(y(x)+\delta y)-J(y(x))$$

可以写为线性项与非线性项，则有

$$\Delta J=J(y(x),\delta y)+N(y(x),\delta y)\cdot\max|\delta y|$$

当$\max|\delta y|\to 0$时，$N(y(x),\delta y)\to 0$，则泛函的增量中对于δy而言的线性项$J(y(x),\delta y)$，称为泛函的变分，记为

$$\delta J=J(y(x),\delta y)$$

泛函变分另外的定义：

若变量函数类用参数表示为$y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\delta y$，则泛函变分定义为

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial\alpha}J(y(x)+\alpha\delta y)\Big|_{\alpha=0} \tag{2.5}$$

即泛函的变分对δy而言是泛函增量的线性主部，其中$\alpha=[0\sim1]$。

6. 泛函极值问题

泛函的增量可用泰洛公式展开为

$$\Delta J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\mathrm{d}x-\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$
$$=\delta J+\frac{1}{2}\delta^2 J+\cdots \tag{2.6}$$

可见，泛函 $J(y(x)+\delta y)$在$y(x)$实现局部极值的必要条件，即驻值条件为

$$\delta J=0 \tag{2.7}$$

若泛函$J(y(x)+\delta y)$在 $y(x)$实现局部极小值，其充要条件为

$$\delta J(y(x))=0 \quad (2.7)$$
$$\delta^2 J(y(x))>0 \tag{2.8}$$

若泛函$J(y(x)+\delta y)$在$y(x)$实现局部极大值，其充要条件为

$$\delta J(y(x))=0 \quad (2.7)$$
$$\delta^2 J(y(x))<0 \tag{2.9}$$

泛函的极值与变量函数的接近度有关。如果对与$y=y_0(x)$的接近度为零阶的一切函数而言，泛函在变量函数$y=y_0(x)$实现极值，称这种极值为强极值。如果对与$y=y_0(x)$的接近度为一阶的一切函数而言，泛函在变量函数$y=y_0(x)$实现极值，称这种极值为弱极值。显然，如果泛函在$y=y_0(x)$实现强极值，那么泛函在$y=y_0(x)$亦实现弱极值；反之则不成立。

2.1.3 变分法基本引理

1. 基本引理 I

设函数$\eta(x)$本身和它的导数，在区间$[x_1,x_2]$上都是连续的，且在端点等于零($\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$)，对于在区间$[x_1,x_2]$上为连续的函数$f(x)$而言，有积分式

$$\int_{x_1}^{x_2}f(x)\eta(x)\mathrm{d}x=0 \tag{2.10}$$

成立，则$f(x)$在区间$[x_1,x_2]$上恒等于零。

2. 基本引理Ⅱ

设函数$\eta(x,y)$本身和它的一阶偏导数在区域S内都是连续的，且在区域S边界Γ上$\eta(x,y)$等于零，对于在区间S上为连续的函数$f(x,y)$而言，有积分式

$$\iint_S f(x,y)\eta(x,y)\mathrm{d}s=0 \tag{2.11}$$

成立，则$f(x,y)$在区域S上恒等于零。

3. 基本引理Ⅲ

设函数$\eta(x,y,z)$本身和它的一阶偏导数在区间V内都是连续的，且在区域的边界S上等于零($\eta(S)=0$)，对于在区域V内连续的函数$f(x,y,z)$而言，有积分式

$$\iiint_V f(x,y,z)\eta(x,y,z)\mathrm{d}v=0 \tag{2.12}$$

成立，则$f(x,y,z)$在区间V内恒等于零。

2.1.4 约束条件与变分条件

约束条件可分为变分约束条件和一般约束条件。所谓变分约束条件系指在求泛函极值（或驻值）时，泛函中的变量函数之间应满足的关系式。变分约束条件可以通过拉氏乘子法，化为泛函求极值（或驻值）时所得到的变分条件。

所谓一般约束条件，就是变量函数之间应满足的关系式。在构造泛函时，利用这种关系进行变量函数之间的代换。也就是，从泛函中消去某一类变量函数。所以，它不再是泛函求极值时变量函数之间应满足的变分约束条件。一般约束条件是不能用(线性)拉氏乘子法转化为变分条件，而是可通过求泛函极值(或驻值)时得到某一类变量函数，再利用一般约束条件求另一类变量函数。

所谓变分条件，就是使泛函实现极值（或驻值）时，通过一系列变分运算而得到的变量函数之间应满足的条件，叫变分条

件。在定义域内部的变分条件又叫尤拉方程，在定义域边界上的变分条件又叫自然边界条件。

下面简要介绍数学中的变分法，详细的论述请参阅文献[1～9]。

§2.2 固定边界的变分问题

在已知泛函的形式和边界固定的条件下，研究泛函实现极值时应满足的微分方程，这些微分方程最先由尤拉推得，故一般称为尤拉方程。

2.2.1 简单型泛函

已知泛函的形式为

$$J(y(x))=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{2.13}$$

和容许函数$y(x)$在边界上是给定的，且记为

$$y_1=y(x_1),\quad y_2=y(x_2) \tag{2.14}$$

并假定$F(x,y,y')$是三阶可微的。

根据前述，泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零，即驻值条件$\delta J=0$。

下面计算泛函的一阶变分。

取容许函数为参数的曲线族为

$$\begin{aligned}y(x,\alpha)&=y(x)+\alpha\delta y\\ y'(x,\alpha)&=y'(x)+\alpha\delta y'\end{aligned} \tag{2.15}$$

于是泛函成为

$$J(y(x)+\alpha\delta y)=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha))\mathrm{d}x \tag{2.16}$$

故

$$\delta J=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}J(y(x)+\alpha\delta y)\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\frac{\partial y'(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right]dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx \tag{2.17}$$

利用分部积分法，有

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right)dx$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx$$

$$=\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx$$

将上式代入(2.17)，则有

$$\delta J=\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\left[F_y-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y dx \tag{2.18}$$

其中

$$F_y=\frac{\partial F}{\partial y}$$

因为边界是固定的，故有$\delta y|_{x_1}=\delta y|_{x_2}=0$，以及泛函实现极值的必要条件为$\delta J=0$，故(2.18)式变为

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left[F_y-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y dx=0 \tag{2.19}$$

由于方括号中是 $y(x)$的连续函数，而 δy 是满足某些一般条件的任意函数，所以根据变分法基本引理可得

$$F_y-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \tag{2.20}$$

由于

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y'}\frac{dy'}{dx}$$

所以(2.20)式可展为

$$F_y-F_{xy'}-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y''=0 \tag{2.21}$$

这便是泛函实现极值时，极值曲线$y=y(x,c_1,c_2)$应满足的微分方程。这个方程叫尤拉方程。其中积分常数c_1、c_2由边界条件$y_1=y(x_1)$，$y_2=y(x_2)$决定。

2.2.2 含高阶导数型泛函

已知泛函的形式为

$$J(y(x))=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y(x),y'(x),\cdots,y^n(x))\mathrm{d}x \tag{2.22}$$

和容许函数在边界上满足条件为

$$\left.\begin{array}{l} y_1=y(x_1),\ \ y_1'=y'(x_1),\ \ \cdots,\ \ y_1^{n-1}=y^{n-1}(x_1) \\ y_2=y(x_2),\ \ y_2'=y'(x_2),\ \ \cdots,\ \ y_2^{n-1}=y^{n-1}(x_2) \end{array}\right\} \tag{2.23}$$

其中函数F对$y(x)$，$y'(x)$，$\cdots$，$y^n(x)$是$n+2$阶可微的。

取含参数α的函数族为

$$y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\delta y \tag{2.24}$$

泛函(2.22)式的一阶变分为

$$\delta J=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J(y(x)+\alpha\delta y)\bigg|_{\alpha=0}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}[F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+\cdots+F_{y^n}\delta y^n]\mathrm{d}x \tag{2.25}$$

利用分部积分法，有

$$\int_{x_1}^{x_2}F_{y'}\delta y'\mathrm{d}x=F_{y'}\delta y\bigg|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\ \delta y\mathrm{d}x \tag{2.26}$$

$$\int_{x_1}^{x_2}F_{y''}\delta y''\mathrm{d}x=F_{y''}\delta y'\ \bigg|_{x_1}^{x_2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\delta y\bigg|_{x_1}^{x_2}$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}\delta y\mathrm{d}x \tag{2.27}$$

…………………………………………………

$$\int_{x_1}^{x_2}F_{y^n}\delta y^n\mathrm{d}x=F_{y^n}\delta y^{n-1}\ \bigg|_{x_1}^{x_2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y^n}\delta y^{n-2}\bigg|_{x_1}^{x_2}$$

$$+\cdots+(-1)^n\int_{x_1}^{x_2}\frac{d^n}{dx^n}F_{y^n}\delta y dx \tag{2.28}$$

由于在边界$x=x_1$，$x=x_2$的变分$\delta y=\delta y'=\delta y''=\cdots=\delta y^{n-1}=0$，则有

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\right.$$

$$\left.+\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^n}\right]\delta y dx \tag{2.29}$$

令$\delta J=0$，并且由于 δy为任意的函数，根据变分法基本引理，由(2.29)式得

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^n}=0 \tag{2.30}$$

这是$2n$阶微分方程，叫尤拉-卜阿松方程。这个方程的积分 曲 线是泛函(2.22)式的变分问题的极值曲线，其通解含有$2n$个积分常数，可由$2n$个边界条件(2.23)式决定。

2.2.3 含多个自变量型泛函

已知泛函的形式为

$$J(u(x,y))=\iint_S F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy \tag{2.31}$$

和函数$u(x,y)$在区域S的边界Γ上为给定的，且假定$F(x,y,u,u_x,u_y)$为三阶可微，函数$u(x,y)$为二阶可微。

取含参量的函数族为

$$u(x,y,\alpha)=u(x,y)+\alpha\delta u$$

$$u_x(x,y,\alpha)=\frac{\partial u(x,y,\alpha)}{\partial x}=u_x(x,y)+\alpha\delta u_x \tag{2.32}$$

$$u_y(x,y,\alpha)=\frac{\partial u(x,y,\alpha)}{\partial y}=u_y(x,y)+\alpha\delta u_y$$

于是泛函的变分为

$$\delta J=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}J(u(x,y,\alpha))\Big|_{\alpha=0}$$
$$=\iint_S[F_u\delta u+F_{u_y}\delta u_x+F_{u_y}\delta u_y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (2.33)$$

其中

$$F_u=\frac{\partial F}{\partial u},\quad F_{u_x}=\frac{\partial F}{\partial u_x},\quad F_{u_y}=\frac{\partial F}{\partial u_y}$$

由于

$$\left.\begin{aligned}F_{u_x}\delta u_x&=\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u)-\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x})\delta u\\ F_{u_y}\delta u_y&=\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u)-\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y})\delta u\end{aligned}\right\} \qquad (2.34)$$

将(2.34)式代入(2.33)式得

$$\delta J=\iint_S\Big[F_u-\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x})-\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y})+\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

利用格林公式，有

$$\iint_S\Big[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\delta u)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\delta u)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_\Gamma(F_{u_x}\mathrm{d}y-F_{u_y}\mathrm{d}x)\delta u\,\mathrm{d}\Gamma=0$$

因为在边界上$\delta u=0$，故(2.35)式变为

$$\delta J=\iint_S\Big[F_u-\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x})-\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y})\Big]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (2.36)$$

泛函实现极值的必要条件为$\delta J=0$，并由于 δu的任意性，根据变分法基本引理，由(2.36)式得

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x})-\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y})=0 \qquad (2.37)$$

这是泛函 $J(u(x,y))$实现极值时必须满足的二阶偏微分方程，通

常称为尤拉方程。

2.2.4 泛函的二阶变分

已知泛函的形式为

$$J(y(x))=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{2.38}$$

其固定的边界条件，记为$y_1=y(x_1)$，$y_2=y(x_2)$。函数$F(x,y,y')$为三阶可微的。

其一阶变分为

$$\delta J(y(x))=\int_{x_1}^{x_2}[F_y\delta y+F_{y'}\delta u']\mathrm{d}x \tag{2.39}$$

其二阶变分为

$$\delta^2 J(y(x))=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{2}[F_{yy}\delta y^2+2F_{yy'}\delta y\delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2]\mathrm{d}x \tag{2.40}$$

泛函J实现极小的必要条件是对任意选择的δy有$\delta^2 J\geqslant 0$，由此得到泛函(2.38)式实现极小的必要条件是沿着极值函数

$$F_{y'y'}\geqslant 0 \tag{2.41}$$

成立；泛函(2.38)式实现极大值的必要条件为$\delta^2 J\leqslant 0$。由此得到泛函(2.38)式实现极大的必要条件是沿着极值函数

$$F_{y'y'}\leqslant 0 \tag{2.42}$$

成立。上述条件通常称为勒上特条件。

§2.3 边界条件

前面介绍的变分问题，都是建立在边界条件为固定的情况下进行讨论的，但实际上边界条件是多样的，如容许函数在边界上没有限制的情况，叫自由边界条件；如容许函数在边界上沿着某一曲线或某一曲面变动的情况，叫可动边界条件。

2.3.1 简单型泛函

已知泛函形式为

$$J(y(x))=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{2.43}$$

由泛函$J(y(x))$的一阶变分为零的条件得

$$\delta J(y(x))=F_{y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x=0 \tag{2.44}$$

故有

$$F_{y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}=0 \tag{2.45}$$

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0 \tag{2.46}$$

方程(2.46)式是尤拉方程。它是容许函数在定义区域内应满足的方程；方程(2.45)式是容许函数在边界上应满足的条件。下面就不同情况的边界条件进行分析。

1. 固定边界的情况

当边界为固定时，则有

$$y_1=y(x_1),\quad y_2=y(x_2) \tag{2.47}$$

故

$$\delta y|_{x_1}=\delta y|_{x_2}=0$$

于是方程(2.45)得到满足。

2. 自由边界的情况

当边界不受限制（自由边界)，在边界上δy为任意的，要使方程(2.45)得到满足，则有

$$F_{y'}\Big|_{x_1}^{x_2}=0 \tag{2.48}$$

的条件存在。通常把这个条件称为自然边界条件。

2.3.2 含二阶导数型泛函

已知泛函的形式为

$$J(y(x))=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',y'')\mathrm{d}x \tag{2.49}$$

由泛函$J(y(x))$的一阶变分为零的条件，可得

$$\begin{aligned}\delta J(y(x))&=\int_{x_1}^{x_2}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+F_{y''}\delta y'')\mathrm{d}x\\&=\left(F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right)\delta y+F_{y''}\delta y'\Big|_{x_1}^{x_2}\\&\quad+\int_{x_1}^{x_2}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}\right)\delta y\mathrm{d}x=0\end{aligned} \tag{2.50}$$

根据变分法基本引理，由(2.50)式可得

$$F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\Big|_{x_1}^{x_2}=0,\quad F_{y''}\Big|_{x_1}^{x_2}=0 \tag{2.51}$$

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}=0 \tag{2.52}$$

方程(2.52)式是尤拉方程；方程(2.51)式是边界上满足的条件。

1. 固定边界情况

当边界固定时，已知

$$y_1=y(x_1),\quad y_1'=y'(x_1),\quad y_2=y(x_2),\quad y_2'=y'(x_2)$$

故

$$\delta y=\delta y'|_{x=x_1}=0$$
$$\delta y=\delta y'|_{x=x_2}=0$$

由此可知，(2.50)式中的边界项自然得到满足。

2. 自由边界情况

因边界不受限制，所以δy，$\delta y'$在边界上为任意函数时，方程(2.50)式成立，于是可得到自然边界条件(2.51)式。

2.3.3 多自变量型泛函

已知泛函形式为

$$J(u(x,y))=\iint_S F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.53}$$

根据泛函(2.53)式的一阶变分为零的条件，可得

$$F_{u_x}\cos(n,x)+F_{u_y}\cos(n,y)=0 \qquad (\Gamma) \tag{2.54}$$

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0 \qquad (S) \tag{2.55}$$

其中Γ为区域S的边界；n为边界Γ的外法线方向；$\cos(n,x)$与$\cos(n,y)$为方向余弦；方程(2.55)式为尤拉方程，方程(2.54)式为自由边界的自然边界条件。

2.3.4 可动边界情况

当边界沿着某一曲线或曲面变动时，可得到较为复杂的边界条件，详见 §2.5节。

对于泛函

$$J(y(x))=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{2.56}$$

当边界点x_1沿曲线$y_1=\varphi_1(x_1)$变化，x_2点沿曲线$y_2=\varphi_2(x_2)$变化时，由泛函一阶变分为零的条件，可得其边界条件为

$$F+(\varphi_1'-y')F_{y'}=0 \qquad (x=x_1) \tag{2.57}$$

$$F+(\varphi_2'-y')F_{y}'=0 \qquad (x=x_2) \tag{2.58}$$

这个条件建立了极值曲线与边界点满足的曲线在边界点的斜率之间的关系。它是由变分而得的边界条件。这个条件称为横截条件，也叫自然边界条件。

2.3.5 含附加项型泛函

泛函由两项组成，一项是在定义域S内成立的项；一项是在定义域边界Γ上成立的项。边界项对泛函的尤拉方程没有影响，而对自然边界条件有影响。

已知泛函形式为

$$J(u(x,y))=\iint_S F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\int_\Gamma [P_1(\Gamma)u^2+2P_2(\Gamma)u]\mathrm{d}\Gamma \tag{2.59}$$

(1) 当附加项为

$$\int_\Gamma [P_1(\Gamma)u^2+2P_2(\Gamma)u]\mathrm{d}\Gamma \tag{2.60}$$

时，由泛函一阶变分为零而得的自然边界条件为

$$F_{u_x}\cos(n,x)+F_{u_y}\cos(n,y)+2P_1(\Gamma)u+2P_2(\Gamma)=0 \tag{2.61}$$

(2) 当附加项中$P_1=0$时，由泛函的一阶变分为零得到 的 自然边界条件为

$$F_{u_x}\cos(n,x)+F_{u_y}\cos(n,y)+2P_2(\Gamma)=0 \tag{2.62}$$

(3) 当附项中$P_1=P_2=0$时，由泛函的一阶变分为零得到的自然边界条件为

$$F_{u_x}\cos(n,x)+F_{u_y}\cos(n,y)=0 \tag{2.63}$$

§2.4 二次型泛函的变分问题

求解椭圆型微分方程的边值问题，化为与之等价的泛函的变分问题处理，是有条件的。也就是说，对微分算子有一定要求。

定理： 已知椭圆型微分方程

$$Lu=f \tag{2.64}$$

如果有解，若L是正定算子，则其解必使泛函

$$J(u)=(Lu,u)-2(f,u) \tag{2.65}$$

实现极小值。

与算子L有关的泛函(Lu,u)为正定的，系指对任意的变量函数u而言，满足不等式

$$(Lu,u)\geqslant r^2(u,u) \tag{2.66}$$

其中r^2为一正的常数，而

$$(u,u)=\int_{x_1}^{x_2}u^2(x)\mathrm{d}x>0 \tag{2.67}$$

定义

$$(Lu,u)=\iint_S uLu\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.68}$$

为二次型泛函。

现在研究椭圆型微分方程：

$$Lu=-\frac{\partial}{\partial x}\left(P_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(P_0\frac{\partial u}{\partial y}\right)+qu=-f(x,y) \tag{2.69}$$

在相应的边值条件下，所对应的泛函的形式。

2.4.1 第一边值问题

在边值条件为

$$u|_\Gamma=0 \tag{2.70}$$

时，与方程(2.69)式所对应的泛函，按(2.65)式为

$$\begin{aligned}J(u)=&-\iint_S u\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(P_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(P_0\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\iint_S(qu^2+2uf)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&-\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(P_0u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(P_0u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\iint_S\left[P_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+P_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\iint_S(qu^2+2uf)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_S\left[P_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+P_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+qu^2+2uf\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$-\int_{\Gamma} P_0 u \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma \tag{2.71}$$

考虑到边值条件(2.70)式，则有

$$J(u)=\iint_{S}\left[P_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+P_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+qu^2+2fu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.72}$$

这就是与方程(2.69)式及边值条件(2.70)式相对应的泛函的形式。

若P_0在$S+\Gamma$域内连续可微，q在$S+\Gamma$域内为连续，且$P_0>0$，$q\geqslant 0$时，使泛函$J(u)$实现极小值的函数，必满足第一边值条件下的偏微方程(2.69)式。

2.4.2 第二边值问题

在边值条件为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0 \text{（}n\text{为边界}\Gamma\text{的外法线）} \tag{2.73}$$

时，与方程(2.69)式所对应的泛函，按(2.65)式为

$$J(u)=\iint_{S}\left[P_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+P_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+qu^2+2fu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.74}$$

这是由于边值条件(2.73)式使泛函(2.71)式中的边界项为零所导致的结论。

若P_0在$S+\Gamma$区域内连续可微，且在

$$P_0>0,\quad q=0$$

$$\iint_{S} u(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

的条件下，则泛函$J(u)$取极小值的函数，必满足在第二边值条件下的偏微分方程(2.69)式。

2.4.3 第三边值问题

在边值条件为

$$\frac{\partial u}{\partial n}+P_1 u\bigg|_{\Gamma}=0 \tag{2.75}$$

时，与方程(2.69)式所对应的泛函，按(2.65)式为

$$J(u)=\iint_S\left[P_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+P_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-qu^2+2uf\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\Gamma}P_0P_1u^2\mathrm{d}\Gamma \tag{2.76}$$

若P_0在$S+\Gamma$域内连续可微，q在$S+\Gamma$域内为连续，且$P_0>0$，$q\geqslant0$，$P_1\geqslant0$时，使泛函$J(u)$实现极小值的函数，必满足第三边值条件下的偏微分方程(2.69)式。

§2.5 可动边界的变分问题

可动边界的变分问题，系指边界是待定的。也就是，泛函的积分域是变动的。这样泛函的变分由两部分组成，其一是由变量函数的变分产生的；另一部分是由于边界变动，即由x_i的变动而产生的。就固体力学而言，都可化为可动边界的变分问题，如弹塑性交界面的问题、接触问题、裂纹扩展时能量释放量的问题、有限元法的最佳剖分等。

2.5.1 简单型泛函

已知泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{2.77}$$

及其两个边界点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$是变动的，亦可以是一个点$A(x_1,y_1)$固定，而另一点$B(x_2,y_2)$为变动的。为了简便，先分析$B(x_2,y_2)$是可变动的。现在分析可动边界的变分问题。

自变量x_2的改变量记为δx_2；变量函数$y(x)$的变分记为δy。

由于$\delta x_2,\delta y,\delta y'$使泛函产生的改变量为

$$\Delta J=\int_{x_1}^{x_2+\delta x_2}F(x,y+\delta y,y'+\delta y')dx-\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$$
$$=\int_{x_2}^{x_2+\delta x_2}F(x,y+\delta y,y'+\delta y')dx+\int_{x_1}^{x_2}[F(x,y+\delta y,y'+\delta y')-F(x,y,y')]dx \quad (2.78)$$

由数学中的中值定理得

$$\int_{x_2}^{x_2+\delta x_2}F(x,y+\delta y,y'+\delta y')dx=F\Big|_{x=x_2+\alpha\delta x_2}\delta x_2 \quad (0<\alpha<1) \quad (2.79)$$

由于函数F的连续性，则有

$$F\Big|_{x=x_2+\alpha\delta x_2}=F(x,y,y')\Big|_{x=x_2}+\varepsilon \quad (2.80)$$

当$\delta x_2\to0$，$\delta y_2\to0$，则有$\varepsilon\to0$，于是有

$$\int_{x_2}^{x_2+\delta x_2}F(x,y+\delta y,y'+\delta y')dx=F(x,y,y')\Big|_{x=x_2}\delta x_2+\varepsilon\delta x_2$$

当δx_2、δy_2很小时，则$\varepsilon\delta x_2$可略去，于是方程(2.79)式变为

$$\int_{x_2}^{x_2+\delta x_2}F(x,y+\delta y,y'+\delta y')dx=F(x,y,y')\Big|_{x=x_2}\delta x_2 \quad (2.81)$$

关于(2.78)式中的第二项可用泰洛公式展开为

$$\int_{x_1}^{x_2}[F(x,y+\delta y,y'+\delta y')-F(x,y,y')]dx=\int_{x_1}^{x_2}[F_y\delta y+F_{y'}\delta y']dx+R$$

略去δy、$\delta y'$的高阶项R，利用分部积分法可得

$$\int_{x_1}^{x_2}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x$$

$$=F_{y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\Big(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\Big)\delta y\mathrm{d}x \tag{2.82}$$

假定$A(x_1,y_1)$固定，故$\delta y_1=0$，现在求$\delta y|_{x=x_2}$的值：

由图2-3可知：

$BC=\delta y|_{x=x_2}$

$FD=\delta y_2$

$ED\approx y'(x_2)\delta x_2$

因为

$BC=FD-ED$

所以

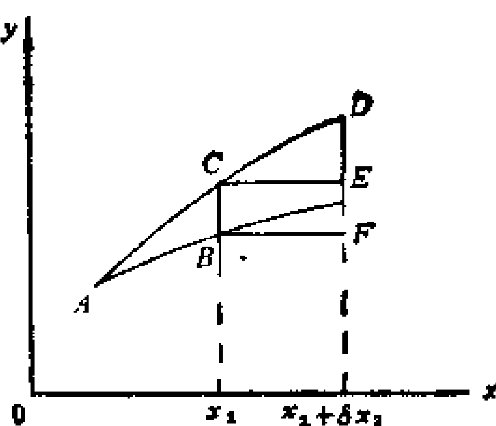


图2-3 可动边界的变分

$$\delta y|_{x=x_2}=\delta y_2-y'(x_2)\delta x_2 \tag{2.83}$$

由上述可知，泛函的改变量的线性主部，即泛函$J(y(x))$的一阶变分为

$$\delta J=F(x,y,y')\Big|_{x=x_2}\delta x_2+F_{y'}\Big|_{x=x_2}(\delta y_2-y'(x_2)\delta x_2)$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\Big[F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'})\Big]\delta y\mathrm{d}x$$

$$=(F-y'F_{y'})\Big|_{x=x_2}\delta x_2+F_{y'}\Big|_{x=x_2}\delta y_2$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\Big[F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'})\Big]\delta y\mathrm{d}x \tag{2.84}$$

实现极值的必要条件为$\delta J=0$，并根据变分法基本引理，由(2.84)式得

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y'})=0 \tag{2.85}$$

$$(F-y'F_{y'})\Big|_{x=x_2}\delta x_2+F_{y'}\Big|_{x=x_2}\delta y_2=0 \tag{2.86}$$

1．无关性

如果δx_2与δy_2是相互无关的，由(2.86)式得

$$\left(F-y'F_{y'}\right)\Big|_{x=x_2}=0 \tag{2.87}$$

$$F_{y'}\Big|_{x=x_2}=0 \tag{2.88}$$

2．相关性

如果δx_2与δy_2相关，且令$B(x_2,y_2)$沿曲线

$$y_2=\varphi_2(x_2) \tag{2.88}$$

移动，于是有

$$\delta y_2=\delta\varphi_2(x_2)=\varphi_2'(x_2)\delta x_2 \tag{2.89}$$

将(2.84)式代入(2.86)式，可得

移动，于是有

$$\delta y_1=\delta\varphi_1(x_1)=\varphi_1'(x_1)\delta x_1 \tag{2.92}$$

由于δx_1的任意性，可得到类似于(2.90)式的交界条件

$$F+(\varphi_1'-y')F_{y'}\Big|_{x=x_1}=0 \tag{2.93}$$

2.5.2 含多变量函数和高阶导数型泛函

已知泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',z,z',y'',z'')\mathrm{d}x \tag{2.94}$$

及其两个边界点 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$；设边界点 $B(x_2,y_2,z_2)$为可动的。

下面分析可动边界的变分问题。

如上所述，略去变量函数及自变量的所有高阶项，泛函(2.94)式的变分为

$$\begin{aligned}\delta J=&\int_{x_1}^{x_2+\delta x_2}F(x,y+\delta y,z+\delta z,y'+\delta y',z'+\delta z',y''+\delta y'',\\&z''+\delta z'')\mathrm{d}x-\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,z,y',z',y'',z'')\mathrm{d}x\\=&\int_{x_2}^{x_2+\delta x_2}F(x,y+\delta y,z+\delta z,y'+\delta y',z'+\delta z',y''+\delta y'',\\&z''+\delta z'')\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}[F(x,y+\delta y,z+\delta z,\\&y'+\delta y',z'+\delta z',y''+\delta y'',z''+\delta z'')\\&-F(x,y,z,y',z',y'',z'')]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.95}$$

利用数学中的中值定理得到

$$\begin{aligned}\delta J=F\Big|_{x=x_2}\delta x_2+\int_{x_1}^{x_2}[&F_y\delta y+F_{y'}+\delta y'+F_{y''}\delta y''\\&+F_z\delta z+F_{z'}\delta z'+F_{z''}\delta z'']\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.96}$$

已假定$A(x_1,y_1,z_1)$点固定，利用分部积分，可得

$$\delta J = F\Big|_{x=x_2}\delta x_2 + \left[F_{y'}\delta y + F_{y''}\delta y' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\delta y\right]_{x=x_2}$$

$$+\left[F_{z'}\delta z + F_{z''}\delta z' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z''}\delta z\right]_{x=x_2}$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\left[\left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}\right)\delta y\right.$$

$$\left.+\left(F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{z''}\right)\delta z\right]\mathrm{d}x \qquad (2.97)$$

现在计算点$B(x_2,y_2,z_2)$处的 $\delta y,\delta y',\delta z,\delta z'$的值。由于 x_2可动，依上所述，有

$$\delta y\Big|_{x=x_2} = \delta y(x_2) - y'(x_2)\delta x_2$$

$$= \delta y_2 - y'\delta x_2$$

$$\delta y'\Big|_{x=x_2} = \delta y'(x_2) - y''(x_2)\delta x_2$$

$$= \delta y'_2 - y''\delta x_2 \qquad (2.98)$$

$$\delta z\Big|_{x=x_2} = \delta z(x_2) - z'(x_2)\delta x_2$$

$$= \delta z_2 - z'\delta x_2$$

$$\delta z'\Big|_{x=x_2} = \delta z'(x_2) - z''(x_2)\delta x_2$$

$$= \delta z'_2 - z''\delta x_2$$

将(2.98)式代入(2.97)式中，得

$$\delta J = \left[F - y'F_{y'} - y''F_{y''} + y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''}) - z'F_{z'}\right.$$

$$\left. - z''F_{z''} + z'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{z''})\right]_{x=x_2}\delta x_2$$

$$+\left[F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''})\right]_{x=x_2}\delta y_2$$

$$+\left[F_{z'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{z''})\right]_{x=x_2}\delta z_2$$

$$+F_{y''}\Big|_{x=x_2}\delta y_2' + F_{z''}\Big|_{x=x_2}\delta z_2'$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\Big[\Big(F_y-\frac{d}{dx}(F_{y'})+\frac{d^2}{dx^2}(F_{y''})\Big)\delta y$$

$$+\Big(F_z-\frac{d}{dx}(F_{z'})+\frac{d^2}{dx^2}(F_{z''})\Big)\delta z\Big]dx \tag{2.99}$$

1. 无关性

如果$\delta x_2, \delta y, \delta y_2, \delta y_2', \delta z, \delta z_2, \delta z_2'$是相互无关的，由$\delta J=0$，根据变分法基本引理得尤拉方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=0 \tag{2.100}$$

$$F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{z''}=0 \tag{2.101}$$

以及附加边界条件

$$F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{d}{dx}F_{y''}-z'F_{z'}-z''F_{z''}$$

$$+z'\frac{d}{dx}F_{z''}\Big|_{x=x_2}=0 \tag{2.102}$$

$$F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}\Big|_{x=x_2}=0 \tag{2.103}$$

$$F_{z'}-\frac{d}{dx}F_{z''}\Big|_{x=x_2}=0 \tag{2.104}$$

$$F_{y''}\Big|_{x=x_2}=0 \tag{2.105}$$

$$F_{z''}\Big|_{x=x_2}=0 \tag{2.106}$$

求解尤拉方程得到通解含有4个常数及待定的x_2坐标，可利用附加条件(2.102～2.106)式及固定点 A 的条件$y_1=y(x_1)$，$y_1'=y'(x_1)$，$z_1=z(x_1)$，$z_1'=z'(x_1)$来确定。

2. 相关性

若$\delta x_2, \delta y_2, \delta y_2', \delta z_2, \delta z_2'$是相关的，设

$$
\left.\begin{aligned}
y_2=\varphi_1(x_2), &\quad \delta y_2=\varphi_1'\delta x_2 \\
y_2'=\varphi_2(x_2), &\quad \delta y_2'=\varphi_2'\delta x_2 \\
z_2=\varphi_3(x_2), &\quad \delta z_2=\varphi_3'\delta x_2 \\
z_2'=\varphi_4(x_2), &\quad \delta z_2'=\varphi_4'\delta x_2
\end{aligned}\right\} \tag{2.107}
$$

将(2.107)式代入(2.99)式，由 $\delta J=0$，根据变分法基本引理，得尤拉方程(2.100)、(2.101)式及附加边界条件

$$
\begin{aligned}
&\left[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}-z'F_{z'}-z''F_{z''}\right. \\
&\quad +z'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z''}+\left(F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right)\varphi_1'+F_{y''}\varphi_2' \\
&\quad \left.+\left(F_{z'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z''}\right)\varphi_3'+F_{z''}\varphi_4'\right]_{x=x_2}=0
\end{aligned} \tag{2.108}
$$

求解尤拉方程所得的通解中含有4个积分常数及x_2的坐标，可利用(2.107)式、附加边界条件(2.108)式及固定点$A(x_1,y_1,z_1)$的条件$y_1=y(x_1),y_1'=y'(x_1),z_1=z(x_1),z_1'=z'(x_1)$来确定。

2.5.3 含多自变量型的泛函

这里，采用引进坐标变换的方法，把可动边界域化为与之对应的固定边界域表示。这样，求可动边界的变分问题就等价于求固定边界的变分问题了。

已知用参量α表示的泛函为

$$
\begin{aligned}
J(\alpha)=\iint\limits_{E(\alpha)} &F(\xi,\eta,u(\xi,\eta,\alpha),u_\xi(\xi,\eta,\alpha), \\
&u_\eta(\xi,\eta,\alpha))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta
\end{aligned} \tag{2.109}
$$

其中

$$
u_\xi=\frac{\partial u}{\partial \xi},\quad u_\eta=\frac{\partial u}{\partial \eta}
$$

1. 坐标变换

采用下面的坐标变换：

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x(x,y,\alpha) \\ \eta &= y(x,y,\alpha) \end{aligned}\right\} \tag{2.110}$$

对应坐标变换的变量函数为

$$u(\xi,\eta)=u(x,y,\alpha) \tag{2.111}$$

假定变换是一一对应，而且连续可微。若α为微小参量，即 $\alpha=0$时，则退化为恒等变换。完成上述变换时，把积分域 $S(\alpha)$变换成积分域 $S(x,y)$不仅一一对应，而且也是连续的，并具有连续的偏导数，此时设雅各比行列式$J_i\neq 0$。

为了计算方便，引进下面符号：

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} \\ \delta u &= \frac{\partial u(x,y,\alpha)}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} \\ \delta u_x &= \frac{\partial u_\xi(x,y,\alpha)}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} \\ \delta u_y &= \frac{\partial u_\eta(x,y,\alpha)}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} \end{aligned}\right\} \tag{2.112}$$

其中

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad u_y=\frac{\partial u}{\partial y}$$

变量函数u的变分 δu，由两部分组成，其中一部分为边界固定仅由参数α的改变而产生的u的变分，记为$\bar{\delta}u$；另一部分是由于坐标x与y的改变而产生u的变分，记为$\bar{\bar{\delta}}u$。故有

$$\left.\begin{aligned} \delta u &= \bar{\delta}u+\bar{\bar{\delta}}u=\bar{\delta}u+u_x\delta x+u_y\delta y \\ \delta u_x &= \bar{\delta}u_x+u_{xx}\delta x+u_{xy}\delta y \\ \delta u_y &= \bar{\delta}u_y+u_{yx}\delta x+u_{yy}\delta y \end{aligned}\right\} \tag{2.113}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\delta}u=\frac{\partial u(x,y,\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}\\&\bar{\bar{\delta}}u=\frac{\partial u}{\partial x}\delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\delta y\\&u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u_{xy}=\frac{\partial u}{\partial x\partial y},\quad u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{aligned}\right\}\tag{2.114}$$

2. 泛函变分的计算

将(2.110)式利用坐标变换，把可动积分域的泛函(2.109)式变为固定积分域的泛函，即为

$$J(\alpha)=\iint_S F[X,Y,u(X,Y,\alpha),u_x(X,Y,\alpha),$$

$$u_y(X,Y,\alpha)]|J|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.115}$$

此时雅各比行列式为

$$J=\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)} \tag{2.116}$$

但 $J\neq 0$。

泛函(2.115)式的一阶变分为

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial\alpha}J(\alpha)\Big|_{\alpha=0}=\iint_S\left(\frac{\partial F}{\partial\alpha}|J|+F\frac{\partial}{\partial\alpha}|J|\right)_{\alpha=0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.117}$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}=F_x\delta x+F_y\delta y+F_u\delta u+F_{u_x}\delta u_x+F_{u_y}\delta u_y \tag{2.118}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}|J|=\frac{\partial}{\partial\alpha}\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x}&\frac{\partial\eta}{\partial x}\\\frac{\partial\xi}{\partial y}&\frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}_{\alpha=0}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\left(1+\alpha\frac{\partial\delta x}{\partial x}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\left(1+\alpha\frac{\partial\delta y}{\partial y}\right)-\alpha^2\left(\frac{\partial\delta x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)\right]\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}=(\delta x)_x+(\delta y)_y \tag{2.119}$$

$$|J|_{\alpha=0}=1 \tag{2.120}$$

把(2.118～2.120)式代入(2.117)式，则有

$$\delta J=\iint_S [F_x\delta x+F_y\delta y+F_u\delta u+F_{u_x}\delta u_x+F_{u_y}\delta u_y$$
$$+F(\delta x)_x+F(\delta y)_y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.121}$$

利用(2.113)式和公式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{\partial u_y}{\partial x}\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{\partial u_y}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{2.122}$$

(2.121)式变为

$$\delta J=\iint_S [F_x\delta x+F_y\delta y+F_u(\bar{\delta}u+u_x\delta x+u_y\delta y)$$
$$+F_{u_x}(\bar{\delta}u_x+u_{xx}\delta x+u_{xy}\delta y)$$
$$+F_{u_y}(\bar{\delta}u_y+u_{yx}\delta x+u_{yy}\delta y)$$
$$+F(\delta x)_x+F(\delta y)_y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_S [F_u\bar{\delta}u+F_{u_x}\bar{\delta}u_x+F_{u_y}\bar{\delta}u_y+(F\delta x)_x$$
$$+(F\delta y)_y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.123}$$

已知

$$\frac{\partial F}{\partial u_x}\bar{\delta}u_x+\frac{\partial F}{\partial u_y}\bar{\delta}u_y=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\bar{\delta}u\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)\bar{\delta}u+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\bar{\delta}u\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\bar{\delta}u$$
$$=(F_{u_x}\bar{\delta}u)_{,x}+(F_{u_y}\bar{\delta}u)_{,y}-(F_{u_y})_{,x}\bar{\delta}u-(F_{u_y})_{,y}\bar{\delta}u \tag{2.124}$$

把(2.124)式代入(2.123)式，得

$$\delta J=\iint_S [(F_u-(F_{u_x})_{,x}-(F_{u_y})_{,y})\bar{\delta}u$$

$$+(F_{u_x}\bar{\delta}u)_{,x}+(F_{u_y}\bar{\delta}u)_{,y}+(F\delta x)_{,x}$$

$$+(F\delta y)_{,y}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.125}$$

根据格林公式上式可变为

$$\begin{aligned}\delta J=&\iint_S[F_u-(F_{u_x})_{,x}-(F_{u_y})_{,y}]\bar{\delta}u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\int_\Gamma\left(F_{u_x}\frac{\partial x}{\partial n}+F_{u_y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\bar{\delta}u\mathrm{d}\Gamma\\&+\int_\Gamma F\left(\delta x\frac{\partial x}{\partial n}+\delta y\frac{\partial y}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Gamma\\=&\iint_S[F_u-(F_{u_x})_{,x}-(F_{u_y})_{,y}]\bar{\delta}u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\int_\Gamma(F_{u_x}l_x+F_{u_y}l_y)\bar{\delta}u\mathrm{d}\Gamma\\&+\int_\Gamma F\delta n\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{2.126}$$

其中 δn 为边界 Γ 的外法线方向的改变量，$\cos(n,x)=l_x$；$\cos(n,y)=l_y$为边界Γ的外法线方向余弦。

在边界Γ上，若将

$$\bar{\delta}u=\delta u-u_x\delta x-u_y\delta y=\delta u-u_n\delta n$$

代入上式，于是可得

$$\begin{aligned}\delta J=&\iint_S[F_u-(F_{u_x})_{,x}-(F_{u_y})_{,y}]\bar{\delta}u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\int_\Gamma(F_{u_x}l_x+F_{u_y}l_y)\delta u\mathrm{d}\Gamma\\&+\int_\Gamma[F-(F_{u_x}l_x+F_{u_x}l_y)u_n]\delta n\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{2.127}$$

3. 无关性

若在边界Γ上δn与δu是相互无关的，由$\delta J=0$，根据变分法基本引理，可得

$$F_u-(F_{u_x})_{,x}-(F_{u_y})_{,y}=0 \qquad (S) \quad (2.128)$$

$$F_{u_x}l_x+F_{u_y}l_y=0 \qquad (\Gamma) \quad (2.129)$$

$$F-(F_{u_x}l_x-F_u l_{y_y})u_n=0 \qquad (\Gamma) \quad (2.130)$$

这便是泛函实现极值时应满足的尤拉方程和在可动边界上应满足的附加边界条件。

4. 相关性

若在边界Γ上δn与δu在边界上是相关的，令 $u=R$，故 $\delta u=R_n\delta n$，将此关系代入(2.127)式，由 $\delta J=0$，根据变分法基本引理，可得

$$F_u-(F_{u_x})_{,x}-(F_{u_y})_{,y}=0 \qquad (S) \quad (2.131)$$

$$F+(R_n-u_n)(F_{u_x}l_x+F_{u_y}l_y)=0 \quad (\Gamma) \quad (2.132)$$

这是由泛函(2.109)式实现极值的必要条件时，应满足的尤拉方程和可动边界上应满足的附加边界条件。由变分(2.126)式可知，J 的变分由两部分形成，一部分是区域固定，由 u的改变而产生的；另一部分是由于区域的变动而产生的。

2.5.4 间断性变量函数型泛函

在许多实际问题中，使泛函实现极值的变量函数，在某些线(或面)上是连续的，但其导数具有间断性。下面进行讨论。

1. 简单型泛函

已知泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x \quad (2.133)$$

在连接两边界点 $A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$之间，有一条间断线$y_0=\varphi(x)$，在间断线上变量函数 $y_0(x)$是连续的，但其

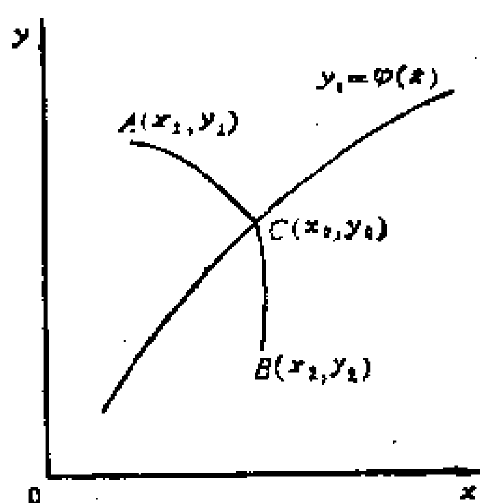


图2-4 简单型泛函

导数是间断的。间断线 $y_0=\varphi(x)$ 与 $y(x)$ 的交点 $C(x_0,y_0)$ 是沿间断线 $y_0=\varphi(x)$ 移动，如图2-4所示。

于是泛函(2.133)式可写为可动边界的泛函，即

$$J=\int_{x_1}^{x_0}F_1(x,y,y')\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{x_2}F_2(x,y,y')\mathrm{d}x \qquad (2.134)$$

假定 F_1、F_2 是三阶可微的，边界点 x_0 是沿曲线 $y_0=\varphi(x)$ 移动，$A(x_1,y_1)$ 与 $B(x_2,y_2)$ 为固定点。

如前所述，由泛函(2.134)式的一阶变分为零，及根据变分法基本引理，可得尤拉方程

$$\frac{\partial}{\partial y}(F_1)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial y'}F_1\right)=0,\quad x_1\leqslant x\leqslant x_0 \qquad (2.135)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(F_2)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial y'}F_2\right)=0,\quad x_0\leqslant x\leqslant x_2 \qquad (2.136)$$

及在 $y_0=\varphi(x)$ 线上的交界条件，即

$$\left[F_1+(\varphi'-y')\frac{\partial}{\partial y'}F_1\right]_{x=x_0-0}$$

$$=\left[F_2+(\varphi'-y')\frac{\partial}{\partial y'}F_2\right]_{x=x_0+0} \qquad (2.137)$$

符号 x_0-0 与 x_0+0 表示从 x_0 的两边趋近 x_0。

尤拉方程(2.135)、(2.136)式的通解为

$$y=y_1(x,c_1,c_2),\quad x_1\leqslant x\leqslant x_0$$

$$y=y_2(x,c_3,c_4),\quad x_0\leqslant x\leqslant x_2$$

这4个积分常数 c_1,c_2,c_3,c_4 及点 $c(x_0,y_0)$ 的坐标，由(1) 边值条件 $y_1=y(x_1),y_2=y(x_2)$；(2) 交界条件(2.137)式；(3) 间断线 $y_0=\varphi(x)$；(4) 连续性条件 $y_1(x,c_1,c_2)=y_2(x,c_3,c_4)$ 等条件来确定。

2. 复杂型泛函

已知泛函

$$J=\iint_S F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (2.138)$$

在定义域内有间断线 $\lambda_0(x=x_0,y=y_0)$。间断线 λ_0 把区域分为 S_1 和 S_2，在间断线上设 $u_0(x_0,y_0)=\varphi(x_0,y_0)$，故

$$\delta u_0=\delta\varphi=\varphi'\delta x=\varphi_n\delta n \tag{2.139}$$

于是泛函(2.138)式可写为

$$J=\iint_{S_1}F_1(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_2}F_2(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{2.140}$$

设 F_1、F_2 是三阶可微的，且间断线 λ_0 为可动边界。

泛函(2.140)式的一阶变分，为

$$\begin{aligned}\delta J=&\iint_{S_1}\left[\frac{\partial F_1}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_1}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial u_y}\right)\right]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\int_{\lambda-0}\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial u_x}\right)l_x+\left(\frac{\partial F_1}{\partial u_y}\right)l_y\right]\delta u\mathrm{d}\lambda\\&+\int_{\lambda-0}\left[F_1-\left(\frac{\partial F_1}{\partial u_x}l_x+\frac{\partial F_1}{\partial u_x}l_y\right)u_n\right]\delta n\mathrm{d}\lambda\\&+\iint_{S_2}\left[\frac{\partial F_2}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_2}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_2}{\partial u_y}\right)\right]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\int_{\lambda+0}\left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial u_x}\right)l_x+\left(\frac{\partial F_2}{\partial u_y}\right)l_y\right]\delta u\mathrm{d}\lambda\\&+\int_{\lambda+0}\left[F_1-\left(\frac{\partial F_2}{\partial u_x}l_x+\frac{\partial F_2}{\partial u_y}l_y\right)u_n\right]\delta n\mathrm{d}\lambda\end{aligned} \tag{2.141}$$

考虑到方程(2.139)式，由于 $\delta J=0$，根据变分法基本引理可得尤拉方程

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_1}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial u_y}\right)=0\quad(S_1) \tag{2.142}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_2}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_2}{\partial u_y}\right)=0\quad(S_2) \tag{2.143}$$

及交界条件

$$\left[F_1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\frac{\partial u}{\partial n}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial u_x}l_x+\frac{\partial F_1}{\partial u_y}l_y\right)\right]_{\lambda-0}$$

$$=\left[F_2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\frac{\partial u}{\partial n}\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial u_x}l_x+\frac{\partial F_2}{\partial u_y}l_y\right)\right]_{\lambda_0} \qquad (2.144)$$

这里n为间断线λ_0相对于区域S_1与S_2而言的外法线；$l_x=\cos(n,x)$与$l_y=\cos(n,y)$为方向余弦。由尤拉方程求得的极值曲线的积分常数和λ_0曲线的确定，可利用交界方程(2.144)式在间断线λ_0上的$u_0=\varphi(x_0,y_0)$和在区域$S=S_1+S_2$的边界Γ上的边界条件来确定。

§2.6 条件极值的变分问题

所谓条件极值问题，是指求解泛函极值时，泛函中的变量函数之间应满足的某些约束条件。也就是，在变量函数满足某些约束条件下，探讨泛函的极值。这些约束条件通常称为变分约束条件。它可分为有限型约束条件、微分型约束条件和积分型约束条件。

2.6.1 有限型约束条件

现在探讨变量函数$y_j(x)$在约束条件

$$\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0$$

下，使泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x$$

实现极值的问题。

解决条件极值问题最为方便的方法是拉格朗日乘子法。也就是，选一个新的泛函，使求原泛函的条件极值问题，化为与之等价的无条件极值问题。

定理Ⅰ：变量函数$y_1,y_2,\cdots,y_n$满足约束条件

$$\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0 \quad (i=1,2,\cdots,m;m<n) \qquad (2.145)$$

和边界条件

$$y_{j1}=y_j(x_1),\quad y_{j2}=y_j(x_2)\quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{2.146}$$

下，使泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x \tag{2.147}$$

实现极值时，则等价于变量函数 $y_j(x)$和适当选择的乘子 $\lambda_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$，使泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\overline{F}\mathrm{d}x \tag{2.148}$$

在其边界条件下，实现无条件极值。式中

$$\overline{F}=\left(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i\right) \tag{2.149}$$

使泛函J实现极值时，函数$y_j(x)$和$\lambda_i(x)$应满足尤拉方程

$$\frac{\partial\overline{F}}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial\overline{F}}{\partial y_j'}\right)=0 \tag{2.150}$$

或为

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j'}\right)=0$$

$$(j=1,2,\cdots,n) \tag{2.151}$$

$$\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0$$

$$(i=1,2,\cdots,m;m<n) \tag{2.152}$$

其中$\lambda_i(x)$称为拉氏乘子。

证明：假设约束方程为

$$\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0\quad (i=1,2,\cdots,m;m<n)$$

是独立的，即其m阶函数行列式中有一个不为零，如

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)}{D(y_1,y_2,\cdots,y_m)}\neq 0 \tag{2.153}$$

根据泛函实现极值的必要条件$\delta J=0$，则有

$$\int_{x_1}^{x_2}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial y_j}(F)\delta y_j+\frac{\partial}{\partial y_j'}(F)\delta y_j'\right]\mathrm{d}x=0$$

$$(j=1,2,\cdots,n) \tag{2.154}$$

利用分部积分法和在边界上$(\delta y_j)_{x=x_1}=(\delta y_j)_{x=x_2}=0$的关系，则得

$$\int_{x_1}^{x_2}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_j}\right)\right]\delta y_j\mathrm{d}x=0$$

$$(j=1,2,\cdots,n) \tag{2.155}$$

由于δy_j不是任意的函数，因为它们必须满足约束条件(2.145)式，因此不能应用变分法基本引理。

由(2.145)式，可得

$$\int_{x_1}^{x_2}\lambda_i(x)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}\delta y_j\mathrm{d}x=0 \tag{2.156}$$

把(2.155)和(2.156)两式相加，则得

$$\int_{x_1}^{x_2}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_j}\right)\right]\delta y_j\mathrm{d}x=0 \tag{2.157}$$

因为$\lambda_i(x)$是任意的待定函数，选取$\lambda_i(x)(j=1,2,\cdots,m)$可由下面$m$个方程决定，即

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_j}\right)=0$$

$$(j=1,2,\cdots,m) \tag{2.158}$$

由于(2.135)式成立，可由(2.158)式求得m个拉氏乘子。

这样，变分方程(2.157)式中，仅余下$(n-m)$项，即

$$\int_{x_1}^{x_2}\sum_{j=m+1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_j}\right)\right]\delta y_j dx=0 \tag{2.159}$$

式中的$\delta y_j(j=m+1,m+2,\cdots,n)$已是任意的函数，可以应用变分法基本引理求得

$$\sum_{j=m+1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_j}\right)\right)=0$$

$$(j=m+1,m+2,\cdots,n) \quad (2.160)$$

把方程(2.158)和(2.160)式相加，就得到泛函 J 实现条件极值时，变量函数 $y_j(x)$ 与 $\lambda_i(x)$ 应满足的尤拉方程和约束条件，即

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j'}\right)=0$$

$$(j=1,2,\cdots,n) \quad (2.161)$$

$$\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0$$

$$(i=1,2,\cdots,m;m<n) \quad (2.162)$$

这些方程正是泛函J实现无条件极值时，$y_j(x)$与$\lambda_i(x)$应满足的尤拉方程(2.151)和(2.152)式。定理证毕。

2.6.2 微分型约束条件

现在探讨变量函数y_j、y_j'在约束条件

$$\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')=0$$

$$(i=1,2,\cdots,m;m<n)$$

下，使泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x$$

实现极值的问题。这里的约束条件就是微分方程。

定理 Ⅱ：若变量函数$y_j(x)$与$y_j'(x)$满足约束条件

$$\varphi_i(x,y_1,y_2',\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')=0$$

$$(i=1,2,\cdots,m;m<n) \quad (2.163)$$

和边界条件

$$y_{j1}=y_j(x_1),\quad y_{j2}=y_j(x_2)\quad (j=1,2,\cdots,n) \quad (2.164)$$

使泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x \quad (2.165)$$

实现极值时，则等价于变量函数$y_j(x)$和适当选择的 $\lambda_i(x)$乘子，使泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\bar{F}\mathrm{d}x \tag{2.166}$$

在其边界条件下，实现无条件极值。式中，

$$\bar{F}=F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i \tag{2.167}$$

使泛函$\bar{J}$实现极值时，函数$y_j(x)$和$\lambda_i(x)$应满足的尤拉方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j'}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j'}\right)=0$$

$$(j=1,2,\cdots,n) \tag{2.168}$$

$$\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')=0$$

$$(i=1,2,\cdots,m;m<n) \tag{2.169}$$

证明可看参考文献[2～5]。

2.6.3 积分型约束条件

现在探讨变量函数$y_j(x)$、$y_j'(x)$在约束条件

$$\int_{x_1}^{x_2}\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x=l_i$$

$$(i=1,2,\cdots,m;m<n)$$

和边值条件

$$y_{j1}=y_j(x_1),\quad y_{j2}=y_j(x_2)\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

下，使泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x$$

实现极值的问题。

这里的约束条件为积分形式。解决这类约束条件的办法是把积分形式的约束条件化为微分形式的约束条件。

为此，令

$$G_i(x)=\int_{x_1}^{x}\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x$$

取$G_i(x_1)=0$，$G_i(x_2)=l_i$，对x求G_i的导数，得

$$G_i'=\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')$$

把积分约束条件化为微分约束条件，就可以在具有微分型约束条件下探讨泛函的极值问题。

定理Ⅱ：变量函数$y_j(x)$与$y_j'(x)$满足约束条件

$$\int_{x_1}^{x_2}\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x=l_i$$

$$(i=1,2,\cdots,m;m<n) \tag{2.170}$$

和边界条件

$$y_{j1}=y_j(x_1),\quad y_{j2}=y_j(x_2)\quad(j=1,2,\cdots,n) \tag{2.171}$$

使泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y_1',y_2',\cdots,y_n')\mathrm{d}x \tag{2.172}$$

实现极值时，则等价于变量函数$y_j(x)$和拉氏乘子$\lambda_i(x)$，使泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\left[F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)(\varphi_i-G_i')\right]\mathrm{d}x \tag{2.173}$$

在其边界条件(2.171)式下，实现无条件极值。

使泛函J实现极值时，变量函数$y_j(x)$与$\lambda_i(x)$应满足的尤拉方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j'}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}\right)=0$$

$$(j=1,2,\cdots,n) \tag{2.174}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lambda_i(x)=0\quad(i=1,2,3,\cdots,m) \tag{2.175}$$

$$\varphi_i-G_i'=0\quad(i=1,2,\cdots,m) \tag{2.176}$$

由(2.175)式可知λ_i为常数；其中(2.176)式就是约束条件(2.170)式。由尤拉方程求得的通解中有$c_1,c_2,\cdots,c_{2n}$个积分常数，拉氏乘子有$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$个常数乘子。它们可由$2n$个边界条件(2.171)式和$m$个积分型约束条件(2.170)式来确定，详细论证可阅参考文献[2～5]。

2.6.4 对偶原理

同一物理（或力学）问题，可用两个不同形式的变分问题来描述，其中一个变分问题中的变分约束条件（变分条件）为另一个变分问题中的变分条件（变分约束条件），其极值曲线应该是相同的。这两个不同形式的变分问题，在互逆变换下形成对称形式。这种对称形式称为对偶原理。

简单的对偶原理：

在积分型约束条件

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x,y,y')\mathrm{d}x=l \tag{2.177}$$

下，使泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{2.178}$$

实现极值问题的极值曲线，等价于在积分型约束条件

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x=\alpha \tag{2.179}$$

下，使泛函

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{2.180}$$

实现极值问题的极值曲线。

参考文献

1 柯朗 R，希伯尔特 D；钱敏，郭敦仁译．数学物理方法（I）．北京：科学出版社，1958

2 斯米尔诺夫 Б И．高等数学教程（第四卷第一分册）．北京：高等教育出版社，1958

3 钱伟长著．变分法及有限元（上册）．北京：科学出版社，1980

4 艾利斯哥尔兹 V 3 著．变分法．北京高等教育出版社，1958

5 拉甫伦捷夫 M A，刘斯铁尼克 Λ A．变分学教程．北京：高等教育出版社，1950
6 米赫林 C Γ．二次泛函的极小问题．北京：科学出版社，1964
7 迪沃 G，利翁斯 J L；王耀东译．力学和物理学中的变分不等式．北京：科学出版社，1987
8 胡祖炽．计算方法．北京：高等教育出版社，1961
9 米赫林 C Γ．数学物理中的直接法．北京：高等教育出版社，1957

第三章　古典变分原理

§3.1 概　述

3.1.1　变分问题与微分方程

就物理或力学而言，其变分问题与微分（尤拉）方程是等价的，可以把物理或力学中的变分问题化为微分方程进行求解；亦可把描述物理或力学的微分方程化为泛函的变分问题进行求解。虽然微分方程的描述形式具有普遍性，但转化为泛函的变分问题的描述还是有条件的。

物理或力学问题的微分方程的求解常常是困难的，但转化为泛函的变分问题进行近似求解则是很方便的，特别是近代由于计算技术的发展，形成了多种类型的卓有成效的计算方法。这些计算方法就是利用泛函的变分问题去近似求解物理或力学中的问题。这就是近代变分方法为什么会引起科学技术工作者重视的原因。科学家为此进行了大量地研究工作，促进了变分原理的发展，形成了现代变分原理，并为建立各种不同类型的离散方法提供了理论基础。

3.1.2　古典变分原理

所谓古典变分原理系指在固体力学的发展过程中，最早形成的具有变分约束条件的势能变分原理和余能变分原理。其变量函数是位移函数类和应力函数类，它们是在整个定义域内构造的且具有足够光滑性的函数类。

3.1.3 容许函数类

在势能变分原理的泛函中，容许函数在整个定义域内足够光滑，自然满足应变位移关系式，以及在位移边界上满足已知的位移边界条件。

在余能变分原理的泛函中，容许函数在整个定义域内满足平衡方程，以及在力的边界上满足已知的力的边界条件。固体力学的古典变分原理的详细论述请参阅文献[1～11]。

§3.2 弹性力学的古典变分原理

3.2.1 势能古典变分原理

1. 变分问题

变分约束条件为

(1) 应变位移(1.2)关系式；

(2) 已知位移边界条件(1.8)式。

在满足变分约束条件的容许函数中，使下面泛函(3.1)式实现驻值条件的ε_{ij}和u_i为弹性力学问题的真实解。

$$\Pi=\iiint_V[A(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_iu_i]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_ids \tag{3.1}$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(1.9)式。

这个原理的变分条件为应变表示的平衡方程及已知力的边界条件；它的一般约束条件为应力应变式(1.3)或(1.5)式。

证明： 泛函(3.1)式实现极值的必要条件为一阶变分为零。下面进行变分运算。

$$\delta\Pi=\iiint_V\left[\frac{\partial A(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}-\bar{F}_i\delta u_i\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i\delta u_i \mathrm{d}s=0 \tag{3.2}$$

利用应变位移关系式把$\delta\varepsilon_{ij}$用$\delta u_{i,j}$代之，再应用分部积分法和格林公式，方程(3.2)式变为

$$\delta\Pi=\iiint_V\left[-\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}-\bar{F}_i\right]\delta u_i \mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j-\bar{P}_i\right]\delta u_i \mathrm{d}s=0 \tag{3.3}$$

因在S_2上有$u_i=\bar{u}_i$，故$\delta u_i=\delta\bar{u}_i=0$，于是在边界$S=S_1+S_2$上，仅有在$S=S_1$边界上的积分项。

由变分法基本引理，可得

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+F_i=0 \qquad (V) \tag{3.4}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{3.5}$$

由上述可知，这个原理的变分约束条件、变分条件和一般约束条件为求解弹性力学问题应满足的全部微分方程(1.1～1.8)式，故泛函(3.1)式在驻值条件下的解为弹性力学问题的真实解。在求得应变函数后，可应用一般约束条件求应力函数，证毕。

2. 极值原理

现在证明这个原理亦是极值原理。

设ε_{ij}和u_i为真实解，ε^*_{ij}和u^*_i为容许解，并取

$$\varepsilon^*_{ij}=\varepsilon_{ij}+\delta\varepsilon_{ij},\quad u^*_i=u_i+\delta u_i \tag{3.6}$$

把(3.6)式代入(3.1)式，则有

$$\Pi(\varepsilon^*_{ij},u^*_i)=\iiint_V[A(\varepsilon_{ij}+\delta\varepsilon_{ij})-\bar{F}_i(u_i+\delta u_i)]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i(u_i+\delta u_i)\mathrm{d}s$$

$$=\Pi(\varepsilon_{ij},u_i)+\delta\Pi+\delta^2\Pi+R_1 \tag{3.7}$$

其中

$$\delta\Pi=\iiint\limits_V\left[\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}-\bar{F}_i\delta u_i\right]dv-\iint\limits_{S_1}\bar{P}_i\delta u_i ds \tag{3.8}$$

$$\delta^2\Pi=\frac{1}{2}\iiint\limits_V\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\delta\varepsilon_{ij}\,\delta\varepsilon_{kl}\,dv \tag{3.9}$$

R_1 为高阶微量项。

由上述分析可知，真实解使(3.8)式为零，即

$$\delta\Pi=0 \tag{3.10}$$

由于A是一个正定二次型，所以有

$$\delta^2\Pi\geqslant 0 \tag{3.11}$$

式中等号仅当$\varepsilon_{ij}=0$时成立，故有

$$\Pi^*(\varepsilon^*_{ij},u^*_i)\geqslant\Pi(\varepsilon_{ij},u_i) \tag{3.12}$$

所以势能古典变分原理为极值原理。证毕。

3.2.2 余能古典变分原理

变分约束条件为

(1) 平衡方程(1.1)式；

(2) 已知力的边界条件(1.7)式。

在满足变分约束条件的容许函数中，使下面泛函(3.13)式实现驻值条件的σ_{ij}和u_i为弹性力学问题的真实解。

$$\mathscr{L}=\iiint\limits_V B(\sigma_{ij})dv-\iint\limits_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j ds \tag{3.13}$$

其中$B(\sigma_{ij})$为(1.10)式的余能密度。

这个原理的变分条件为应力位移关系（或为应变位移关系）及已知位移边界条件；它的一般约束条件为应力应变关系式(1.4)式(或(1.6)式)。

证明：泛函(3.13)式实现极值的必要条件为一阶变分为零。

现进行变分运算。

$$\delta\mathscr{L}=\iiint\limits_V \frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}\,\mathrm{d}v-\iint\limits_{S_2}\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}l_j\,\mathrm{d}s=0 \qquad (3.14)$$

因为存在变分约束条件

$$\sigma_{ij,j}+F_i=0$$

故$\delta\sigma_{ij}$不是任意的，由变分约束条件可得

$$\iiint\limits_V \lambda_i\,\delta\sigma_{ij,j}\,\mathrm{d}v=0 \qquad (3.15)$$

将(3.14)与(3.15)式相加，则得

$$\delta\mathscr{L}=\iiint\limits_V\left[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}+\lambda_i\delta\sigma_{ij,j}\right]\mathrm{d}v-\iint\limits_{S_2}\bar{u}_i\,\delta\sigma_{ij}l_j\,\mathrm{d}s=0 \qquad (3.16)$$

利用分部积分法和格林定理，由上式得

$$\delta\mathscr{L}=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\lambda_{i,j}\right)\delta\sigma_{ij}\,\mathrm{d}v$$

$$-\iint\limits_{S_2}(\bar{u}_i-\lambda_i)\delta\sigma_{ij}l_j\,\mathrm{d}s=0 \qquad (3.17)$$

根据变分法基本引理，由(3.17)式得

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\lambda_{i,j}=0 \qquad (V) \quad (3.18)$$

$$\bar{u}_i-\lambda_i=0 \qquad (S_2) \quad (3.19)$$

因在已知力的边界S_1上，有$\delta\sigma_{ij}l_j=\delta\bar{P}_i=0$，于是在边界$S=S_1+S_2$上，仅余下边界$S_2$上的积分项。

在边界上已知$\lambda_i=\bar{u}_i$，因λ_i是由区域内化到边界上的物理量，因此在区域内$\lambda_i=\bar{u}_i$的条件成立，故(3.18)式可写为

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (3.20)$$

应用一般约束条件(1.6)式和方程(3.20)式可写为

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (3.21)$$

由上述可知，这个原理的变分约束条件、变分条件和一般约束条件为求解弹性力学问题应满足的全部微分方程(1.1～1.8)式，所以泛函(3.13)式在驻值条件下的解为弹性力学问题的真实解。在求得应力函数后，可应用一般约束条件求应变函数。证毕。

现在证明这个原理亦是极值原理。

设σ_{ij}和u_i为真实解，σ^*_{ij}和u^*_i为容许解，并取

$$\sigma^*_{ij}=\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij} \tag{3.22}$$

把(3.22)式代入(3.13)式，则有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\sigma^*_{ij})&=\iiint_V B(\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij})\mathrm{d}v-\iint_{S_2}\bar{u}_i(\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij})l_j\mathrm{d}s\\&=\mathscr{L}(\sigma_{ij})+\delta\mathscr{L}(\sigma_{ij})+\delta^2\mathscr{L}(\sigma_{ij})+R_2\end{aligned} \tag{3.23}$$

其中

$$\delta\mathscr{L}=\iiint_V\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v-\iint_{S_2}\bar{u}_i\,\delta\sigma_{ij}l_j\,\mathrm{d}s \tag{3.24}$$

$$\delta^2\mathscr{L}=\iiint_V\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}\,\partial\sigma_{kl}}\delta\sigma_{ij}\,\delta\sigma_{kl}\,\mathrm{d}v \tag{3.25}$$

R_2为高阶微量项。

由上述分析可知，真实解使(3.24)式为零，即

$$\delta\mathscr{L}=0 \tag{3.26}$$

就线弹性力学而言，有

$$\delta^2\mathscr{L}\geqslant 0 \tag{3.27}$$

仅当应力分量为零时等式才成立，故有

$$\mathscr{L}^*(\sigma^*_{ij})\geqslant\mathscr{L}(\sigma_{ij}) \tag{3.28}$$

所以余能古典变分原理是极值原理。证毕。

§3.3　有限变形弹性力学的古典变分原理

3.3.1　势能古典变分原理

变分约束条件为

（1）应变位移非线性关系式(1.15)；

（2）已知的位移边界条件(1.23)式。

在满足变分约束条件的容许函数中，使下面泛函(3.29)式实现驻值条件的e_{ij}和u_i为有限变形弹性力学问题的真实解。

$$\Pi=\iiint_V[A(e_{ij})-\bar{F}_iu_i]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_ids \tag{3.29}$$

其中$A(e_{ij})$为(1.26)式的势能密度。

这个原理的变分条件为应变和位移表示的平衡方程及已知力的边界条件；它的一般约束条件为应力应变(1.18)式。

证明：泛函(3.29)式的驻值条件为

$$\delta\Pi=\iiint_V\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta e_{ij}-\bar{F}_i\delta u_i\right]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_i\delta u_ids=0 \tag{3.30}$$

利用应变位移非线性关系式(1.15)式，上式中的第一项变为

$$\iiint_V\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta e_{ij}dv$$

$$=\frac{1}{2}\iiint_V\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i}+u_{k,i}\,\delta u_{k,j}+u_{k,j}\,\delta u_{k,i})dv$$

$$=\iiint_V\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta u_{k,j}dv$$

再利用分部积分法和格林公式，上式变为

$$\iiint_V\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta u_{k,j}dv$$

$$=\iiint_V-\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}\delta u_kdv$$

$$+\iint_{S_1}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\delta u_kds \tag{3.31}$$

因在S_2边界上，已知$u_i=\bar{u}_i$，故$\delta\bar{u}_i=0$，所以在边界S上仅余下在边界$S=S_1$上的积分项。

把(3.31)式代入(3.30)式，得

$$\delta\Pi=\iiint_V -\left\{\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k\right\}\delta u_k \mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_1}\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\right]\delta u_k \mathrm{d}s=0 \quad (3.32)$$

根据变分法基本引理，得

$$\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0 \quad (V) \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0 \quad (S_1) \quad (3.34)$$

利用一般约束条件(1.18)式，方程(3.33)、(3.34)式变为

$$[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})]_{,j}+\bar{F}_k=0 \quad (V) \quad (3.35)$$

$$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0 \quad (S_1) \quad (3.36)$$

由上述分析可知，这个原理的变分约束条件、变分条件和一般约束条件为求解有限变形弹性力学问题应满足的全部微分方程(1.14~1.23)式，故泛函(3.29)式在驻值条件下的解为有限变形弹性力学问题的真实解。证毕。在一般情况下这也是个极值原理。

3.3.2 余能古典变分原理[3~4]

变分约束条件为

(1) 有限变形的平衡方程(1.14)式；

(2) 已知有限变形的力的边界条件(1.22)式。

在满足变分约束条件的容许函数中，使下面泛函(3.37)式实现驻值条件的σ_{ij}和u_i为有限变形弹性力学问题的真实解。

$$\mathscr{L}=\iiint_V\left[B(\sigma_{ij})+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}\right]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_2}\bar{u}_k\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\mathrm{d}s \quad (3.37)$$

其中$B(\sigma_{ij})$为(1.29)式。

这个原理的变分条件为应力位移关系式（或为应变位移关系式）及位移边界条件；它的一般约束条件为应力应变关系式(1.21)式。

证明：在驻值条件下，泛函(3.37)式有

$$\delta\mathscr{L}=\iiint_V\left[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\delta\sigma_{ij}\right.$$

$$\left.+u_{k,i}\sigma_{ij}\delta u_{k,j}\right]dv-\iint_{S_2}\bar{u}_k\delta\left[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]l_j ds$$

$$=0 \tag{3.38}$$

因为应力函数有变分约束条件平衡方程，故有

$$\iiint_V\lambda_k\delta\left[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}dv$$

$$=\iiint_V\left[-\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta\sigma_{ij}-\lambda_{k,i}\sigma_{ij}\delta u_{k,j}\right]dv$$

$$+\iint_S\lambda_k\delta\left[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]l_j ds$$

$$=\iiint_V-\frac{1}{2}(\lambda_{i,j}+\lambda_{j,i}+\lambda_{k,i}u_{k,j})\delta\sigma_{ij}-\frac{1}{2}\lambda_{k,i}u_{k,j}\delta\sigma_{ij}$$

$$-\sigma_{ij}\lambda_{k,i}\delta u_{k,j}]dv+\iint_{S_2}\lambda_k\delta\left[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]l_j ds=0 \tag{3.39}$$

将(3.38)与(3.39)式相加，则有

$$\delta\mathscr{L}=\iiint_V\left[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(\lambda_{i,j}+\lambda_{j,i}+\lambda_{k,i}u_{k,j})\right]\delta\sigma_{ij}dv$$

$$+\iiint_V\left[\frac{1}{2}(u_{k,i}-\lambda_{k,i})u_{k,j}\delta\sigma_{ij}\right.$$

$$\left.+(u_{k,i}-\lambda_{k,i})\sigma_{ij}\delta u_{k,j}\right]dv$$

$$+\iint_{S_2}\left[(\lambda_k-\bar{u}_k)\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))l_j\right]ds=0 \quad (3.40)$$

利用变分法基本引理，由(3.40)式得

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(\lambda_{i,j}+\lambda_{j,i}+\lambda_{k,i}u_{k,j})=0 \quad (V) \quad (3.41)$$

$$\lambda_{k,i}-u_{k,i}=0 \quad (V) \quad (3.42)$$

$$\lambda_k-\bar{u}_k=0 \quad (S_2) \quad (3.43)$$

于是求得$\lambda_k=u_k$，将λ_k用u_k代入(3.42)、(3.43)式，可得

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0 \quad (V) \quad (3.44)$$

$$u_k-\bar{u}_k=0 \quad (S_2) \quad (3.45)$$

(3.44)式可化为应变位移关系式。因为应用一般约束关系式(1.21)式，有

$$e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0 \quad (V) \quad (3.46)$$

根据上述可知，这个原理的变分约束条件、变分条件和一般约束条件为有限变形弹性力学问题的全部微分方程和边界条件，故泛函(3.37)式实现驻值问题的解为有限变形弹性力学问题的真实解。证毕。

§3.4 塑性形变理论的古典变分原理

塑性形变理论的变分原理受简单加载过程和屈服条件的约束。

3.4.1 应变硬化材料的势能古典变分原理

变分约束条件为

(1) 应变位移关系式(1.32)式；

(2) 已知位移边界条件(1.40)式。

在满足变分约束条件的容许函数中，使下面泛函(3.47)式实现驻值条件的ε_{ij}和u_i为正割模量材料塑性问题的真实解。

$$\Pi=\iiint_V[A(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_iu_i]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_ids \qquad (3.47)$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(1.50)式的势能密度。

这个原理的变分条件为平衡方程和已知的力的边界条件；它的一般约束条件为应力应变关系式(1.34)式。

3.4.2 应变硬化材料的余能古典变分原理

变分约束条件为

(1) 平衡方程(1.31)式；

(2) 已知力的边界条件(1.39)式。

在满足变分约束条件的容许函数中，使泛函(3.48)式实现驻值条件的σ_{ij}和u_i为正割模量材料塑性问题的真实解。

$$\mathscr{L}=\iiint_V B(\sigma_{ij})dv-\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_jds \qquad (3.48)$$

其中$B(\sigma_{ij})$为(1.51)式的余能密度。

这个原理的变分条件为应力位移关系式（或为应变位移关系式)及位移边界条件；它的一般约束条件为应力应变关系式(1.37)式。

3.4.3 理想刚塑性材料势能古典变分原理

变分约束条件为

(1) 应变位移关系式(1.32)式；

(2) 已知位移边界条件(1.40)式；

(3) 不可压缩条件 $\varepsilon_{ii}=0$。

在满足变分约束条件的容许函数中，使泛函(3.49)式实现驻值条件的ε_{ij}和u_i为理想刚塑性材料问题的真实解。

$$\Pi=\iiint_V \sqrt{2}\,k\sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}\,dv-\iint_{S_1} P_i u_i ds \qquad (3.49)$$

这个原理的变分条件为平衡方程和已知力的边界条件；它的一般约束条件为应力应变(1.60)式。这个原理叫Markoff原理。

3.4.4 理想刚塑性材料余能古典变分原理

变分约束条件为

(1) 平衡方程(1.31)式；

(2) 已知力的边界条件(1.39)式。

在满足变分约束条件和应力函数满足屈服条件 $\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2$ 的容许函数中，使泛函(3.50)式取极大值时，为理想刚塑性材料问题的真实解。

$$\mathscr{L}=\iint_{S_2} \sigma_{ij} l_j \bar{u}_i\, ds \qquad (3.50)$$

这个原理叫Sadowsky 原理。

关于塑性形变理论的古典变分原理的证明，请阅参考文献[3、6、9、10]。

§3.5 塑性流动理论的古典变分原理

3.5.1 应变硬化材料塑性势能古典变分原理

变分约束条件为

(1) 应变位移增量关系式(1.64)式；

(2) 已知位移边界条件(1.70)式。

在满足变分约束条件的容许函数中，使泛函(3.51)式实现极小值的 $d\varepsilon_{ij}$ 和 du_i 为应变硬化材料塑性问题的真实解。

$$\Pi=\iiint_V [A(d\varepsilon_{ij})]dv-\iint_{S_1} d\bar{P}_i\, du_i\, ds \qquad (3.51)$$

其中$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$为(1.75)式的势能密度。

这个原理的变分条件为平衡方程和已知力的边界条件；一般约束条件为应力应变增量关系式(1.65)式（或(1.66)式)。

3.5.2 应变硬化材料塑性余能古典变分原理

变分约束条件为

(1) 平衡方程(1.63)式；

(2) 已知力的边界条件(1.69)式。

在满足变分约束条件的容许函数中，使泛函(3.52)式实现极小值的$\mathrm{d}\sigma_{ij}$和$\mathrm{d}u_i$为应变硬化材料塑性问题的真实解。

$$\mathscr{L}=\iiint_V B(\mathrm{d}\sigma_{ij})\mathrm{d}v-\iint_{S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\,\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j\,\mathrm{d}s \qquad (3.52)$$

其中$B(\mathrm{d}\sigma_{ij})$为(1.76)式的余能密度。

这个原理的变分条件为应力位移关系式（或为应变位移关系式)；它的一般约束条件为应力应变增量关系式（1.67）式（或(1.68)式)。

3.5.3 理想塑性材料的势能古典变分原理

变分约束条件为

(1) 应变位移关系(1.64)式；

(2) 已知位移边界条件(1.70)式。

在满足变分约束条件的容许函数中，使泛函(3.53)式实现极小值的$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$和$\mathrm{d}u_i$为理想塑性材料问题的真实解。

$$\Pi=\iiint_V A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\mathrm{d}\bar{P}_i\,\mathrm{d}u_i\,\mathrm{d}s \qquad (3.53)$$

其中$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$为(1.80)式的势能密度。

这个原理的变分条件为平衡方程和已知力的边界条件；它的一般约束条件为应力应变增量关系(1.79)式。

3.5.4 理想塑性材料的余能古典变分原理

变分约束条件为

(1) 平衡方程(1.63)式;

(2) 已知力的边界条件(1.65)式。

在满足变分约束条件的容许函数中，使泛函(3.54)式实现极小值的$d\sigma_{ij}$和du_i为理想塑性材料问题的真实解。

$$\mathscr{L}=\iiint\limits_V B(d\sigma_{ij})dv-\iint\limits_{S_2} d\bar{u}_i\, d\sigma_{ij}l_j\, ds \qquad (3.54)$$

其中$B(d\sigma_{ij})$为(1.81)式的余能密度。

这个原理的变分条件为应力位移关系式（或为应变位移关系式）;一般约束条件为应力应变增量关系式(1.78)式。

3.5.5 刚塑性材料的势能古典变分原理

变分约束条件为

(1) 应变位移关系式(1.84)式;

(2) 已知位移边界条件(1.89)式。

在满足变分约束条件的容许函数中，使泛函(3.55)式实现极小值的$\dot{\varepsilon}_{ij}$和$\dot{u}_i$为刚塑性材料问题的真实解。

$$\Pi=\iiint\limits_V A(\dot{\varepsilon}_{ij})dv-\iint\limits_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i ds \qquad (3.55)$$

其中$A(\dot{\varepsilon}_{ij})$为(1.91)式的势能密度。

这个原理的变分条件为平衡方程和已知力的边界条件，它的一般约束条件为应力应变式(1.87)式。

3.5.6 刚塑性材料的余能古典变分原理

变分约束条件为

(1) 平衡方程(1.82)式;

(2) 已知力的边界条件(1.88)式。

在满足变分约束条件和应力函数满足屈服条件 $\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2$ 的容许函数中，使泛函(3.56)式实现最大值的σ_{ij}和$\dot{u}_i$为刚塑性材料问题的真实解。

$$\mathscr{L}=\iint_{S_2}\sigma_{ij}l_j\bar{\dot{u}}_i\mathrm{d}s \tag{3.56}$$

这个原理叫Hill最大塑性功原理。

上述原理的证明从略，请参阅文献[3～6,9,10]。

§3.6 蠕变理论的古典变分原理

3.6.1 稳定蠕变流动理论的势能古典变分原理

变分约束条件为

(1) 应变位移速度关系式(1.93)式；

(2) 已知位移速度边界条件(1.99)式。

在满足变分约束条件及体积改变率为零的容许函数中，使泛函(3.57)式实现驻值条件的$\dot{\varepsilon}_{ij}$和$\dot{u}_i$为稳定蠕变理论问题的真实解。

$$\Pi=\iiint_V[A(\dot{\varepsilon}_{ij})-\bar{F}_i\dot{u}_i]\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i\,\mathrm{d}s \tag{3.57}$$

其中$A(\dot{\varepsilon}_{ij})$为(1.101)式的势能密度。

这个原理的变分条件为平衡方程和已知力的边界条件，它的一般约束条件为应力应变速度关系式(1.94)式（或(1.95)式)。

证明：在驻值条件下，泛函(3.57)式为

$$\delta\Pi=\iiint_V\left[\left(\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}\right)\delta\dot{\varepsilon}_{ij}-\bar{F}_i\delta\dot{u}_i\right]\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\bar{P}_i\delta\dot{u}_i\mathrm{d}s=0 \tag{3.58}$$

利用一般约束条件(1.95)式及 $\dot{\varepsilon}_{ii}=0$，上式变为

$$\delta\Pi=\iiint_V[(\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma_{cp})\delta\dot{\varepsilon}_{ij}-\bar{F}_i\delta\dot{u}_i]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_i\delta\dot{u}_i ds$$

$$=\iiint_V[\sigma_{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij}-\bar{F}_i\delta\dot{u}_i]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_i\delta\dot{u}_i ds=0 \tag{3.59}$$

利用应变位移速度关系式(1.93)式、分部积分法和格林公式，上式变为

$$\delta\Pi=\iiint_V-(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta\dot{u}_i dv+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta\dot{u}_i ds$$

$$=0 \tag{3.60}$$

其中边界$S=S_1+S_2$，在S_2边界上有$\delta\dot{u}_i=\delta\dot{\bar{u}}_i=0$，因此仅余下在$S_1$边界上的积分项。

根据变分法基本引理，得

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \tag{3.61}$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{3.62}$$

这个变分原理的变分约束条件、变分条件和一般约束条件为稳定蠕变理论问题的全部微分方程及边界条件，故使泛函(3.57)式实现驻值条件的解为稳定蠕变理论问题的真实解。证毕。

由于泛函(3.57)式的二阶变分

$$\delta^2\Pi\geqslant0 \tag{3.63}$$

成立，故此原理亦是极值原理[11]。

3.6.2 稳定蠕变流动理论的余能古典变分原理

变分约束条件为

(1) 平衡方程(1.92)式；

(2) 已知力的边界条件(1.98)式。

在满足变分约束条件的容许函数中，使泛函(3.64)式实现驻值条件的σ_{ij}和$\dot{u}_i$为稳定蠕变理论问题的真实解。

$$\mathscr{L}=\iiint_V B(\sigma_{ij})\mathrm{d}v-\iint_{S_2}\sigma_{ij}l_j\bar{\dot{u}}_i\mathrm{d}s \tag{3.64}$$

其中$B(\sigma_{ij})$为(1.102)式的余能密度。

这个原理的变分条件为应力位移速度关系式（或为应变位移速度关系式）和已知位移边界条件；它的一般约束条件为应力应变速度关系式(1.96)式（或(1.97)式)。

证明： 在驻值条件下，泛函(3.64)式为

$$\delta\mathscr{L}=\iiint_V\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_i\delta\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s=0 \tag{3.65}$$

由于应力函数具有变分约束条件(1.92)式，故有

$$\begin{aligned}&\iiint_V\lambda_i\delta\sigma_{ij,j}\mathrm{d}v\\&=\iiint_V(\lambda_i\delta\sigma_{ij})_{,j}\mathrm{d}v-\iiint_V\lambda_{i,j}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v\\&=\iint_S(\lambda_i\delta\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s-\iiint_V\lambda_{i,j}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v\\&=\iint_{S_2}\lambda_i\delta\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s-\iiint_V\lambda_{i,j}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v=0\end{aligned} \tag{3.66}$$

因在S_1上有$\delta\sigma_{ij}l_j=\delta\bar{P}_i=0$，故在边界$S=S_1+S_2$上，仅余下$S_2$边界上的积分项。

将(3.65)与(3.66)式相加，则有

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L}=&\iiint_V\left(\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}-\lambda_{i,j}\right)\delta\sigma_{ij}\,\mathrm{d}v\\&+\iint_{S_2}(\lambda_i-\bar{\dot{u}}_i)\,\delta\sigma_{ij}l_j\,\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{3.67}$$

根据变分法基本引理，得

$$\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}-\lambda_{i,j}=0 \qquad (V) \tag{3.68}$$

$$\lambda_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (3.69)$$

由于λ_i是由区域内部化到边界上的，故λ_i的物理性质不变，λ_i在边界上为位移速度，在区域内部亦应为位移速度，所以(3.68)式变为

$$\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (3.70)$$

利用一般约束条件(1.97)式，上式变为

$$\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (3.71)$$

方程(3.69)式可写为

$$\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i=0 \qquad (S_2) \quad (3.72)$$

由上述可知，这个原理的变分约束条件、变分条件和一般约束条件为稳定蠕变理论问题的全部微分方程和边界条件，故使泛函(3.64)式实现驻值条件的解为稳定蠕变理论问题的真实解。证毕。

由于泛函(3.64)式的二阶变分

$$\delta^2\mathscr{L}\geqslant 0$$

成立，故这个原理亦为极值原理[11]。

§3.7 有限变形蠕变理论的古典变分原理

3.7.1 势能古典变分原理

变分约束条件为

(1) 应变位移速度关系式(1.105)式；

(2) 已知位移速度边界条件(1.111)式。

在满足变分约束条件及体积改变率为零的容许函数中，使泛函(3.73)式实现驻值条件的$\dot{\varepsilon}_{ij}$和$\dot{u}_i$为有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。

$$\Pi=\iiint_V\left(A(\dot{e}_{ij})-\bar{F}_i\dot{u}_i\right)\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i\,\mathrm{d}s \tag{3.73}$$

其中$A(\dot{e}_{ij})$为(1.113)式的势能率密度。

这个原理的变分条件为平衡方程(1.104)式和已知力的边界条件(1.110)式；它的一般约束条件为应力应变(1.106)式（或为(1.107)式）。

证明： 在驻值条件下，泛函(3.73)式为

$$\delta\Pi=\iiint_V\left(\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial\dot{e}_{ij}}\delta\dot{e}_{ij}-\bar{F}_i\delta\dot{u}_i\right)\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\bar{P}_i\delta\dot{u}_i\,\mathrm{d}s=0 \tag{3.74}$$

利用一般约束条件(1.107)式及$\dot{e}_{ii}=0$，上式变为

$$\delta\Pi=\iiint_V(\sigma_{ij}\delta\dot{e}_{ij}-\bar{F}_i\delta\dot{u}_i)\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\bar{P}_i\delta\dot{u}_i\,\mathrm{d}s=0 \tag{3.75}$$

利用应变位移速度(1.105)式，分部积分法及格林公式，并且根

实解。证毕。

3.7.2 余能古典变分原理

变分约束条件为

(1) 平衡方程(1.104)式；

(2) 已知力的边界条件(1.110)式。

在满足变分约束条件的容许函数中，使泛函(3.79)式实现驻值条件的σ_{ij}和$\dot{u}_i$为有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。

$$\mathscr{L}=\iiint_V B(\sigma_{ij})\mathrm{d}v-\iint_{S_2}\dot{u}_k\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\mathrm{d}s \qquad (3.79)$$

其中$B(\sigma_{ij})$为(1.114)式的余能率密度。

这个原理的变分条件为应力位移速度关系式（或为应变位移速度关系式)；它的一般约束条件为(1.108)式(或(1.109)式)。

证明：在驻值条件下，泛函(3.79)式变为

$$\delta\mathscr{L}=\iiint_V\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v-\iint_{S_2}\dot{u}_k\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))l_j\mathrm{d}s$$
$$=0 \qquad (3.80)$$

由于平衡方程为其变分约束条件，并假定$\delta u_{k,j}=0$，故有

$$\iiint_V\lambda_k\delta[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})]_{,j}\,\mathrm{d}v$$
$$=\iiint_V[\lambda_k\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))]_{,j}\,\mathrm{d}v$$
$$-\iiint_V\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta\sigma_{ij}\,\mathrm{d}v=0 \qquad (3.81)$$

将(3.80)与(3.81)式相加，利用格林公式，得

$$\delta\mathscr{L}=\iiint_V\left[\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}-\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]\delta\sigma_{ij}\,\mathrm{d}v$$
$$+\iint_{S_2}(\lambda_k-\dot{u}_k)\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\mathrm{d}s=0 \quad (3.82)$$

因在边界S_1上有

$$\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)-\delta\bar{P}_k=0 \tag{3.83}$$

因此仅余下边界S_2上的积分项。

利用变分法基本引理，得

$$\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}-\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})=0 \quad (V) \tag{3.84}$$

$$\lambda_k-\bar{\dot{u}}_k=0 \quad (S_2) \tag{3.85}$$

由此可知，λ_k是边界上的位移速度物理量。因为λ_k是从区域内部化到边界上去的，因其物理性质不变，所以在区域内部亦为位移速度物理量，故(3.84)式变为

$$\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}-u_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})=0 \quad (V) \tag{3.86}$$

利用一般约束条件(1.109)式，上式可变为

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i}+u_{k,i}\dot{u}_{k,j}+u_{k,j}\dot{u}_{k,i})=0 \quad (V) \tag{3.87}$$

方程(3.85)式亦写为

$$\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k=0 \quad (S_2) \tag{3.88}$$

由上述可知，这个原理的变分约束条件、变分条件和一般约束条件为有限变形稳定蠕变理论问题的全部微分方程和边界条件，故泛函(3.79)式实现驻值条件的解为有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。证毕。

参 考 文 献

1 钱伟长，叶开沅．弹性力学．北京：科学出版社，1980

2 冯康，石钟慈著．弹性结构的数学理论．北京：科学出版社，1981

3 钱伟长著．变分法及有限元．北京：科学出版社，1980

4 郭仲衡著．非线性弹性理论．北京：科学出版社，1980

5 希尔 R；王仁等译．数学塑性理论．北京：科学出版社，1966

6 王仁等著．塑性力学基础．北京：科学出版社，1982

7 胡海昌著．弹性力学的变分原理及其应用．北京：科学出版社，1981

8 鹫津久一郎著．弹性和塑性力学中的变分法．北京：科学出版社，1984

9 鹫津久一郎著；刘亦珩译．塑性论．上海：上海科学技术出版社，1961

10 卡恰诺夫 L M；周承倜译．塑性理论基础．北京：人民教育出版社，1959

11 Качанов V M. ТеорчЯ Полzучести. Физmатгиz, 1960

第四章　广义变分原理

§4.1　概　述

4.1.1　广义变分原理

广义变分原理相对于古典变分原理而言，系指应用拉氏乘子法把具有变分约束条件的古典变分原理，化为无变分约束条件的变分原理（或化为具有部分约束条件的变分原理）。广义变分原理有两个特点，其一是具有部分变分约束条件（或完全无变分约束条件）；其二是待解函数定义域是在整个积分域上定义的，具有充分的光滑性。

4.1.2　广义泛函的构造

在参考文献〔1〕中提出用拉氏乘子法建立广义变分原理的广义泛函的方法，这样就使构造广义泛函的方法建立在严格的数学方法的基础上，使深入分析广义变分原理及促使它们进一步发展建立了理论基础。

固体力学系统方面的广义变分原理是工程结构的近似计算与数值计算的理论基础，所以引起了广大科学工作者的兴趣，促进了广义变分原理的迅速发展，参考文献〔2～5〕进行了系统的论述。

本章基于下述观点建立了三类独立变量函数及其它一系列广义变分原理：用变分问题来描述固体力学范畴内的问题，用拉氏乘子法建立的各类广义变分原理，实质上是在势能密度与余能密度的基础上，各种变分约束条件、一般约束条件和变分条件之间的匹配问题[6]。

4.1.3 势能与余能密度的表示形式

基于古典变分原理中的势能密度与余能密度的数学形式，利用（线性）拉氏乘子法建立广义变分原理时，不能把应力应变（应力应变速度）关系式转化为变分条件。因为在古典变分原理中的势能密度与余能密度的数学形式，是通过应力应变（应力应变速度）关系式进行变量代换，消去了某一类（应力或应变）变量函数而形成的，应力应变(应力应变速度)关系式是古典变分原理的一般约束条件，所以用(线性)拉氏乘子法是不能使一般约束条件——应力应变(应力应变速度)关系式转化为变分条件的。

为了建立真正的三类变量函数的广义变分原理，必须突破传统的势能密度与余能密度的数学形式，使应力应变（应力应变速度）关系式成为变分原理的变分约束条件；然后在新形式的势能密度与余能密度的基础上，利用（线性）拉氏乘子法建立真正的三类变量函数的广义泛函及其广义变分原理[6]。

4.1.4 规一化问题

由于历史原因，把势能与余能的古典变分原理称为标准型变分原理。基于三类变量函数的广义变分原理，当把变分条件还原为变分约束条件时，通过变量函数的代换，三类变量函数的广义变分原理可退化为一系列其它类型的广义变分原理，最后可得到标准型变分原理，这个过程叫规一化方法。这就是一般原理的哲学观点的内涵。应该看到，根据哲学观点，最广泛的一般原理中必然含有旧有的原理，并且当条件变化时，可由一般原理导出新型原理。

4.1.5 拉氏乘子

在建立广义变分原理时，正确的识别拉氏乘子是很重要的，

这里需要注意以下几点：

其一是确定拉氏乘子时不要导入变分约束关系，从而使广义变分原理具有变分约束条件。例如，求得拉氏乘子为

$$a_{ij}=\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})$$

时，不要采用

$$a_{ij}=\sigma_{ij}$$

关系。也就是说，确定拉氏乘子时用到了应力应变关系式，从而使应力应变关系式成为变分原理的变分约束条件。

其二是不要采用先验性结果来代替拉氏乘子，而要根据变分问题的实际变分运算来确定拉氏乘子。例如，当平衡方程为变分约束条件时，在引用时不要采用

$$\iiint_V u_i\delta\sigma_{ij,j}\,dv=0$$

关系。也就是，不要采用先验性结果，令拉氏乘子$\lambda_i=u_i$代之，而应采用

$$\iiint\lambda_i\delta\sigma_{ij,j}\,dv=0$$

关系，拉氏乘子λ_i由变分问题的变分运算确定。

其三是在由势能密度建立广义泛函时，应采用应力应变关系式

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0$$

也就是说，要用应变函数表示应力函数，同时在确定乘子过程中要遵守这个原则。

在由余能密度建立广义泛函时，应采用应力应变关系式

$$\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$$

也就是说，要用应力函数表示应变函数，同时在确定乘子过程中要遵守这个原则。

综上所述，可知拉氏乘子是唯一的，不会导入变分约束条件

（或消去变分条件），就能形成基于势能密度与余能密度两大类型的各类广义变分原理。

§4.2 弹性力学的广义变分原理

4.2.1 势能密度与余能密度的数学形式

为了建立三类变量函数的广义泛函及其广义变分原理，采用下面新型势能密度与余能密度的数学形式：

1. 势能密度

在应力应变(1.3)式为变分约束条件时，势能密度(1.9)式可表示为

$$A(\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2}a_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kl}=A(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}\quad(4.1)$$

2. 余能密度

在应力应变(1.4)式和应变位移(1.2)式为变分约束条件时，余能密度(1.10)式可表示为

$$B(\sigma_{ij})=\frac{1}{2}\,b_{ijkl}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl}=B(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}$$

$$=B(\sigma_{ij},u_{i,j})=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\,u_{i,j}\quad(4.2)$$

3. 平衡方程的形式

在建立三类变量函数的广义泛函及其广义变分原理时，若用平衡方程作为变分约束条件时，应用应变函数表示为

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0\quad(4.3)$$

这是因为余能古典变分原理为势能古典变分原理的对偶原理，在势能原理中的变分条件（平衡方程）是用应变函数表示的，因此在由余能古典变分原理的泛函建立广义原理的泛函时，变分约束条件(平衡方程)应复原用应变函数表示，这也是由于匹配关系所

要求的。

4.2.2 三类变量函数的势能广义变分原理

1. 建立三类变量函数的广义泛函

在应变位移(1.2)式、应力应变(1.3)式和已知位移边界条件(1.8)式为变分约束条件时，势能古典变分原理的泛函(3.1)式可表示为

$$\Pi=\iiint_V\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\bar{F}_iu_i\right)dv-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_i ds \tag{4.4}$$

基于(4.4)式，利用拉氏乘子法建立广义变分原理的泛函，于是有

$$\begin{aligned}G_{ea}=&\iiint_V\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\bar{F}_iu_i\right)+a_{ij}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right.\\&\left.+\beta_{ij}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\right]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_i ds\\&+\iint_{S_2}\lambda_i(u_i-\bar{u}_i)ds\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中$a_{ij}=a_{ji}$；$\beta_{ij}=\beta_{ji}$；λ_i为拉氏乘子。

令σ_{ij}，ε_{ij}，u_i，a_{ij}，β_{ij}，λ_i均为独立变量函数，利用驻值条件

$$\delta G_{ea}=0 \tag{4.6}$$

确定拉氏乘子，则有

$$\begin{aligned}\delta G_{ea}=&\iiint_V\left[\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta a_{ij}\right.\\&+(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\delta\beta_{ij}+(\sigma_{ij,j}-\bar{F}_i)\delta u_i\\&+\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+a_{ij}-a_{ijkl}\beta_{kl}\right)\delta\varepsilon_{ij}\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}+\beta_{ij}\right)\delta\sigma_{ij}\Big]dv-\iint_{S_1}(\alpha_{ij}l_j+\bar{P}_i)\delta u_i ds$$

$$+\iint_{S_2}[(u_i-\bar{u}_i)\delta\lambda_i+(\lambda_i-\alpha_{ij}l_j)\delta u_i]ds=0 \qquad (4.7)$$

根据变分法基本引理，由(4.7)式可得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V) \qquad (4.8)$$

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0 \qquad (V) \qquad (4.9)$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}+\beta_{ij}=0 \qquad (V) \qquad (4.10)$$

$$\alpha_{ij,j}-\bar{F}_i=0$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\alpha_{ij}-a_{ijkl}\beta_{kl}=0 \qquad (V) \qquad (4.11)$$

$$\alpha_{ij}l_j+\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \qquad (4.12)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \qquad (4.13)$$

$$\alpha_{ij}l_j=\lambda_i \qquad (S_2) \qquad (4.14)$$

于是得

$$\beta_{ij}=-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij} \qquad (4.15)$$

$$\alpha_{ij}=-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl}) \qquad (4.16)$$

$$\lambda_i=-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl}) \qquad (4.17)$$

方程(4.8～4.17)式包括了弹性力学问题应满足的全部方程、边界条件及全部拉氏乘子。将拉氏乘子代入(4.5)式，(4.5)式可变为

$$G_{\varepsilon\sigma-\mathrm{I}}=\iiint_V\Big[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\bar{F}_iu_i\right)-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})$$

$$-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\Big]dv$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i u_i \mathrm{d}s-\iint_{S_2}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}s$$

(4.18)

对(4.18)式进行化简，可得

$$G_{ea-2}=\iiint_V\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}-\bar{F}_i u_i-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i u_i \mathrm{d}s-\iint_{S_2}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}s$$

(4.19)

由此可得

$$G_{ea-3}=\iiint_V\left[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_i u_i\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i u_i \mathrm{d}s-\iint_{S_2}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}s$$

(4.20)

泛函(4.18～4.20)式是具有三类独立变量函数的广义泛函，基于它们可以建立没有任何变分约束条件的三类独立变量函数的广义变分原理。弹性力学的全部四类方程（平衡方程、应力应变关系式、应变位移关系式、边界条件）均为其变分条件。

2. 三类变量函数的势能广义变分原理3-1

在 u_i, ε_{ij}, σ_{ij} 为独立变量函数时，使泛函(4.18)式（或(4.19)式，或(4.20)式）实现驻值条件的u_i，ε_{ij}，σ_{ij}为弹性力学问题的真实解。

这个原理的变分条件是弹性力学的四类方程，即平衡方程(1.1)式、应变位移(1.2)式、应力应变(1.3)式及边界条件(1.7)、

(1.8)式。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.20)式得

$$
\begin{aligned}
\delta G_{ea-3}=\iiint_V\Big\{&-\frac{1}{2}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\delta\sigma_{ij}\\
&-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}u_{k,l})\delta\varepsilon_{ij}\\
&-\Big[\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i\Big]\delta u_i\Big\}dv\\
&-\iint_{S_1}\Big[\bar{P}_i-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\Big]\delta u_i ds\\
&-\iint_{S_2}\Big[(u_i-\bar{u}_i)\delta\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j\Big]ds=0
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

根据变分法基本引理，得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V) \qquad (4.22)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \qquad (4.23)$$

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}u_{k,l}=0 \qquad (V) \qquad (4.24)$$

$$\bar{P}_i-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j=0 \qquad (S_1) \qquad (4.25)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \qquad (4.26)$$

这些尤拉方程正是弹性力学问题的四类方程，所以使泛函(4.18)式(或(4.19)式，或(4.20)式)在驻值条件下的解为弹性力学问题的真实解。证毕。

4.2.3 二类变量函数的势能广义变分原理

现在基于泛函(4.18～4.20)式，利用规一化方法，把变分条件转化为变分约束条件（或为一般约束条件）就可得到一系列已

知的变分原理，及新型变分原理。

1．满足应力应变关系式

设$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0$，并且用$\varepsilon_{ij}$代替全部的$\sigma_{ij}$，则泛函(4.18)、(4.19)式(或(4.20)式)退化为

$$G_{\varepsilon a-4}=\iiint\limits_V\left[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right.$$
$$\left.-\bar{F}_iu_i\right]dv-\iint\limits_{S_1}\bar{P}_iu_i ds-\iint\limits_{S_2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j(u_i-\bar{u}_i)ds$$
$$(4.27)$$

广义变分原理2-1：

在u_i和ε_{ij}为独立变量函数时，使泛函(4.27)式实现驻值条件的u_i和ε_{ij}为弹性力学问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应变位移关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件；没有变分约束条件；它的一般约束条件为应力应变(1.3)式。

证明：在驻值条件下，泛函(4.27)式为

$$\delta G_{\varepsilon a-4}=\iiint\limits_V\left\{-\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\right.$$
$$\left.-[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i]\delta u_i\right\}dv$$
$$-\iint\limits_{S_1}(\bar{P}_i-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\delta u_i ds$$
$$-\iint\limits_{S_2}(u_i-\bar{u}_i)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)ds=0 \qquad (4.28)$$

根据变分法基本引理，得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V) \qquad (4.29)$$

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \qquad (4.30)$$

$$\bar{P}_i-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j=0 \qquad (S_1) \qquad (4.31)$$

$$u_i - \bar{u}_i = 0 \qquad (S_2) \quad (4.32)$$

由上述可知，这个原理的变分条件和一般约束条件，为求解弹性力学问题应满足的四类方程，故泛函(4.27)式在驻值条件下的解为弹性力学问题的真实解。证毕。

又设$\sigma_{ij} - a_{ijkl}\varepsilon_{kl} = 0$，并用$\sigma_{ij}$局部的代替$\varepsilon_{ij}$，则由泛函(4.20)式得到

$$G_{ea-5} = \iiint_V \left[\frac{1}{2} a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i} \right) - \bar{F}_i u_i \right] dv - \iint_{S_1} \bar{P}_i u_i ds - \iint_{S_2} \sigma_{ij} l_j (u_i - \bar{u}_i) ds \quad (4.33)$$

这是具有二类独立变量函数的广义泛函，由它形成的广义变分原理是二类独立变量函数的变分原理。这个原理的变分条件为平衡方程、应变位移关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件；它的变分约束条件为应力应变关系式(1.3)式。这是因为在局部采用了用σ_{ij}代替ε_{ij}的原因。很显然，这就是著名的胡-鹫原理的泛函[7]。

2. 满足应变位移关系式

若$\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i} = 0$，不作变量代换，于是由泛函(4.20)式得到

$$G_{ea-6} = \iiint_V \left(\frac{1}{2} a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \bar{F}_i u_i \right) dv - \iint_{S_1} \bar{P}_i u_i ds - \iint_{S_2} \frac{1}{2} (\sigma_{ij} + a_{ijkl}\varepsilon_{kl}) l_j (u_i - \bar{u}_i) ds \quad (4.34)$$

广义变分原理2-2：

当应变位移(1.2)式为变分约束条件时，使泛函(4.34)式实现驻值条件的$u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$为弹性力学问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力应变关系式、已知力

的边界条件和已知位移边界条件。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.34)式，得

$$\delta G_{\varepsilon\sigma-6}=\iiint_V(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\delta\varepsilon_{ij}-\bar{F}_i\delta u_i)dv-\iint_{S_1}\bar{P}_i\delta u_i ds$$

$$-\iint_{S_2}\Big[(u_i-\bar{u}_i)\delta\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j$$

$$+\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\delta u_i\Big]ds=0 \tag{4.35}$$

由于具有变分约束条件

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$$

因此ε_{ij}和u_i的变分不是任意的。取拉氏乘子 $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$，由变分约束条件，可得

$$\iiint_V\lambda_{ij}\delta(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})dv$$

$$=\iiint_V[\lambda_{ij}\delta\varepsilon_{ij}+\lambda_{ij,j}\delta u_{i,j}]dv-\iint_{S=S_1+S_2}\lambda_{ij}l_j\delta u_i ds=0 \tag{4.36}$$

将(4.35)式与(4.36)式相加，可得

$$\delta G_{\varepsilon\sigma-6}=\iiint_V[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}+\lambda_{ij})\delta\varepsilon_{ij}$$

$$+(\lambda_{ij,j}-F_i)\delta u_i]dv-\iint_{S_1}(\lambda_{ij}l_j+\bar{P}_i)\delta u_j ds$$

$$-\iint_{S_2}\Big\{(u_i-\bar{u}_i)\delta\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j$$

$$+\Big[\lambda_{ij}l_j+\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j\Big]\delta u_i\Big\}ds=0 \tag{4.37}$$

根据变分法基本引理，可得

$$a_{ijkl}\varepsilon_{kl}+\lambda_{ij}=0 \qquad (V) \qquad (4.38)$$

$$\lambda_{ij,j}-\bar{F}_i=0 \qquad (V) \qquad (4.39)$$

$$\lambda_{ij}l_i+\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \qquad (4.40)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \qquad (4.41)$$

$$\lambda_{ij}=-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl}) \qquad (S_2) \qquad (4.42)$$

由于 λ_{ij} 是由区域内化到边界上去的，因物理性质具有不变性，所以在域内(4.42)式亦成立。将λ_{ij}之值代入(4.38～4.40)式，可得

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0 \qquad (V) \qquad (4.43)$$

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \qquad (4.44)$$

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \qquad (4.45)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \qquad (4.46)$$

由上述可知，这个原理的变分条件(4.43～4.46)式为应力应变关系式、平衡方程式、已知力的边界条件及已知位移边界条件；它的变分约束条件为应变位移关系式。可见，待解函数满足应满足的全部弹性力学问题的方程。证毕。

3．满足平衡方程

若$\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0$，则由泛函(4.20)式可得

$$G_{ea-7}=\iiint_V\left(-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\right)dv$$

$$-\iint_{S_1}\left[\bar{P}_i-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\right]u_i ds$$

$$+\iint_{S_2}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j(\bar{u}_i)ds \qquad (4.47)$$

广义变分原理2-3：

当平衡方程$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0$为变分约束条件时，使泛函(4.47)式实现驻值条件的u_i，ε_{ij}，σ_{ij}为弹性力学问题的真实解。

这个原理的变分条件为应力应变关系式、应变位移关系式、已知力的边界条件及已知位移边界条件。

证明： 在驻值条件下，由(4.47)式得

$$
\begin{aligned}
\delta G_{\varepsilon\sigma-7}=&\iiint_V\left(-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}\right)dv\\
&-\iint_{S_1}\left\{\left[\bar{P}_i-\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]\delta u_i\right.\\
&\left.-u_i\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right\}ds\\
&+\iint_{S_2}\bar{u}_i\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j ds=0 \qquad (4.48)
\end{aligned}
$$

变分约束条件为

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0$$

因此σ_{ij},ε_{ij}的变分不是任意的。取拉氏乘子λ_i，由变分约束条件可得

$$
\begin{aligned}
&\iiint_V\lambda_i\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)_{,j}dv\\
=&\iiint_V-\lambda_{i,j}\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)dv\\
&+\iint_{S=S_1+S_2}\lambda_i\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j ds=0 \qquad (4.49)
\end{aligned}
$$

将(4.48)式与(4.49)式相加，则得

$$
\begin{aligned}
\delta G_{\varepsilon a-\gamma}=&\iiint_V\Big[-\frac{1}{2}(\varepsilon_{ij}+\lambda_{i,j})\delta\sigma_{ij}\\
&-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\lambda_{k,l})\delta\varepsilon_{ij}\Big]dv\\
&-\iint_{S_1}\Big[\Big(\bar{P}_i-\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j\Big)\delta u_i\\
&-(\lambda_i+u_i)\delta\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j\Big]ds\\
&+\iint_{S_2}(\lambda_i+u_i)\delta\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j ds=0
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

根据变分法基本引理，由(4.50)式得

$$\varepsilon_{ij}+\frac{1}{2}\lambda_{i,j}+\frac{1}{2}\lambda_{j,i}=0 \qquad (V) \tag{4.51}$$

$$\sigma_{ij}+a_{ijkl}\lambda_{k,l}=0 \qquad (V) \tag{4.52}$$

$$\bar{P}_i-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j=0 \qquad (S_1) \tag{4.53}$$

$$\lambda_i+u_i=0,\ \lambda_i=-u_i \qquad (S_1) \tag{4.54}$$

$$\lambda_i+\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \tag{4.55}$$

由(4.54)式可知λ_i在区域内部亦$\lambda_i=-u_i$,将此关系代入(4.51),(4.52)及(4.55)式，可得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V) \tag{4.56}$$

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}u_{k,l}=0 \qquad (V) \tag{4.57}$$

由于(4.56)式成立，所以(4.57)式可写为

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0 \qquad (V) \tag{4.58}$$

$$\bar{P}_i-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j=0 \qquad (S_1) \tag{4.59}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \tag{4.60}$$

由上述可知，这个原理的变分条件为应变位移关系式、应力应变关系式、已知力的边界条件及已知位移边界条件；它的变分约束条件为平衡方程。证毕。

4.2.4 标准型势能变分原理

基于泛函(4.18)式(或(4.19)，或(4.20)式)，利用规一化方法，逐步将变分条件应力应变关系、应变位移关系及已知位移边界条件转化为变分约束条件和一般约束条件（应力应变关系式），则得到标准型势能变分原理，也就是势能古典变分原理。

1. 满足应力应变关系式

设$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0$，并用$\varepsilon_{ij}$代替全部$\sigma_{ij}$，则泛函(4.18)式(或(4.19)式，或(4.20)式)，退化为(4.27)式型的广义泛函，即把应力应变关系式转化为一般约束条件。

2. 满足应变位移关系式

设$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$，但不做变量代换，泛函(4.27)式退化为

$$G_{\varepsilon a-s}=\iiint\limits_{V}\left(\frac{1}{2}a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,\varepsilon_{kl}-\overline{F}_{i}u_{i}\right)\mathrm{d}v-\iint\limits_{S_1}\overline{P}_{i}u_{i}\,\mathrm{d}s-\iint\limits_{S_2}a_{ijkl}\,l_{j}(u_{i}-\overline{u}_{i})\mathrm{d}s \tag{4.61}$$

这是具有一个独立变量函数的泛函，由它形成的变分原理具有变分约束条件（应变位移关系)，变分条件为平衡方程、已知力的边界条件及已知位移边界条件；它的一般约束条件为应力应变关系式。

3. 满足位移边界条件

若$u_i-\overline{u}_i=0$在S_2上成立，泛函(4.61)式就退化为势能古典变分原理的泛函

$$\Pi=\iiint\limits_V\left(\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_iu_i\right)dv-\iint\limits_{S_1}\bar{P}_iu_i ds \tag{4.62}$$

4.2.5 三类变量函数的余能广义变分原理

1. 建立三类变量函数的广义泛函

在应变位移(1.2)式、应力应变(1.4)式平衡方程(4.3)式和已知力的边界条件为变分约束条件下，余能古典变分原理的泛函(3.13)式可表示为

$$\mathscr{L}=\iiint\limits_V\left(-\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}dv\right)-\iint\limits_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j ds \tag{4.63}$$

基于(4.63)式，利用拉氏乘子法建立广义变分原理的广义泛函，于是有

$$G_{cb}=\iiint\limits_V\left\{-\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}+a_{ij}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right.$$
$$\left.+\beta_{ij}(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})+\lambda_i[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i]\right\}dv$$
$$+\iint\limits_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\mu_i ds+\iint\limits_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j ds \tag{4.64}$$

其中$a_{ij}=a_{ji}$；$\beta_{ij}=\beta_{ji}$；λ_i和μ_i为拉氏乘子。

令σ_{ij}，ε_{ij}，u_i，a_{ij}，β_{ij}，λ_i，μ_i均为独立变量函数，利用驻值条件

$$\delta G_{cb}=0 \tag{4.65}$$

来确定拉氏乘子，则有

$$\delta G_{cb}=\iiint\limits_V\left\{\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta a_{ij}\right.$$
$$+(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})\delta\beta_{ij}+[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i]\delta\lambda_i$$
$$+\left(-\frac{1}{2}u_{i,j}-b_{ijkl}\beta_{kl}\right)\delta\sigma_{ij}+\left(-\frac{1}{2}\sigma_{ij}-a_{ij}\right)\delta u_{i,j}$$

$$+(a_{ij}+\beta_{ij}-a_{ijkl}\lambda_{k,l})\delta\varepsilon_{ij}\Big\}dv$$

$$+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta\mu_i ds+\iint_{S_2}[\mu_i\delta\sigma_{ij}l_j+\lambda_i\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j]ds$$

$$+\iint_{S_2}[\bar{u}_i\,\delta\sigma_{ij}l_j+\dot{\lambda}_i\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j]ds=0 \qquad (4.66)$$

根据变分法基本引理，由(4.66)式得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.67)$$

$$\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0 \qquad (V) \quad (4.68)$$

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \quad (4.69)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}\right)+b_{ijkl}\beta_{kl}=0 \quad (V) \quad (4.70)$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}+a_{ij}=0 \qquad (V) \quad (4.71)$$

$$a_{ij}+\beta_{ij}-a_{ijkl}\lambda_{k,l}=0 \qquad (V) \quad (4.72)$$

由(4.71)式得

$$a_{ij}=-\frac{1}{2}\sigma_{ij} \qquad (4.73)$$

由(4.67)、(4.68)和(4.70)式得到

$$\beta_{ij}=-\frac{1}{2}\sigma_{ij} \qquad (4.74)$$

由(4.67～4.68)、(4.72～4.74)式得

$$\begin{aligned}\lambda_{k,l}&=-\varepsilon_{kl}=-u_{k,l}\\ \lambda_k&=-u_k\end{aligned} \qquad (4.75)$$

由(4.68)式得到

$$a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j=a_{ijkl}b_{ijmn}\sigma_{mn}l_j=\sigma_{ij}l_j \qquad (4.76)$$

由(4.66)、(4.76)式得到

$$\mu_i=-\lambda_i=u_i \qquad (S_1) \quad (4.77)$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (4.78)$$

$$\lambda_i+\bar{u}_i=u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.79)$$

方程(4.67～4.79)式包括了弹性力学问题应满足的全部方程、边界条件及全部拉氏乘子。将拉氏乘子代入(4.64)式，则有

$$G_{eb-1}=\iiint_V\left\{-\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})-u_i[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i]\right\}dv$$

$$+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i ds+\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j ds \qquad (4.80)$$

对(4.80)式进行化简，可得

$$G_{eb-2}=\iiint_V\left\{\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-u_i[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i]\right\}dv$$

$$+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i ds+\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j ds \qquad (4.81)$$

亦可化简为

$$G_{eb-3}=\iiint_V\left\{-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})\right.$$

$$\left.-u_i[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i]\right\}dv$$

$$+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i ds+\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j ds \qquad (4.82)$$

泛函(4.80～4.82)式是基于余能密度建立的具有三类独立变量函数的广义泛函，由它们形成的广义变分原理是没有任何变分约束条件的三类独立变量函数的广义变分原理，弹性力学的四类方程为其变分条件。

2. 三类变量函数的余能广义变分原理3-2

在u_i, ε_{ij},σ_{ij}为独立变量函数时，使泛函(4.80)式(或(4.81)

式)，或(4.82)式)，实现驻值条件的u_i，ε_{ij}，σ_{ij}为弹性力学问题的真实解。

这个原理的变分条件为弹性力学的四类方程，即平衡方程(4.3)式、应变位移关系(1.2)式、应力应变关系(1.4)式、边界条件(1.7)、(1.8)式。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.81)式，可得

$$
\begin{aligned}
\delta G_{eb-2}=&\iiint_V\Big\{-(\sigma_{ij}-a_{ijkl}u_{k,l})\delta\varepsilon_{ij}+(b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij})\delta\sigma_{ij}\\
&-[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i]\delta u_i\Big\}dv+\iint_{S_1}\Big\{(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i\\
&+[u_i\delta\sigma_{ij}l_j-u_i\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j]\Big\}ds\\
&+\iint_{S_2}[\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}l_j-u_i\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j]ds=0 \qquad (4.83)
\end{aligned}
$$

根据变分法基本引理，得

$$\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0 \qquad (V) \qquad (4.84)$$

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}u_{k,l}=0 \qquad (V) \qquad (4.85)$$

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \qquad (4.86)$$

再考虑到(4.84)式，得

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \qquad (4.87)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \qquad (4.88)$$

这些尤拉方程正是弹性力学问题的四类方程，所以使泛函(4.80～4.82)式实现驻值条件下的解是弹性力学问题的真实解。证毕。

4.2.6 二类变量函数的余能广义变分原理

基于泛函(4.80)式(或(4.81)式，或(4.82)式)，利用规一化方法，把变分条件转化为变分约束条件（或为一般约束条件）则

可得到已知的变分原理和新型变分原理的广义泛函。

1. 满足应力应变关系式

设$\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$，并用$\sigma_{ij}$代替全部$\varepsilon_{ij}$，则泛函(4.80)式(或(4.81)式，或(4.82)式)，退化为

$$G_{\varepsilon b-4}=\iiint_V\left[-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-u_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\right]dv+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i ds+\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j ds \tag{4.89}$$

广义变分原理2-4：

在σ_{ij}和u_i为独立变量函数时，使泛函(4.89)式实现驻值条件的σ_{ij}和u_i为弹性力学问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力位移关系式、已知力的边界条件及已知位移边界条件；它的一般约束条件为应力应变关系式(1.4)式。这正是Hellinger-Reissner's原理。

又若$\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$，则有

$$\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

于是方程(4.89)式可化为

$$G_{\varepsilon b-5}=\iiint_V\left[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-u_i(\sigma_{ij,j}+F_i)\right]dv+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i ds+\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j ds \tag{4.90}$$

这正是参考文献[7]中提出的广义余能原理的泛函。由它形成的广义变分原理具有(1.4)式的变分约束条件。

2. 满足应变位移关系式

若 $\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$，并用$u_{i,j}$代替$\varepsilon_{ij}$，则由泛函(4.80)式，可得

$$G_{eb-6}=\iiint_V\Big\{\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}u_{i,j}$$

$$-u_i\big[(a_{ijkl}e_{kl}(\underset{\cdots}{u_i}))_{,j}+\bar{F}_i\big]\Big\}\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}s+\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{4.91}$$

广义变分原理2-5：

在u_i和σ_{ij}为独立变量函数时，使泛函(4.91)式实现驻值条件的u_i和σ_{ij}为弹性力学问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力位移关系式（或为应力应变关系式，因为通过应变位移关系式可化应力位移关系式为应力应变关系式)、已知力的边界条件及已知位移边界条件；它的一般约束条件为应变位移关系式。这个原理与Hellinger-Reissner's 原理不同之处在于一般约束条件和平衡方程的表示形式不同。这个原理的平衡方程是用位移函数表示的平衡方程，而在Hellinger-Reis-sner's 原理中的平衡方程是用应力函数表示的形式。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.91)式，可得

$$\delta G_{eb-6}=\iiint_V\{(b_{ijkl}\sigma_{kl}-u_{i,j})\delta\sigma_{ij}$$

$$-[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\underset{\cdots}{u_i}))_{,j}+\bar{F}_i]\delta u_i\}\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i\mathrm{d}s+\iint_{S_2}(\bar{u}_i-u_i)\delta\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s=0$$

$$\tag{4.92}$$

根据变分法基本引理，得

$$b_{ijkl}\sigma_{kl}-u_{i,j}=0 \qquad (V) \tag{4.93}$$

$$a_{ijkl}e_{kl}(\underset{\cdots}{u_i})+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \tag{4.94}$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{4.95}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \qquad (4.96)$$

利用一般约束条件（应变位移关系式），可用ε_{ij}表示$u_{i,j}$，则(4.93)式化为

$$b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij}=0 \qquad (V)$$

由上述可知，这个原理的变分条件与一般约束条件正是弹性力学问题的四类基本方程，故泛函(4.91)式实现驻值条件的解为弹性力学问题的真实解。证毕。

又若 $\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$，用$\varepsilon_{ij}$代替 $u_{i,j}$，但u_i并未消去，于是由(4.80)式得

$$G_{eb-7}=\iiint_V\Big\{\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$$
$$-u_i[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+F_i]\Big\}dv$$
$$-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_i ds-\iint_{S_2}(u_i-\bar{u}_i)\sigma_{ij}l_j ds \qquad (4.97)$$

广义变分原理2-6：

当应变位移(1.2)式为变分约束条件时，使泛函(4.97)式实现驻值条件的u_i，ε_{ij}，σ_{ij}为弹性力学问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力应变关系式、已知力的边界条件及位移边界条件。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.97)式，得到

$$\delta G_{eb-7}=\iiint_V\{(b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij})\delta\sigma_{ij}-[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+F_i]\delta u_i$$
$$+(a_{ijkl}u_{k,l}-\sigma_{ij})\delta\varepsilon_{ij}\}dV-\iint_{S_1}\bar{P}_i\delta u_i ds$$
$$-\iint_{S_2}[(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j+\sigma_{ij}l_j\delta u_i]ds=0 \qquad (4.98)$$

由于ε_{ij}和$u_{i,j}$具有变分约束条件

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$$

所以

$$\iiint_V \lambda_{ij}(\delta\varepsilon_{ij}-\delta u_{i,j})\mathrm{d}v=0 \quad (\lambda_{ij}=\lambda_{ji}) \tag{4.99}$$

将(4.98)与(4.99)式相加，则得

$$\begin{aligned}\delta G_{eb-T}=&\iiint_V\{(b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij})\delta\sigma_{ij}\\&-(\sigma_{ij}+\lambda_{ij}-a_{ijkl}u_{k,l})\delta\varepsilon_{ij}\\&-[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}-\lambda_{ij})_{,j}+\bar{F}_i]\delta u_i\}\mathrm{d}v\\&-\iint_{S_1}[\bar{P}_i-(c_{ijkl}\varepsilon_{kl}-\lambda_{ij})l_j]\delta u_i\mathrm{d}s\\&-\iint_{S_2}\{(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j+[\sigma_{ij}l_j-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\\&-\lambda_{ij})l_j]\delta u_i\}\mathrm{d}s=0\end{aligned} \tag{4.100}$$

根据变分法基本引理，由(4.100)式可得

$$b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij}=0 \qquad (V) \tag{4.101}$$

$$\lambda_{ij}=a_{ijkl}u_{k,l}-\sigma_{ij} \qquad (V) \tag{4.102}$$

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \tag{4.103}$$

$$\bar{P}_i-\sigma_{ij}l_j=0 \qquad (S_1) \tag{4.104}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \tag{4.105}$$

由上述可知，这个原理的变分条件和变分约束条件，为弹性力学问题的四类方程，故使泛函(4.97)式实现驻值条件的解为弹性力学问题的真实解。证毕。

3. 满足平衡方程

若$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0$，则由泛函(4.80)式，得到

$$G_{eb-8}=\iiint_V\left(\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\right)dv$$

$$+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)u_i ds+\iint_{S_2}\overline{u}_i\sigma_{ij}l_j ds \tag{4.106}$$

广义变分原理2-7：

当平衡方程(4.3)式为变分约束条件时，使泛函(4.106)式实现驻值条件的u_i，ε_{ij}，σ_{ij}为弹性力学问题的真实解。

这个原理的变分条件为应力应变关系式、应变位移关系式、已知力的边界条件及已知位移边界条件。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.106)式可得

$$\delta G_{eb-8}=\iiint_V[(b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij})\delta\sigma_{ij}-\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}]dv$$

$$+\iint_{S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)\delta u_i+u_i\delta\sigma_{ij}l_j]ds$$

$$+\iint_{S_2}\overline{u}_i\delta\sigma_{ij}l_j ds=0 \tag{4.107}$$

由于具有变分约束条件(4.3)式，故有

$$\iiint_V\lambda_i\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}dv=0 \tag{4.108}$$

将(4.107)与(4.108)式相加，则有

$$\delta G_{eb-8}$$

$$=\iiint_V[(b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij})\delta\sigma_{ij}-(\sigma_{ij}+\lambda_{k,l}a_{ijkl})\delta\varepsilon_{ij}]dv$$

$$+\iint_{S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)\delta u_i+u_i\delta\sigma_{ij}l_j+\lambda_i\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j]ds$$

$$+\iint_{S_2}[\overline{u}_i\delta\sigma_{ij}l_j+\lambda_i\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j]ds=0 \tag{4.109}$$

根据变分法基本引理，得

$$b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij}=0 \qquad (V) \qquad (4.110)$$

$$\sigma_{ij}+a_{ijkl}\lambda_{k,l}=0 \qquad (V) \qquad (4.111)$$

同时考虑到(4.110)式，由此可得

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0$$

所以

$$\delta\sigma_{ij}=\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}) \qquad (4.112)$$

利用(4.112)式，从(4.109)式得

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \qquad (4.113)$$

$$\bar{u}_i+\lambda_i=0 \qquad (S_2) \qquad (4.114)$$

由于λ_i是由区域内部化到边界上的，因其物理性质是不变的，所以在边界上$\lambda_i=-\bar{u}_i$，在区域内此关系式亦成立，故(4.111)式可变为

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}u_{k,l}=0$$

将上式乘上因子b_{ijkl}，故得

$$b_{ijkl}\sigma_{ij}-u_{k,l}=0$$

再利用(4.110)式可得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (4.115)$$

由上述可知，这个原理的变分条件为应力应变关系式、应变位移关系式、已知力的边界条件及已知位移边界条件；它的变分约束条件为平衡方程。这些方程正是弹性力学问题应满足的四类基本方程，因此这个原理的解必为弹性力学问题的真实解。证毕。

4.2.7 标准型余能变分原理

基于泛函(4.80)式(或(4.81)式，或(4.82)式)，利用规一化方法，逐步将变分条件转变为变分约束条件（或一般约束条件），

于是可得到标准型余能变分原理。

1．满足应力应变关系式

设 $\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$，并用 σ_{ij} 代替全部的ε_{ij}，于是(4.80)式就退化为(4.89)式。这一步就把应力应变关系式转化为一般约束关系。

2．满足平衡方程

设 $\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0$ 成立，于是泛函(4.89)式退化为

$$\mathscr{L}=\iiint_V-\left(\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\right)\mathrm{d}v+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}s+\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{4.116}$$

3．满足力的边界条件

设在边界 S_1 上 $\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0$ 成立，于是泛函(4.116)式退化为

$$\mathscr{L}=\iiint_V-\left(\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\right)\mathrm{d}v+\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{4.117}$$

这正是余能古典变分原理的泛函，亦称标准型原理。

§4.3 有限变形弹性力学的广义变分原理

4.3.1 势能密度与余能密度的数学形式

为了建立三类变量函数的广义泛函及其广义变分原理，采用下面新型势能密度与余能密度。

1．势能密度

在应力应变(1.18)式为变分约束条件时，势能密度(1.26)式可表示为

$$A(e_{ij})=\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}=\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij} \tag{4.118}$$

2. 余能密度

在应力应变(1.21)式和应变位移关系式(1.15)式为变分约束条件时，等效余能密度(1.30)式可变为

$$B_n(\sigma_{ij})=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)$$

$$+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}(a_{ijkl}e_{kl}) \tag{4.119}$$

3. 平衡方程

平衡方程用应变分量可表示为

$$[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})]_{,j}+\bar{F}_k$$

$$=[(a_{ijkl}e_{kl})(\delta_{ki}+u_{k,i})]_{,j}+\bar{F}_k=0 \tag{4.120}$$

在建立余能广义原理时，变分约束条件的平衡方程采用应变分量表示，其原因如 §4.2节中所述。

4.3.2 三类变量函数的势能广义变分原理

1. 建立三类变量函数的广义泛函

在应变位移关系式(1.15)式、应力应变关系式(1.18)式和已知位移边界条件(1.23)式为变分约束条件时，势能古典变分原理的泛函(3.29)式可表示为

$$\Pi=\iiint\limits_{V}\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}-\bar{F}_iu_i\right]dv-\iint\limits_{S_1}\bar{P}_iu_ids \tag{4.121}$$

基于(4.121)式，利用拉氏乘子法建立广义变分原理的泛函，于是有

$$G_{na}=\iiint\limits_{V}\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}-\bar{F}_iu_i\right)+\beta_{ij}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\right.$$

$$\left.+a_{ij}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i u_i \mathrm{d}s+\iint_{S_2}\lambda_i(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}s \tag{4.122}$$

其中$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$；$\beta_{ij}=\beta_{ji}$；λ_i为拉氏乘子。

令σ_{ij}，e_{ij}，u_i，α_{ij}，β_{ij}，λ_i均为独立变量函数，利用驻值条件

$$\delta G_{n\alpha}=0 \tag{4.123}$$

确定拉氏乘子，于是可得

$$\begin{aligned}\delta G_{n\alpha}=&\iiint_V\Big\{\Big(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Big)\delta\alpha_{ij}\\&+\Big(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big)\delta\beta_{ij}+\Big[\Big(\alpha_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}-\bar{F}_k\Big]\delta u_k\\&+\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\alpha_{ij}-\beta_{kl}\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\Big)\delta e_{ij}\\&+\Big(\frac{1}{2}e_{ij}+\beta_{ij}\Big)\delta\sigma_{ij}\Big\}\mathrm{d}v\\&-\iint_{S_1}[\alpha_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j+\bar{P}_k]\delta u_k\mathrm{d}s\\&+\iint_{S_2}\Big\{(u_k-\bar{u}_k)\delta\lambda_k+[\lambda_k-\alpha_{ij}(\delta_{ki}\\&+u_{k,i})l_j]\delta u_k\Big\}\mathrm{d}s=0\end{aligned} \tag{4.124}$$

根据变分法基本引理，由(4.124)式得

$$e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0\quad(V) \tag{4.125}$$

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=0\quad(V) \tag{4.126}$$

$$\alpha_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})-\bar{F}_k=0\quad(V) \tag{4.127}$$

$$\frac{1}{2}e_{ij}+\beta_{ij}=0\quad(V) \tag{4.128}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}+a_{ij}-\beta_{kl}\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}=0 \qquad (4.129)$$

$$a_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j+\overline{P}_k=0 \qquad (S_1) \quad (4.130)$$

$$\lambda_k-a_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \qquad (S_2) \quad (4.131)$$

$$u_i-\overline{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.132)$$

由(4.128)式得

$$\beta_{ij}=-\frac{1}{2}e_{ij} \qquad (4.133)$$

考虑到(1.26)式和(4.133)式，由(4.129)式得

$$a_{ij}=-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right) \qquad (4.134)$$

将(4.134)式代入(4.130)与(4.131)式，可得

$$\overline{P}_k-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \qquad (S_1) \quad (4.135)$$

$$\lambda_k=-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j \qquad (S_2) \quad (4.136)$$

方程(4.125～4.136)式包括了有限变形弹性力学问题的四类基本方程及拉氏乘子。

将拉氏乘子代入(4.122)式，可得到

$$\begin{aligned}G_{na-1}=&\iiint_V\Big[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}-\overline{F}_iu_i\right)\\&-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\\&-\frac{1}{2}e_{ij}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\Big]dv-\iint_{S_1}\overline{P}_iu_i ds\\&-\iint_{S_2}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(u_k-\overline{u}_k)ds \qquad (4.137)\end{aligned}$$

泛函(4.137)式可简化为

$$G_{na-2}=\iiint_V\Big\{[A(e_{ij})-\bar F_i u_i]$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\Big(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}$$

$$-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Big)\Big\}\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\bar P_i u_i \mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_2}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{kj}+u_{k,i})l_j(u_k-\bar u_k)\mathrm{d}s \tag{4.138}$$

或简化为

$$G_{na-3}=\iiint_V\Big[\frac{1}{2}\sigma_{ij}\Big(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Big)-\bar F_k u_k$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\Big(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Big)$$

$$-\frac{1}{2}e_{ij}\Big(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big)\Big]\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\bar P_i u_i \mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_2}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(u_k-\bar u_k)\mathrm{d} \tag{4.139}$$

其中$A(e_{ij})$为(1.26)式。

泛函(4.137～4.139)式是具有三类独立变量函数的广义泛函，基于它们可以建立没有任何变分约束条件的三类独立变量函数的广义变分原理。这类变分原理的变分条件为有限变形弹性力学问题的四类基本方程。

2. 三类变量函数的势能广义变分原理3-1

当u_i，e_{ij}，σ_{ij}为独立变量函数时，使泛函(4.137)式（或(4.138)式，或(4.139)式），实现驻值条件的u_i，e_{ij}，σ_{ij}为有限变形弹性力学问题的真实解。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.138)式得

$$\begin{aligned}\delta G_{na\cdot 2}=&\iiint_V\left\{-\frac{1}{2}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\delta\sigma_{ij}\right.\\&-\left[\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k\right]\delta u_k\\&-\frac{1}{2}\left[\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}\right.\right.\\&\left.\left.\left.+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\right]\delta e_{ij}\right\}dv\\&-\iint_{S_1}\left[\bar{P}_k-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\delta u_k ds\\&-\iint_{S_2}(u_k-\bar{u}_k)\delta\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]ds\\=&0\end{aligned}\qquad(4.140)$$

根据变分法基本引理，得

$$e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0\qquad(V)\qquad(4.141)$$

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=0\qquad(V)\qquad(4.142)$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0\qquad(V)\qquad(4.143)$$

$$\bar{P}_k-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0\qquad(S_1)\qquad(4.144)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0\qquad(S_2)\qquad(4.145)$$

这些方程正是有限变形弹性力学问题的四类方程，故使泛函(4.137)式(或(4.138)式，或(4.139)式)，实现驻值条件的解为有限变形弹性力学问题的真实解。证毕。

4.3.3 二类变量函数的势能广义变分原理

现在基于泛函(4.137)式(或(4.138)式，或(4.139)式)，利用

规一化方法，把变分条件转化为变分约束条件（或为一般约束条件），于是得一系列新型变分原理。

1. 满足应力应变关系式

设 $\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=0$，并用$e_{ij}$代替余部的$\sigma_{ij}$，则泛函(4.137)式(或(4.138)式，或(4.139)式)，退化为

$$G_{nu-4}=\iiint_V\left[(A(e_{ij})-\bar{F}_iu_i)-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\right]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_ids-\iint_{S_2}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}l_j\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})(u_k-\bar{u}_k)ds \tag{4.146}$$

广义变分原理2-1：

在u_i和e_{ij}为独立变量函数时，使泛函(4.146)式实现驻值条件的u_i和e_{ij}为有限变形弹性力学问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应变位移关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件，它没有变分约束条件，应力应变关系(1.18)式为它的一般约束条件。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.146)式，得到

$$\begin{aligned}\delta G_{nu-4}=&\iiint_V\left\{-\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\right.\\&\left.-\left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k\right]\delta u_k\right\}dv\\&-\iint_{S_1}\left[\bar{P}_k-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\delta u_kds\\&-\iint_{S_2}\left\{(u_k-\bar{u}_k)\delta\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\right\}ds=0\end{aligned} \tag{4.147}$$

根据变分法基本引理，由(4.147)式得

$$e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}=0 \quad (V) \quad (4.148)$$

$$\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0 \quad (V) \quad (4.149)$$

$$\bar{P}_k-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \quad (S_1) \quad (4.150)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \quad (S_2) \quad (4.151)$$

由上述可知，这个原理的变分条件和一般约束条件为求解有限变形弹性力学问题应满足的四类方程，故泛函(4.146)式在驻值条件下的解为有限变形弹性力学问题的真实解。证毕。

又设 $\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=0$，并用 σ_{ij} 局部的代替 e_{ij}，则由泛函(4.138)式得

$$G_{na-5}=\iiint_V\left\{[A(e_{ij})-\bar{F}_iu_i]-\sigma_{ij}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\right\}dv-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_ids-\iint_{S_2}(u_k-\bar{u}_k)\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_jds \quad (4.152)$$

这是文献[2]中提出的泛函，这个广义泛函是二类独立变量函数的泛函，基于它可以建立二类变量函数的广义变分原理。这个原理的变分条件为应变位移关系式、平衡方程、已知力的边界条件和已知位移边界条件；它具有变分约束条件（应力应变关系式）。

2．满足应变位移关系式

若 $e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}=0$，但不做变量代换，

于是由泛函(4.138)式，可得

$$G_{na-6}=\iiint_V [A(e_{ij})-\bar{F}_i u_i]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_i u_i ds$$

$$-\iint_{S_2}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(u_k-\bar{u}_k)ds$$

(4.153)

广义变分原理2-2：

当应变位移(1.15)式为变分约束条件时，使泛函(4.153)式实现驻值条件的u_i，e_{ij}，σ_{ij}为有限变形弹性力学问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力应变关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.153)式可得

$$\delta G_{na-6}=\iiint_V\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta e_{ij}-\bar{F}_i\delta u_i\right)dv-\iint_{S_2}\bar{P}_i\delta u_i ds$$

$$-\iint_{S_2}\left\{(u_k-\bar{u}_k)\delta\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\delta u_k\right\}ds=0$$

(4.154)

由于具有变分约束条件

$$e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}=0$$

因此e_{ij}和u_i的变分不是任意的。取拉氏乘子 $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$，由变分约束条件可得

$$\iiint_V\lambda_{ij}\delta\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)dv$$

$$=\iiint_V[\lambda_{ij}\delta e_{ij}-\lambda_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta u_{k,j}]dv$$

$$= \iiint_V \{\lambda_{ij}\delta e_{ij} + [\lambda_{ij}(\delta_{ki} + u_{k,i})]_{,j}\delta u_k\} \mathrm{d}v$$

$$- \iint_{S=S_1+S_2} [\lambda_{ij}(\delta_{ki} + u_{k,i})l_j]\delta u_k \mathrm{d}s = 0 \qquad (4.155)$$

取(4.154)式与(4.155)式相加，则得

$$\delta G_{ns-s} = \iiint_V \Big\{\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} + \lambda_{ij}\Big)\delta e_{ij}$$

$$+ [(\lambda_{ij}(\delta_{ki} + u_{k,i}))_{,j} - \bar{F}_k]\delta u_k \Big\} \mathrm{d}v$$

$$- \iint_{S_1} [\lambda_{ij}(\delta_{ki} + u_{k,i})l_j + \bar{P}_k]\delta u_k \mathrm{d}s$$

$$- \iint_{S_2} \Big\{(u_k - \bar{u}_k)\delta\Big[\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big)(\delta_{ki} + u_{k,i}l_j)\Big]$$

$$+ \Big[\lambda_{ij}(\delta_{ki} + u_{k,i})l_j + \Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big)(\delta_{ki}$$

$$+ u_{k,i})l_j\Big]\delta u_k\Big\} \mathrm{d}s = 0 \qquad (4.156)$$

根据变分法基本引理，得

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} + \lambda_{ij} = 0 \qquad (V) \qquad (4.157)$$

$$[\lambda_{ij}(\delta_{ki} + u_{k,i})]_{,j} - \bar{F}_k = 0 \qquad (V) \qquad (4.158)$$

$$\lambda_{ij}(\delta_{ki} + u_{k,i})l_j + \bar{P}_k = 0 \qquad (S_1) \qquad (4.159)$$

$$u_k - \bar{u}_k = 0 \qquad (S_2) \qquad (4.160)$$

$$\lambda_{ij} = -\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big) \qquad (S_2) \qquad (4.161)$$

由于λ_{ij}是由区域内部化到边界上去的，因其物理性质具有不变性，所以在区域内部（4.161）式亦成立。将λ_{ij}之值代入(4.157～4.159)式，可得

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=0 \qquad (V) \qquad (4.162)$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0 \quad (V) \qquad (4.163)$$

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0 \ (S_1) \qquad (4.164)$$

$$u_k-\bar{u}_k=0 \qquad (S_2) \qquad (4.165)$$

由上述可知，这个原理的变分条件与它的变分约束条件为有限变形弹性力学问题的四类方程，故这个原理的解为有限变形弹性力学问题的真实解。证毕。

3. 满足平衡方程

若$\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0$，于是由泛函(4.138)式可得

$$G_{na-7}=\iiint_V\left[-\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\left(\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\right]dv$$
$$-\iint_{S_1}\left[\bar{P}_k-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]u_k ds$$
$$+\iint_{S_2}\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\bar{u}_k)\right]ds \qquad (4.166)$$

广义变分原理2-3：

当平衡方程

$$\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0$$

为变分约束条件时，使泛函(4.166)式实现驻值条件的 u_i，e_{ij}、σ_{ij}为有限变形弹性力学问题的真实解。

这个原理的变分条件为应力应变关系式、应变位移关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.166)式可得

$$\delta G_{na-7}=\iiint_V\Big[-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta e_{ij}-\frac{1}{2}e_{ij}\delta\sigma_{ij}$$

$$-\left(\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)u_{k,i}\delta u_{k,j}\Big]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\left[\bar{P}_k-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\delta u_k\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_1}u_k\delta\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_2}\bar{u}_k\delta\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\mathrm{d}s=0 \tag{4.167}$$

由变分约束条件

$$\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0$$

可得到

$$\iiint_V\lambda_k\delta\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}\mathrm{d}v$$

$$=\iiint_V-\lambda_{k,j}\delta\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S=S_1+S_2}\lambda_k\delta\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\mathrm{d}s$$

$$=\iiint_V\Big[-\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)$$

$$-\lambda_{k,j}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\delta u_{k,i}\Big]\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S=S_1+S_2}\lambda_k\delta\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]ds=0 \tag{4.168}$$

将(4.167)与(4.168)式相加，则得

$$\begin{aligned}\delta G_{ne-7}=&\iiint_V\Big\{-\frac{1}{2}\left(e_{ij}+\frac{1}{2}\lambda_{i,j}+\frac{1}{2}\lambda_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}\lambda_{k,j}\right)\delta\sigma_{ij}\\&-\frac{1}{2}\Big[\sigma_{ij}+\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\Big(\frac{1}{2}\lambda_{i,j}+\frac{1}{2}\lambda_{j,i}\\&+\frac{1}{2}u_{k,i}\lambda_{k,j}\Big)\Big]\delta e_{ij}\\&-\frac{1}{2}(u_{k,i}\lambda_{k,j}+u_{k,i}u_{k,j})\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\\&-(u_{k,i}+\lambda_{k,i})\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\delta u_{k,j}\Big\}dv\\&-\iint_{S_1}\left[\bar{P}_k-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\delta u_k ds\\&+\iint_{S_1}(\lambda_k+u_k)\delta\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]ds\\&+\iint_{S_2}(\lambda_k+\bar{u}_k)\delta\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]ds\\=&0\end{aligned} \tag{4.169}$$

根据变分法基本引理，可得

$$e_{ij}+\frac{1}{2}\lambda_{i,j}+\frac{1}{2}\lambda_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}\lambda_{k,j}+N_{kl}=0 \quad (V) \tag{4.170}$$

$$\sigma_{ij}+\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\left(\frac{1}{2}\lambda_{i,j}+\frac{1}{2}\lambda_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}\lambda_{k,j}+N_{kl}\right)=0 \quad (V) \tag{4.171}$$

$$\frac{1}{2}(u_{k,i}\lambda_{k,j}+u_{k,i}u_{k,j})=N_{kl} \quad (V) \tag{4.172}$$

$$u_{k,i}+\lambda_{k,i}=0 \qquad (V) \qquad (4.173)$$

$$\bar{P}_k-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \qquad (S_1) \qquad (4.174)$$

$$\lambda_k+u_k=0 \qquad (S_1) \qquad (4.175)$$

$$\lambda_k+\bar{u}_k=0 \qquad (S_2) \qquad (4.176)$$

根据上面变分条件可得$\lambda_i=-u_i$，把此结论代入(4.170～4.176)式，则得

$$e_{ij}-\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)=0 \qquad (V) \qquad (4.177)$$

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)=0 \qquad (V) \qquad (4.178)$$

$$\bar{P}_k-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \qquad (S_1) \qquad (4.179)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \qquad (4.180)$$

其中 $\qquad N_{kl}=0,\quad \dfrac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}=a_{ijkl}$

由上述可知，这个原理的变分条件与它的变分约束条件，为有限变形弹性力学问题的四类方程，故这个原理的解为有限变形弹性力学问题的真实解。证毕。

4.3.4 标准型势能变分原理

基于泛函(4.137)式(或(4.138)式，或(4.139)式)，利用规一化方法，逐步将变分条件（应力应变关系、应变位移关系式、位移边界条件）转化为变分约束条件和一般约束条件（应力应变关系式)，则可得到标准型势能变分原理，也就是势能古典变分原理（有限变形弹性力学的)。

1. 满足应力应变关系式

设 $\sigma_{ij}-\dfrac{\partial A}{\partial e_{ij}}=0$，并用$e_{ij}$代替全部$\sigma_{ij}$，则泛函(4.137)式（或(4.138)式，或(4.139)式)，退化为(4.146)式型广义泛函。

这一步就把应力应变关系式转化为一般约束条件。

2. 满足应变位移关系式

设 $e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}=0$，但不做变量代换，于是泛函(4.146)式退化为

$$G_{na-8}=\iiint_V(A(e_{ij})-\bar{F}_iu_i)\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(u_k-\bar{u}_k)\mathrm{d}s \tag{4.181}$$

这是具有一个独立变量函数的泛函，由它形成的变分原理具有变分约束条件（应变位移关系式）；变分条件为平衡方程、已知力的边界条件和已知位移边界条件；它的一般约束条件为应力应变关系式。

3. 满足位移边界条件

若$u_k-\bar{u}_k=0$，在S_2边界上成立，泛函(4.181)式就退化为有限变形弹性力学的势能古典变分原理泛函，亦即标准型势能变分原理的泛函，为

$$\Pi=\iiint_V[A(e_{ij})-\bar{F}_iu_i]\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_i\mathrm{d}s \tag{4.182}$$

4.3.5 三类变量函数的余能广义变分原理

1. 建立三类变量函数的广义泛函

在应力应变(1.21)式、应变位移(1.15)式、平衡方程(4.120)式和已知力的边界条件(1.22)式为变分约束条件时，余能古典变分原理的泛函(3.37)式可表示为

$$\mathscr{L}=\iiint_V\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\Big]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_2}\bar{u}_k\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\mathrm{d}s \tag{4.183}$$

基于(4.183)式，利用拉氏乘子法建立广义变分原理的泛函，于是有

$$G_{nb}=\iiint_V\Big\{\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)$$

$$+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)+a_{ij}\Big(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}$$

$$-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Big)+\beta_{ij}\left(e_{ij}-\frac{\partial\beta}{\partial\sigma_{ij}}\right)$$

$$+\lambda_k\Big[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k\Big]\Big\}\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_1}\Big[\bar{P}_k-\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big]\mu_k\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_2}\bar{u}_k\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\mathrm{d}s \tag{4.184}$$

其中$a_{ij}=a_{ji}$；$\beta_{ij}=\beta_{ji}$；λ_k和μ_k均为拉氏乘子。

令u_i，e_{ij}，σ_{ij}，a_{ij}，β_{ij}，λ_k，μ_k 均为独立变量函数，利用驻值条件

$$\delta G_{nb}=0 \tag{4.185}$$

确定拉氏乘子，于是有

$$\delta G_{nb}=\iiint_V\Big\{\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\delta a_{ij}$$

$$+\left(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\right)\delta\beta_{ij}+\Big[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k\Big]\delta\lambda_k$$

$$+\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Big]$$

$$-\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\beta_{kl}\Big]\delta\sigma_{ij}+\Big[\alpha_{ij}+\beta_{ij}-\lambda_{k,j}(\delta_{ki}$$

$$+u_{k,i})\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\right)\Big]\delta e_{ij}$$

$$+\Big[\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})-\alpha_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})+u_{k,i}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}$$

$$-\lambda_{k,i}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big]\delta u_{k,j}\Big\}\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_1}\Big[\bar{p}_k-\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big]\delta\mu_k\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_1}\Big[\lambda_k\delta\Big[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big]$$

$$-\mu_k\delta\Big[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big]\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_2}\Big[\bar{u}_k\delta[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]$$

$$-\lambda_k\delta\Big[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big]\mathrm{d}s=0 \qquad (4.186)$$

根据变分法基本引理，得

$$e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0 \quad (V) \qquad (4.187)$$

$$e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=0 \quad (V) \qquad (4.188)$$

$$\Big[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big]_{,j}+F_k=0 \quad (V) \qquad (4.189)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}-\right)\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\beta_{kl}$$

$$=0 \qquad (4.190)$$

$$a_{ij}+\beta_{ij}-\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}$$

$$+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}=0 \quad (4.191)$$

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}-a_{ij}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})+(u_{k,i}-\lambda_{k,i})\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=0 \quad (4.192)$$

$$\bar{P}_k-\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \quad (S_1) \quad (4.193)$$

$$\lambda_k\delta\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]-\mu_k\delta\left[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]=0$$

$$(S_1) \quad (4.194)$$

$$\bar{u}_k\delta[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]-\lambda_k\delta\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]=0$$

$$(S_2) \quad (4.195)$$

由(4.187)、(4.188)、(4.190)和(1.29)式得

$$\beta_{ij}=\frac{1}{2}\sigma_{ij} \quad \left(\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{kl}-b_{ijkl}\beta_{kl}=0\right) \quad (4.196)$$

由(4.191)、(4.192)、(4.196)和(1.26)、(1.29)式得

$$\lambda_i=u_i \quad (4.197)$$

$$a_{ij}=\frac{1}{2}\sigma_{ij} \quad (4.198)$$

根据(4.188)和(1.29)式，有

$$e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$$

$$a_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})=a_{ijkl}e_{kl}-\sigma_{ij}$$

$$=\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}=0 \quad (4.199)$$

根据(4.199)、(4.197)式，由(4.194)式，可得

$$\lambda_k=\mu_k=u_k \quad (S_1) \quad (4.200)$$

根据(4.199)、(4.197)式，由(4.195)式可得到

$$u_k-\lambda_k=\bar{u}_k-u_k=0 \qquad (S_2) \qquad (4.201)$$

方程(4.187～4.201)式为有限变形弹性力学的四类方程及全部拉氏乘子。将拉氏乘子代入泛函(4.184)式，得到

$$\begin{aligned}G_{nb-1}=&\iiint_V\Big\{\frac{1}{2}\sigma_{ij}\Big(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Big)\\&+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big)+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\Big(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\\&-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Big)+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\Big(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\Big)\\&+u_k\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k\Big]\Big\}dv\\&-\iint_{S_1}\Big[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\Big]u_k ds\\&-\iint_{S_2}\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\bar{u}_k)ds\end{aligned} \qquad (4.202)$$

或简化为

$$\begin{aligned}G_{nb-2}=&\iiint_V\Big\{-B(\sigma_{ij})+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big)+\sigma_{ij}e_{ij}\\&+u_k\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k\Big]\Big\}dv\\&-\iint_{S_1}\Big[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\Big]u_k ds\\&-\iint_{S_2}\Big[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\bar{u}_k)\Big]ds\end{aligned} \qquad (4.203)$$

亦可简化为

$$\begin{aligned}G_{nb-3}=&\iiint_V\Big\{\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\Big(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\Big)+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\\&+u_k\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k\Big]\Big\}dv\end{aligned}$$

$$-\iint_{S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]u_k\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_2}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\bar{u}_k)]\mathrm{d}s \tag{4.204}$$

其中$A(e_{ij})$为(1.26)式，$B(\sigma_{ij})$为(1.29)式。

泛函(4.202～4.204)式是三类变量函数的广义泛函，基于它们可以建立没有任何变分约束条件的三类独立变量函数的广义变分原理。

2. 三类变量函数的余能广义变分原理3-2

当u_i，e_{ij}，σ_{ij}为独立变量函数时，使泛函(4.202)式（或(4.203)式，或(4.204)式），实现驻值条件的u_i，e_{ij}，σ_{ij}为有限变形弹性力学问题的真实解。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.204)式，可得

$$\begin{aligned}\delta G_{nb-3}=&\iiint_V\Big\{\Big(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\Big)\delta\sigma_{ij}\\&+\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k\Big]\delta u_k\\&+\Big[\sigma_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\frac{\partial^2A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\Big]\delta e_{ij}\Big\}\mathrm{d}v\\&-\iint_{S_1}\Big[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\Big]\delta u_k\mathrm{d}s\\&-\iint_{S_1}u_k\delta\Big[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\\&-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big]\mathrm{d}s\\&-\iint_{S_2}\Big\{\bar{u}_k\delta[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]\end{aligned}$$

$$-u_k\delta\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\Big\}ds=0 \qquad (4.205)$$

根据变分法基本引理，得

$$e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (4.206)$$

$$\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0 \qquad (V) \quad (4.207)$$

$$\sigma_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}=0 \qquad (V) \quad (4.208)$$

由(4.206)式，上式可化为

$$e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0 \qquad (V) \quad (4.209)$$

由(4.205)式在S_1边界上，得到

$$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0 \qquad (S_1) \quad (4.210)$$

由(4.205)式在S_2边界上，可得到

$$\bar{u}_k-u_k=0 \qquad (S_2) \quad (4.211)$$

以上方程正是有限变形弹性力学的四类基本方程，故这个原理的解为有限变形弹性力学问题的真实解。证毕。

4.3.6 二类变量函数的余能广义原理

现在基于泛函(4.202)式（或(4.203)，或(4.204)式），利用规一化方法，把变分条件转化为变分约束条件（或为一般约束条件），于是可得一系列新型原理。

1. 满足应力应变关系式

设 $e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=0$，并用$\sigma_{ij}$代替全部的$e_{ij}$，则由泛函(4.202)式得

$$G_{nb-4}=\iiint_V\Big\{B(\sigma_{ij})+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}$$

$$+u_k\left[\left(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+F_k\right]\Big\}dv$$

$$-\iint_{S_1}\left[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\right]u_k ds$$

$$-\iint_{S_2}\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\bar{u}_k)ds \qquad (4.212)$$

其中$B(\sigma_{ij})$为(1.29)式。

广义变分原理2-4：

在σ_{ij}和u_i为独立变量函数时，使泛函(4.212)式实现驻值条件的σ_{ij}和u_i为有限变形弹性力学问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力位移关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件；它的一般约束条件为应力应变关系式。若用一般约束关系式，可把变分条件应力位移关系式化为应变位移关系式。这是参考文献[2,8]中提出的广义泛函。

2．满足应变位移关系式

若 $e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}=0$，并用$u_{i,j}$代替$e_{ij}$，由(4.202)式可得

$$G_{nb-8}=\iiint_V\Big\{-B(\sigma_{ij})+\sigma_{ij}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)$$

$$+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\frac{\partial A(e_{ij}(u_i))}{\partial e_{ij}}$$

$$+u_k\left[\left(\frac{\partial A(e_{ij}(u_i))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+F_k\right]\Big\}dv$$

$$-\iint_{S_1}\left[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\right]u_k ds$$

$$-\iint_{S_2}\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\bar{u}_k)ds \qquad (4.213)$$

广义变分原理2-5：

在u_i和σ_{ij}为独立变量函数时，使泛函(4.213)式实现驻值条件的u_i和σ_{ij}为有限变形弹性力学问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力位移关系式（或通过一般约束条件把应力位移关系式转化为应变位移关系式）、已知力的边界条件和已知位移边界条件；它的一般约束条件为应变位移关系式。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.213)式可得

$$\begin{aligned}\delta G_{nb-5}=&\iiint_V\left\{\left[\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\right]\delta\sigma_{ij}\right.\\&\left.+\left[\left(\frac{\partial A(e_{ij}(u_i))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k\right]\delta u_k\right\}dv\\&-\iint_{S_1}\left[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\right]\delta u_k ds\\&-\iint_{S_2}(\bar{u}_k-u_k)\delta[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]ds=0\end{aligned}\tag{4.214}$$

根据变分法基本引理，得

$$\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=0\quad(V)\tag{4.215}$$

$$\left[\frac{\partial A(e_{ij}(u_i))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0\quad(V)\tag{4.216}$$

$$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0\quad(S_1)\tag{4.217}$$

$$\bar{u}_k-u_k=0\quad(S_2)\tag{4.218}$$

其中在积分域V内，由(1.26)式可得

$$\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}=a_{ijkl}$$

$$a_{ijkl}e_{kl}-\sigma_{ij}=0\tag{4.219}$$

由(4.215)式得

$$a_{ijkl}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)-\sigma_{ij}$$

$$=\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)-\sigma_{ij}=0 \quad (4.220)$$

由此在积分域内消去了

$$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})-\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})=0 \quad (4.221)$$

由于应变位移关系式和(4.215)式成立，则得

$$\frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}=0 \quad (4.222)$$

由此得

$$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j \quad (4.223)$$

利用(4.223)式在边界$S=S_1+S_2$上消去

$$u_k\delta[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]-u_k\delta\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]=0$$

$$(S_1) \quad (4.224)$$

并可得到

$$\bar{u}_k\delta[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]-u_k\delta\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]$$

$$=(\bar{u}_k-u_k)\delta[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]=0$$

即得(4.218)式：

$$\bar{u}_k-u_k=0 \quad (S_2)$$

由上述可知，这个原理的变分条件与一般约束条件正是有限变形弹性力学的四类方程，故这个原理的解为有限变形弹性力学问题的真实解。证毕。

3. 满足平衡方程

若$\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0$，由泛函(4.202)得

$$
\begin{aligned}
G_{nb-6}=&\iiint_V\left[-B(\sigma_{ij})+\sigma_{ij}e_{ij}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right]dv\\
&-\iint_{S_1}\left[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\right]u_k ds\\
&-\iint_{S_2}\left[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\bar{u}_k)\right]ds
\end{aligned}
\tag{4.225}
$$

广义变分原理2-6：

当平衡方程$\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0$时，使泛函(4.225)式实现驻值条件的$u_i$，$e_{ij}$，$\sigma_{ij}$为有限变形弹性理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为应力应变关系式、应变位移关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件；它的变分约束条件为平衡方程。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.225)式可得

$$
\begin{aligned}
\delta G_{nb-6}=&\iiint_V\left[\left(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\right)\delta\sigma_{ij}+\sigma_{ij}\delta e_{ij}\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)+u_{k,i}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\delta u_{k,j}\right]dv\\
&-\iint_{S_1}\left[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\right]\delta u_k ds\\
&-\iint_{S_1}u_k\delta[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]ds\\
&-\iint_{S_2}\bar{u}_k\delta[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]ds=0
\end{aligned}
\tag{4.226}
$$

由于具有变分约束条件

$$\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0$$

故，可得

$$\iiint_V \lambda_k\delta\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}dv$$

$$=\iiint_V\left[-\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)-\lambda_{k,j}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\delta u_{k,j}\right]dv$$

$$+\iint_{S=S_1+S_2}\lambda_k\delta\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]ds$$

$$=\iiint_V\left[-\left(\frac{1}{2}\lambda_{i,j}+\frac{1}{2}\lambda_{j,i}+\frac{1}{2}\lambda_{k,i}u_{k,j}\right)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\lambda_{k,i}u_{k,j}\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)-\lambda_{k,j}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\delta u_{k,j}\right]dv$$

$$+\iint_{S=S_1+S_2}\lambda_k\delta\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]ds=0 \qquad (4.227)$$

将(4.226)式与(4.227)式相加，则有

$$\delta G_{nb-g}=\iiint_V\left\{\left(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\right)\delta\sigma_{ij}\right.$$

$$+\left[\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\left(\frac{1}{2}\lambda_{i,j}+\frac{1}{2}\lambda_{j,i}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\lambda_{k,i}u_{k,j}-\frac{1}{2}(u_{k,i}-\lambda_{k,i})u_{k,j}\right)\right]\delta e_{ij}$$

$$\left.+(u_{k,j}-\lambda_{k,j})\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\delta u_{k,j}\right\}dv$$

$$-\iint_{S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]\delta u_k ds$$

$$-\iint_{S_1}\left\{u_k\delta[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]\right.$$

$$\left.-\lambda_k\delta\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\right\}ds$$

$$-\iint_{S_2}\left\{\bar{u}_k\delta[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]\right.$$

$$\left.-\lambda_k\delta\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\right\}ds=0 \qquad (4.228)$$

根据变分法基本引理，得

$$e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (4.229)$$

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\left(\frac{1}{2}\lambda_{i,j}+\frac{1}{2}\lambda_{j,i}+\frac{1}{2}\lambda_{k,i}u_{k,j}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(u_{k,i}-\lambda_{k,i})u_{k,j}\right)=0 \qquad (V) \quad (4.230)$$

$$u_{k,i}-\lambda_{k,i}=0 \qquad (V) \quad (4.231)$$

$$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0 \qquad (S_1) \quad (4.232)$$

由(4.229)式可得

$$e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$$

故

$$a_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})$$

$$=a_{ijkl}e_{kl}-\sigma_{ij}=\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}=0 \qquad (4.233)$$

由(1.26)式得

$$\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}=a_{ijkl} \qquad (4.234)$$

由(4.231)式得

$$\lambda_k=u_k \qquad (4.235)$$

故(4.230)式可化为

$$e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0\ (V) \quad (4.236)$$

在边界S_2上，根据(4.233)式，由(4.228)式可得

这正是有限变形弹性力学的余能古典变分原理的泛函，亦称标准型变分原理的泛函。

§4.4 塑性形变理论的广义变分原理

4.4.1 势能密度与余能密度的数学形式

为了建立三类变量函数的广义泛函及其广义变分原理，采用下面新型势能密度与余能密度的数学形式[9]。

取符号

$$\Gamma=(2\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij})^{\frac{1}{2}} \tag{4.240}$$

$$\Sigma=\left(\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.241}$$

由(1.41)式和(1.50)式得

$$\begin{aligned}A(\varepsilon_{ij})&=\int_0^{\varepsilon'_{ij}}\sigma'_{ij}\mathrm{d}\varepsilon'_{ij}+\frac{3E}{2(1-2\nu)}\varepsilon_{cp}^2\\&=\frac{\mu}{2}\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}+\frac{3E}{2(1-2\nu)}\varepsilon_{cp}^2\\&=\frac{\mu}{4}\Gamma^2+\frac{3E}{2(1-2\nu)}\varepsilon_{cp}^2\end{aligned} \tag{4.242}$$

由(1.41)和(1.51)式得

$$\begin{aligned}B(\sigma_{ij})&=\int_0^{\sigma'_{ij}}\varepsilon'_{ij}\mathrm{d}\sigma'_{ij}+\frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_{cp}^2\\&=\frac{1}{2\mu}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}+\frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_{cp}^2\\&=\frac{1}{\mu}\Sigma^2+\frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_{cp}^2\end{aligned} \tag{4.243}$$

故

$$\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}=\sigma_{ij}=\mu\varepsilon'_{ij}+\frac{E}{3(1-2\nu)}\varepsilon_{ij}\delta_{ij}$$

$$=\mu\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ij}\right)+\frac{E}{3(1-2\nu)}\varepsilon_{ll}\delta_{ij} \quad (4.244)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=\varepsilon_{ij}=\frac{1}{\mu}\sigma'_{ij}+\frac{1-2\nu}{3E}\sigma_{ll}\delta_{ij}$$

$$=\frac{1}{\mu}\left(\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\sigma_{ll}\delta_{ij}\right)+\frac{1-2\nu}{3E}\sigma_{ll}\delta_{ij} \quad (4.245)$$

将(4.244)与(4.245)式相乘，则有

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij}+\sigma_{cp}\varepsilon_{cp}$$

所以

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij}+\frac{1}{2}\sigma_{cp}\varepsilon_{cp} \quad (4.246)$$

若用应变表示应力时，由(4.246)式得

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\mu\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}+\frac{1}{2}\frac{3E}{(1-2\nu)}\varepsilon^2_{cp}$$

$$=\frac{\mu}{4}\Gamma^2+\frac{3E}{2(1-2\nu)}\varepsilon^2_{cp}=A(\varepsilon_{ij}) \quad (4.247)$$

若用应力表示应变时，由(4.246)式得

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2\mu}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}+\frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma^2_{cp}$$

$$=\frac{1}{\mu}\Sigma^2+\frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma^2_{cp}=B(\sigma_{ij}) \quad (4.248)$$

1．势能密度

在应力应变(4.244)式为变分约束条件时，势能密度(4.242)式可表示为

$$A(\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \quad (4.249)$$

2．余能密度

在应力应变(4.245)式和应变位移(1.32)式为变分约束条件时，余能密度(4.243)式可表示为

$$B(\sigma_{ij})=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j} \quad (4.250)$$

平衡方程用应变表示的形式为

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (4.251)$$

由于考虑到势能原理与余能原理的对偶性，及变量函数之间的匹配关系，在建立余能广义泛函时，变分约束条件平衡方程应用应变分量表示。

4.4.2 三类变量函数的势能广义变分原理

1. 建立广义泛函

变分约束条件为

1) 应力应变(4.244)式；

2) 应变位移(1.32)式；

3) 已知位移边界条件(1.40)式。

满足变分约束条件以及在简单加载条件下，塑性形变理论的势能古典变分原理的泛函(3.47)式可表示为

$$\Pi=\iiint_V\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\bar{F}_i u_i\right]\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\bar{P}_i u_i \mathrm{d}s \qquad (4.252)$$

基于(4.252)式，利用拉氏乘子法建立广义变分原理的泛函，于是有

$$\begin{aligned}G_{da}=&\iiint_V\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\bar{F}_i u_i\right)\right.\\&+\alpha_{ij}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\\&\left.+\beta_{ij}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\right]\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\bar{P}_i u_i \mathrm{d}s\\&+\iint_{S_2}\lambda_i(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}s\end{aligned} \qquad (4.253)$$

其中 $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$；$\beta_{ij}=\beta_{ji}$；λ_i 为拉氏乘子。

令σ_{ij}，ε_{ij}，u_i，a_{ij}，β_{ij}，λ_i均为独立变量函数，利用驻值条件

$$\delta G_{du}=0 \tag{4.254}$$

确定拉氏乘子，于是有

$$\begin{aligned}\delta G_{du}=&\iiint_V\Big[\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\delta a_{ij}\\&+\Big(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)\delta\beta_{ij}+(a_{ij,j}-\bar{F}_i)\delta u_i\\&+\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+a_{ij}-\beta_{kl}\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\Big)\delta\varepsilon_{ij}\\&+\Big(\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}+\beta_{ij}\Big)\delta\sigma_{ij}\Big]dv\\&-\iint_{S_1}(a_{ij}l_j+\bar{P}_i)\delta u_i ds\\&+\iint_{S_2}[(u_i-\bar{u}_i)\delta\lambda_i+(\lambda_i-a_{ij}l_j)\delta u_i]ds=0\end{aligned} \tag{4.255}$$

根据变分法基本引理，得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V) \tag{4.256}$$

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}=0 \qquad (V) \tag{4.257}$$

$$a_{ij,j}-\bar{F}_i=0 \qquad (V) \tag{4.258}$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}+\beta_{ij}=0 \tag{4.259}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}+a_{ij}-\beta_{kl}\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}=0 \tag{4.260}$$

$$a_{ij}l_j+\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{4.261}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \tag{4.262}$$

$$\lambda_i-a_{ij}l_j=0 \qquad (S_2) \tag{4.263}$$

由(4.259)式得

$$\beta_{ij}=-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij} \tag{4.264}$$

已知

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}=\sigma_{ij}$$

故

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}=\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$$

所以

$$\int\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\mathrm{d}\varepsilon_{kl}=\sigma_{ij}$$

当 $\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}$ 为常数时，则有

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\varepsilon_{kl}=\sigma_{ij}=\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{4.265}$$

由(4.260)和(4.265)式可得

$$a_{ij}=-\frac{1}{2}\sigma_{ij}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\varepsilon_{kl}=-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) \tag{4.266}$$

将 a_{ij} 之值代入(4.258)式可得

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \quad (V) \tag{4.267}$$

由(4.261)式可得

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j-\bar{P}_i=0 \quad (S_1) \tag{4.268}$$

由(4.263)式可得

$$\lambda_i=a_{ij}l_j=-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j \tag{4.269}$$

方程(4.256～4.269)式包括了塑性形变理论的四类方程及拉氏乘子。

将拉氏乘子代入(4.253)式，则得

$$G_{da-1}=\iiint_V\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\bar{F}_iu_i\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\right.$$

$$\left.\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_i ds-\iint_{S_2}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j(u_i-\bar{u}_i)ds \tag{4.271}$$

泛函(4.271)式可化简为

$$G_{da-2}=\iiint_V\left[\left(A(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_iu_i\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\right.$$

$$\left.\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_i ds$$

$$-\iint_{S_2}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j(u_i-\bar{u}_i)ds \tag{4.272}$$

亦可化简为

$$G_{da-3}=\iiint_V\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)-\bar{F}_iu_i\right]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_i ds$$

$$-\iint_{S_2}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j(u_i-\bar{u}_i)ds \tag{4.273}$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242)式。

泛函(4.271～4.273)是三类独立变量函数的广义泛函，基于它们可以建立没有任何变分约束条件的三类独立变量函数的广义变分原理。

2. 三类变量函数的势能广义变分原理3-1

在$u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij}$为独立变量函数时，使泛函(4.271)(或(4.272)，或(4.273)式) 实现驻值条件的$u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij}$为塑性形变理论问题的

真实解。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.273)式可得

$$\delta G_{da-3}=\iiint_V\left\{-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\delta\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})\delta\sigma_{ij}\right.$$

$$\left.-\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\delta u_i\right\}dv$$

$$-\iint_{S_1}\left[\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right]\delta u_i ds$$

$$-\iint_{S_2}(u_i-\bar{u}_i)\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j ds=0 \quad (4.274)$$

根据变分法基本引理，得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.275)$$

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (4.276)$$

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \quad (V) \quad (4.277)$$

$$\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j=0 \qquad (S_1) \quad (4.278)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.279)$$

这些方程正是塑性形变理论的四类方程，故使泛函(4.271)式（或(4.272)式，或(4.273)式）实现驻值条件的解为塑性形变理论问题的真实解。证毕。

4.4.3 二类变量函数的势能广义变分原理

基于泛函(4.271)式（或(4.272)式，或(4.273)式），利用规一化方法，把变分条件转化为变分约束条件（或为一般约束条件），可得到一系列新型变分原理。

1. 满足应力应变关系式

设 $\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}=0$，并用$\varepsilon_{ij}$代替$\sigma_{ij}$，则泛函(4.272)式退化为

$$G_{da-4}=\iiint_V\left\{[A(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_i u_i]-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i})\right\}dv-\iint_{S_1}\bar{P}_i u_i ds-\iint_{S_2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j(u_i-\bar{u}_i)ds \tag{4.280}$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242)式。

广义变分原理2-1：

在u_i和ε_{ij}为独立变量函数时，使泛函(4.280)式实现驻值条件的u_i和ε_{ij}为塑性形变理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应变位移关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件；它的一般约束条件为应力应变关系式(4.244)式。

证明：在驻值条件下，泛函(4.280)式可得

$$\delta G_{da-4}=\iiint_V\left\{-\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)-\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\delta u_i\right\}dv-\iint_{S_1}\left(\bar{P}_i-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)\delta u_i ds-\iint_{S_2}(u_i-\bar{u}_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)ds=0 \tag{4.281}$$

根据变分法基本引理，得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \quad (V) \tag{4.282}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+F_i=0 \qquad (V) \quad (4.283)$$

$$\bar{P}_i-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j=0 \qquad (S_1) \quad (4.284)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.285)$$

由上述可知，这个原理的变分条件和一般约束条件为塑性形变理论的四类方程，故使泛函(4.280)式实现驻值条件的解为塑性形变理论问题的真实解，证毕。

又设 $\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}=0$，并用 σ_{ij} 局部的代替 ε_{ij}，则由泛函(4.271)式得

$$G_{da-5}=\iiint_V\left[[A(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_iu_i]-\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i})\right]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_ids-\iint_{S_2}(u_i-\bar{u}_i)\sigma_{ij}l_jds \quad (4.286)$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242)式。

这是参考文献[2]中提出的泛函，这个广义泛函是二类独立变量函数的泛函。基于它所建立的广义变分原理是二类独立变量的原理。它的变分条件为平衡方程、应变位移关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件，它的变分约束条件为应力应变关系式(4.244)。

2. 满足应变位移关系

若 $\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$，但不作变量代换，于是由泛函(4.272)式可得

$$G_{da-6}=\iiint_V[A(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_iu_i]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_ids$$

$$-\iint_{S_2}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}s \qquad (4.287)$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242)式。

广义变分原理2-2：

当应变位移(1.32)式为变分约束条件时，使泛函(4.287)式实现驻值条件的$u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij}$为塑性形变理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力应变关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。这个原理的证明与前类同，在此从略。

3. 满足平衡方程

若 $\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0$，于是由泛函(4.272)式得

$$G_{4a-7}=\iiint_V-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\left[\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right]u_i\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_2}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j(\bar{u}_i)\mathrm{d}s \qquad (4.288)$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242)式。

广义变分原理2-3：

当平衡方程(4.277)式为变分约束条件时，使泛函(4.288)式实现驻值条件的u_i，ε_{ij}，σ_{ij}为塑性形变理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为应力应变关系式、应变位移关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。这个原理的证明与前类同，在此从略。

4.4.4 标准型势能变分原理

基于泛函(4.271)式（或(4.272)式，或(4.273)式），利用规

一化方法，逐步将变分条件（应力应变关系式，应变位移关系式及位移边界条件）转化为变分约束条件和一般约束条件（应力应变关系式），则得到标准型势能变分原理，也就是塑性形变理论的势能古典变分原理。

1. 满足应力应变关系式

设 $\sigma_{ij}-\dfrac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}=0$，并用 ε_{ij} 代替全部 σ_{ij}，则泛函(4.271)式(或(4.272)式，或(4.273)式)，退化为(4.280)式型的广义泛函。这一步正是把应力应变关系式转化为一般约束条件。

2. 满足应变位移关系式

设 $\varepsilon_{ij}-\dfrac{1}{2}u_{i,j}-\dfrac{1}{2}u_{j,i}=0$，但不作变量代换于是泛函(4.280)式退化为

$$G_{da-s}=\iiint_V[A(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_iu_i]\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}s \tag{4.289}$$

其中 $A(\varepsilon_{ij})$ 为(4.242)式。

这是具有一个独立变量函数的泛函，由它形成的变分原理具有变分约束条件（应变位移关系式）；变分条件为平衡方程、已知力的边界条件和已知位移边界条件；它的一般约束条件为应力应变关系式。

3. 满足位移边界条件

若 $u_i-\bar{u}_i=0$，在边界 S_2 上成立，泛函(4.289)式就退化为塑性形变理论的势能古典变分原理泛函，也就是标准型势能变分原理的泛函，即

$$\Pi=\iiint_V[A(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_iu_i]\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_i\mathrm{d}s \tag{4.290}$$

4.4.5 三类变量函数的余能广义变分原理

1．建立广义泛函

在应力应变（4.245)式、应变位移（1.32)式、平衡方程(4.251)式和已知力的边界条件(1.39)式为变分约束条件时，塑性形变理论的余能古典变分原理的泛函(3.48)式可表示为

$$\mathscr{L}=\iiint_V \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}\mathrm{d}v-\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{4.291}$$

基于(4.291)式，利用拉氏乘子法建立广义变分原理的广义泛函，于是有

$$\begin{aligned}G_{db}=&\iiint_V\Big\{\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}+a_{ij}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\\&+\beta_{ij}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\Big)+\lambda_i\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)_{,j}+\bar{F}_i\Big]\Big\}\mathrm{d}v\\&+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\mu_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{4.292}$$

其中$a_{ij}=a_{ji}$；$\beta_{ij}=\beta_{ji}$；λ_i和μ_i为拉氏乘子。

令σ_{ij}，ε_{ij}，u_i，a_{ij}，β_{ij}，λ_i，μ_i为独立变量函数，利用驻值条件

$$\delta G_{db}=0 \tag{4.293}$$

确定拉氏乘子，则有

$$\begin{aligned}\delta G_{db}=&\iiint_V\Big\{\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\delta a_{ij}\\&+\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\Big)\delta\beta_{ij}+\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)_{,j}+\bar{F}_i\Big]\delta\lambda_i\\&+\Big(\frac{1}{2}u_{i,j}-\beta_{kl}\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\Big)\delta\sigma_{ij}+\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}-a_{ij}\Big)\delta u_{i,j}\\&+\Big(a_{ij}+\beta_{ij}-\lambda_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\Big)\delta\varepsilon_{ij}\Big\}\mathrm{d}v\end{aligned}$$

$$+\iint_{S_2}\left[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i+\mu_i\delta\sigma_{ij}l_j+\lambda_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\right]ds$$

$$+\iint_{S_2}\left[\lambda_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)-\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}l_j\right]ds=0 \qquad (4.294)$$

根据变分法基本引理，由(4.294)得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.295)$$

$$\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=0 \qquad (V) \quad (4.296)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \quad (4.297)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}\right)-\beta_{kl}\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}=0 \qquad (4.298)$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}-a_{ij}=0 \qquad (4.299)$$

$$a_{ij}+\beta_{ij}-\lambda_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}=0 \qquad (4.300)$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (4.301)$$

$$\mu_i\delta\sigma_{ij}l_j+\lambda_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)=0 \qquad (S_1) \quad (4.302)$$

$$\lambda_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)-\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}l_j=0 \qquad (S_2) \quad (4.303)$$

由(4.299)式得

$$a_{ij}=\frac{1}{2}\sigma_{ij} \qquad (4.304)$$

已知

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij})$$

故

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}=\frac{\partial\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{kl}}$$

所以

$$\int \frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}} d\sigma_{kl} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{ij})$$

若 $\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}$=常数，故有

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\sigma_{kl} = \varepsilon_{ij} \tag{4.305}$$

由(4.295)式得

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\sigma_{kl} = \frac{1}{2}u_{i,j} + \frac{1}{2}u_{j,i} \tag{4.306}$$

将(4.306)式代入(4.298)式得

$$\beta_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{ij} \tag{4.307}$$

由(4.300)、(4.304)和(4.307)式可得

$$\sigma_{ij} - \lambda_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}} = 0 \tag{4.308}$$

已知 $\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}$，所以

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}} = \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\sigma_{kl}} = \frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial\sigma_{ij}} \tag{4.309}$$

已知 $\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$，所以

$$\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}} \tag{4.310}$$

利用(4.308)、(4.309)、(4.310)式可得

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\sigma_{kl} - \lambda_{k,l}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\right)\left(\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\right) = 0$$

故有

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\sigma_{kl} - \lambda_{k,l}\left(\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial\sigma_{ij}}\right)\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}\right) = 0$$

所以

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\sigma_{kl} - \lambda_{i,j} = 0 \tag{4.311}$$

由(4.305)和(4.295)式可得

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{ij}-\lambda_{i,j}=u_{i,j}-\lambda_{i,j}=0\\&\lambda_i=u_i\end{aligned}\right\}\tag{4.312}$$

由(4.296)式得

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}=\sigma_{ij}\tag{4.313}$$

利用上式，由(4.302)式可得

$$\left.\begin{aligned}&\mu_i+\lambda_i=\mu_i+u_i=0\\&\mu_i=-u_i\end{aligned}\right\}\tag{4.314}$$

由(4.303)、(4.312)和(4.313)式得

$$\lambda_i-\bar{u}_i=u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2)\tag{4.315}$$

方程(4.295～4.315)包括了塑性形变理论问题应满足的四类基本方程及全部拉氏乘子。将拉氏乘子代入(4.292)式，则可得

$$\begin{aligned}G_{db-1}=&\iiint_V\left\{\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{ij}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}\right)+u_i\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\right\}\mathrm{d}v\\&-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{4.316}$$

将(4.316)式化简为

$$\begin{aligned}G_{db-2}=&\iiint_V\left\{-B(\sigma_{ij})+\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+u_i\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\right\}\mathrm{d}v\\&-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{4.317}$$

亦可化简为

$$\begin{aligned}G_{db-3}=&\iiint_V\left\{\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}\right)\right.\\&\left.+u_i\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\right\}\mathrm{d}v-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$-\iint_{S_2} \bar{u}_i \sigma_{ij} l_j \mathrm{d}s \tag{4.318}$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242)式；$B(\sigma_{ij})$为(4.243)式。

泛函(4.316～4.318)式是基于余能密度建立的三类独立变量函数的广义泛函，由它们组成的广义变分原理是无变分约束条件的三类独立变量函数的广义变分原理，塑性形变理论的四类方程是变分原理的变分条件。

2. 三类变量函数的余能广义变分原理3-2

在 u_i，ε_{ij}，σ_{ij} 为独立变量函数时，使泛函(4.316)式（或(4.317)式，或(4.318)式）实现驻值条件的 u_i，ε_{ij}，σ_{ij} 为塑性形变理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为塑性形变理论的四类方程，即平衡方程(4.251)式、应力应变(4.245)式、应变位移(1.32)式、已知力的边界条件(1.39)式和已知位移边界条件(1.40)式。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.317)式得到

$$\begin{aligned}\delta G_{db-2}=&\iiint_V\Big\{\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\Big)\delta\sigma_{ij}+\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)_{,j}+\bar{F}_i\Big]\delta u_i\\&+\Big(\sigma_{ij}-u_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\Big)\delta\varepsilon_{ij}\Big\}\mathrm{d}v\\&-\iint_{S_1}\Big\{(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i\\&+\Big[u_i\delta(\sigma_{ij}l_j)-u_i\delta\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\Big)\Big]\Big\}\mathrm{d}s\\&-\iint_{S_2}\Big[u_i\delta(\sigma_{ij}l_j)-u_i\delta\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\Big)\Big]\mathrm{d}s=0\end{aligned} \tag{4.319}$$

根据变分法基本引理，由(4.319)式得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=0 \qquad (V) \tag{4.320}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \quad (4.321)$$

$$\sigma_{ij}-u_{k,l}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\right)=0 \qquad (V) \quad (4.322)$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (4.323)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.324)$$

将(4.322)式同乘一因子，则得

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \sigma_{ij}\partial \sigma_{kl}}\sigma_{kl}-u_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\frac{\partial^2 B}{\partial \sigma_{ij}\partial \sigma_{kl}}=0$$

由(4.309)和(4.310)式，上式可变为

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \sigma_{ij}\partial \sigma_{kl}}\sigma_{kl}-u_{k,l}=0$$

利用(4.305)式，上式变为

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.325)$$

已知$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}-\varepsilon_{ij}=0$，故有

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \sigma_{ij}\partial \sigma_{kl}}-\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}=0$$

所以

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\frac{\partial^2 B}{\partial \sigma_{ij}\partial \sigma_{kl}}-\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}=0$$

上式对 σ_{ij} 积分变为

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}=0 \qquad (4.326)$$

由(4.326)式可知，在边界S_1与S_2上有

$$\delta\sigma_{ij}l_j=\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right) \qquad (4.327)$$

由此关系式在S_1上消去一项而仅得(4.323)式，在S_2上得(4.324)式。

上述方程(4.320)、(4.321)、(4.325)、(4.323)和(4.324)式正

是塑性形变理论的四类方程，故使泛函(4.316)式(或(4.317)式，或(4.318)式)实现驻值条件的解为塑性形变理论问题的真实解。证毕。

4.4.6　二类变量函数的余能广义变分原理

基于泛函(4.316)式(或(4.317)式，或(4.318)式)，利用规一化方法，把变分条件转化为变分约束条件（或为一般约束条件），于是得到一系列新型变分原理。

1．满足应力应变关系式

设 $\varepsilon_{ij}-\dfrac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=0$，并用$\sigma_{ij}$代替 ε_{ij}，则泛函(4.316)式（或(4.317)式，或(4.318)式）退化为

$$
\begin{aligned}
G_{ab-4}=&\iiint_V[B(\sigma_{ij})+u_i((\sigma_{ij,j})+\bar{F}_i)]\mathrm{d}v\\
&-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{4.328}
$$

其中 $B(\sigma_{ij})$为(4.243)式。

广义变分原理2-4：

当σ_{ij}和 u_i为独立变量函数时，使泛函(4.328)式实现驻值条件的σ_{ij}和u_i 为塑性形变理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力位移关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件；它的一般约束条件为应力应变关系式。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.328)式得

$$
\begin{aligned}
\delta G_{ab-4}=&\iiint_V\left[\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-u_{i,j}\right)\delta\sigma_{ij}+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta u_i\right]\mathrm{d}v\\
&-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$-\iint_{S_2}(\bar{u}_i-u_i)\delta\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s=0 \qquad (4.329)$$

根据变分法基本引理得

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.330)$$

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \quad (4.331)$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (4.332)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.333)$$

利用一般约束条件应力应变关系式，方程(4.330)式可化为应变位移关系式，即

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.334)$$

由上述可知，这个原理的变分条件和一般约束条件正是塑性形变理论问题的四类方程，故泛函(4.328)式实现驻值条件的解为塑性形变理论问题的真实解。证毕。

2. 满足应变位移关系

若 $\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$，并用 $u_{i,j}$ 代替 ε_{ij}，则由泛函(4.316)式可得

$$G_{db-5}=\iiint_V\left\{-B(\sigma_{ij})+\sigma_{ij}u_{i,j}+u_i\left[\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\right\}\mathrm{d}v-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}s$$
$$-\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \qquad (4.335)$$

其中 $B(\sigma_{ij})$ 为(4.243)式。

广义变分原理2-5：

当 σ_{ij} 和 u_i 为独立变量函数时，使泛函(4.335)式实现驻值条件的 σ_{ij} 和 u_i 为塑性形变理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力位移关系式、已知力的边界条件及已知位移边界条件；它的一般约束条件为应变位移关系式，利用此关系式可把变分条件应力位移关系式化为应力应变关系式的形式。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.335)式可得

$$\delta G_{db-s}=\iiint_V\left\{-\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-u_{i,j}\right)\delta\sigma_{ij}+\left[\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\delta u_i\right\}dv-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i ds-\iint_{S_2}(\bar{u}_i-u_i)\delta(\sigma_{ij}l_j)ds=0 \quad (4.336)$$

根据变分法基本引理得

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-u_{i,j}=0 \quad (V) \quad (4.337)$$

$$\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \quad (V) \quad (4.338)$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \quad (S_1) \quad (4.339)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \quad (S_2) \quad (4.340)$$

因(4.337)式的存在，所以有

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}-\frac{\partial u_{i,j}}{\partial\sigma_{kl}}=0$$

故

$$\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}-\frac{\partial u_{i,j}}{\partial\sigma_{kl}}\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}=0$$

上式对 σ_{ij} 进行积分，得

$$\sigma_{ij}-u_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}=0$$

这一项就是(4.336)式中消去的那一项。

由于(4.337)式成立，所以利用一般约束关系和应变位移关系式，可得

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}=0$$

因此在边界$S=S_1+S_2$上，有

$$\delta\sigma_{ij}l_j=\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)$$

式成立。由此得到在边界S_1与S_2上(4.336)式中化简后的形式。

由上述可知，这个原理的变分条件和一般约束条件正是塑性形变理论的四类方程，故使泛函(4.335)式实现驻值条件的解为塑性形变理论问题的真实解。证毕。

3. 满足平衡方程

若$\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0$，可由泛函(4.316)式得到

$$G_{db-6}=\iiint_V[-B(\sigma_{ij})+\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \qquad (4.341)$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242)式，$B(\sigma_{ij})$为(4.243)式。

广义变分原理2-6：

当平衡方程（4.251）式为变分约束条件时，使泛函(4.341)式实现驻值条件的u_i，ε_{ij}，σ_{ij}为塑性形变理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为应力应变关系式、应变位移关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。

证明：在驻值条件，由泛函(4.341)式得

$$\delta G_{db-6}=\iiint_V\left[-\left(\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}-\varepsilon_{ij}\right)\delta\sigma_{ij}+\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\right]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i ds-\iint_{S_1}u_i\delta\sigma_{ij}l_j ds$$

$$-\iint_{S_2}\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}l_j ds=0 \tag{4.342}$$

由于满足变分约束条件

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0$$

所以有

$$\iiint_V \lambda_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j} dv$$

$$=\iiint_V\left[-\lambda_{i,j}\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)+\left(\lambda_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\right)_{,j}\right]dv=0 \tag{4.343}$$

将(4.342)与(4.343)式相加，则有

$$\delta G_{ab-8}=\iiint_V\left[-\left(\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}-\varepsilon_{ij}\right)\delta\sigma_{ij}\right.$$

$$\left.+\left(\sigma_{ij}-\lambda_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\right)\delta\varepsilon_{ij}\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}\left[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i+u_i\delta\sigma_{ij}l_j\right.$$

$$\left.-\lambda_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)\right]ds$$

$$-\iint_{S_2}\left[\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}l_j-\lambda_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)\right]ds=0 \tag{4.344}$$

根据变分法基本引理，在积分区域V 内得

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}-\varepsilon_{ij}=0 \qquad (V) \tag{4.345}$$

$$\sigma_{ij}-\lambda_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}=0 \qquad (V) \tag{4.346}$$

由于(4.345)式成立，故有

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}-\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\sigma_{kl}}=0$$

所以有

$$\int\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\mathrm{d}\sigma_{kl}-\int\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\sigma_{kl}}\mathrm{d}\sigma_{kl}=0$$

由于$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}$为常数，故有

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij}=0 \tag{4.347}$$

由(4.346)式得

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\sigma_{kl}-\lambda_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}=0$$

所以有

$$\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}\sigma_{kl}-\lambda_{i,j}=0$$

利用(4.347)式得

$$\varepsilon_{ij}-\lambda_{i,j}=0 \tag{4.348}$$

由于(4.345)式成立，故有

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}=0$$

由此在边界S_1与S_2上，等式

$$\delta(\sigma_{ij}l_j)=\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right) \tag{4.349}$$

成立。

根据变分基本引理，并考虑到(4.349)式，由(4.344)式中的边界项，得

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{4.350}$$

$$\lambda_i-u_i=0 \qquad (S_1) \tag{4.351}$$

$$\bar{u}_i-\lambda_i=0 \qquad (S_2) \tag{4.352}$$

由于λ_i是由积分域内部化到边界上去的物理量，在数学运算中因

其物理性质具有不变性，所以在边界 S_1 上(4.351)式成立，故有

$$\varepsilon_{ij}-\lambda_{i,j}=\varepsilon_{ij}-u_{i,j}=\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$$

$$(V) \quad (4.353)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.354)$$

由上述可知，这个原理的变分条件和变分约束条件正是塑性形变理论的四类方程，故这个变分原理的解为塑性形变理论问题的真实解。证毕。

4.4.7 标准型余能变分原理

基于泛函(4.316)式（或(4.317)式，或(4.318)式），利用规一化方法，逐步将变分条件转化为变分约束条件和一般约束条件，则得到标准型余能变分原理，也就是塑性形变理论的余能古典变分原理。

1. 满足应力应变关系式

设 $\varepsilon_{ij}-\dfrac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=0$，并用 σ_{ij} 代替 ε_{ij}，则泛函(4.316)式（或(4.317)式，或(4.318)式）退化为(4.328)式的广义泛函。这一步正是把应力应变关系式转化为一般约束条件。

2. 满足平衡方程

设 $\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0$ 成立，则泛函(4.328)式退化为

$$G_{4b-7}=\iiint_V B(\sigma_{ij})\mathrm{d}v-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \qquad (4.353)$$

这一步正是把平衡方程转化为变分约束条件。

3. 满足力的边界条件

在边界 S_1 上，设 $\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0$ 成立，则泛函(4.353)式退化

为

$$G_{db-s}=\iiint_V B(\sigma_{ij})\mathrm{d}v-\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{4.354}$$

这一步是在上面转化的基础上，把已知的力的边界条件转化为变分约束条件。泛函(4.354)式正是塑性形变理论的余能古典变分原理的泛函。

§4.5 塑性流动理论的广义变分原理

4.5.1 势能密度与余能密度的数学形式

为了建立三类变量函数的广义泛函及其广义变分原理，采用参考文献[10]中介绍的势能密度与余能密度。在建立广义泛函过程中，为了进一步阐明思路与方法，采用一般形式的应力应变增量(1.66)式与应力应变增量(1.68)式进行论述，对于各类塑性材料的广义变分原理，在已知载荷路径和屈服条件下，代入具体的应力增量与应变增量的关系式进行类似的论述即可。

1. 势能密度

当应力增量与应变增量线性关系(1.66)式为变分约束条件时，势能密度可表示为

$$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})=\int_0^{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij}(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\mathrm{d}(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})=\quad\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{4.355}$$

2. 余能密度

当应力增量与应变增量线性关系(1.68)式和应变位移(1.64)式为变分约束条件时，余能密度可表示为

$$B(\mathrm{d}\sigma_{ij})=\int_0^{\mathrm{d}\sigma_{ij}}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}(\mathrm{d}\sigma_{ij})\mathrm{d}(\mathrm{d}\sigma_{ij})=\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}u_{i,j} \tag{4.356}$$

平衡方程用应变增量可表示为

$$d\sigma_{ij,j}=\left(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \tag{4.357}$$

考虑到势能原理与余能原理的对偶性及建立广义泛函时变量函数之间的匹配关系，在建立余能广义泛函时，变分约束条件平衡方程应采用(4.357)式。

4.5.2 三类变量函数的势能广义变分原理

1. 建立广义泛函

变分约束条件为

(1) 应力应变增量(1.66)式；

(2) 应变位移增量(1.64)式；

(3) 已知位移边界条件(1.70)式。

当满足上述变分约束条件时，塑性流动理论的势能古典变分原理的泛函可表示为

$$\Pi=\iiint_V \frac{1}{2}d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}dv-\iint_{S_1} d\bar{P}_i du_i ds \tag{4.358}$$

基于泛函(4.358)式，利用拉氏乘子法建立广义变分原理的泛函，于是有

$$\begin{aligned}G_{pa}=&\iiint_V\Big[\frac{1}{2}d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}+a_{ij}\left(d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}\right)\\&+\beta_{ij}\left(d\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)\Big]dv-\iint_{S_1}d\bar{P}_i du_i ds\\&+\iint_{S_2}\lambda_i(du_i-d\bar{u}_i)ds\end{aligned} \tag{4.359}$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}$，$\beta_{ij}=\beta_{ji}$，λ_i 为拉氏乘子。

令$d\sigma_{ij}$，$d\varepsilon_{ij}$，du_i，a_{ij}，β_{ij}，λ_i 均为独立变量函数，利用驻值条件

$$\delta G_{pa}=0 \tag{4.360}$$

确定拉氏乘子，于是有

$$\begin{aligned}\delta G_{pa}=&\iiint_V\Big\{\Big(d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}\Big)\delta\alpha_{ij}\\&+\Big(d\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\Big)\delta\beta_{ij}+\alpha_{ij,j}\delta u_i\\&+\Big[\frac{1}{2}d\sigma_{ij}+\alpha_{ij}-\beta_{kl}\frac{\partial^2 A}{\partial(d\varepsilon_{ij})\partial(d\varepsilon_{kl})}\Big]\delta(d\varepsilon_{ij})\\&+\Big(\frac{1}{2}d\varepsilon_{ij}+\beta_{ij}\Big)\delta(d\sigma_{ij})\Big\}dv\\&-\iint_{S_1}(\alpha_{ij}l_j+d\bar{P}_i)\delta(du_i)ds\\&+\iint_{S_2}[(du_i-d\bar{u}_i)\delta\lambda_i+(\lambda_i-\alpha_{ij}l_j)\delta(du_i)]ds\\=&0\end{aligned} \tag{4.361}$$

根据变分法基本引理，得

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0 \qquad (V) \tag{4.362}$$

$$d\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}=0 \qquad (V) \tag{4.363}$$

$$\alpha_{ij,j}=0 \qquad (V) \tag{4.364}$$

$$\frac{1}{2}d\sigma_{ij}+\alpha_{ij}-\beta_{kl}\frac{\partial^2 A}{\partial(d\varepsilon_{ij})\partial(d\varepsilon_{kl})}=0 \tag{4.365}$$

$$\frac{1}{2}d\varepsilon_{ij}+\beta_{ij}=0 \tag{4.366}$$

$$\alpha_{ij}l_j+d\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{4.367}$$

$$du_i-d\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \tag{4.368}$$

$$\lambda_i-\alpha_{ij}l_j=0 \qquad (S_2) \tag{4.369}$$

由(4.366)式得

$$\beta_{ij}=-\frac{1}{2}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{4.370}$$

由(4.365)与(4.370)式，得

$$a_{ij}=-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$$

利用(4.363)式，上式变为

$$a_{ij}=-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})} \tag{4.371}$$

将上式代入(4.364)式，得

$$a_{ij,j}=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \quad (V) \tag{4.372}$$

由(4.367)式与(4.371)式，可得到

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i=0 \quad (S_1) \tag{4.373}$$

由(4.369)式与(4.371)式，可得到

$$\lambda_i=a_{ij}l_j=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j \tag{4.374}$$

方程式(4.362～4.374)式包括了塑性流动理论的四类基本方程及拉氏乘子。

将拉氏乘子代入(4.359)式，于是得到

$$\begin{aligned}G_{pa-1}=&\iiint_V\left\{\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\right.\right.\\&\left.-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}\right.\\&\left.\left.-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\right\}\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i\mathrm{d}s\\&-\iint_{S_2}\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{4.375}$$

上面泛函(4.375)式可化简为

$$G_{pa-2}=\iiint\limits_V\left\{A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})-\frac{1}{2}\left[\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right]\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)\right\}\mathrm{d}v-\iint\limits_{S_1}\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i\mathrm{d}s$$
$$-\iint\limits_{S_2}\frac{1}{2}\left[\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right]l_j(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i)\mathrm{d}s \quad (4.376)$$

亦可化简为

$$G_{pa-3}=\iiint\limits_V\left\{\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\left[\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right]\right\}\mathrm{d}v$$
$$-\iint\limits_{S_1}\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i\mathrm{d}s-\iint\limits_{S_2}\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i)\mathrm{d}s \quad (4.377)$$

其中$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$是用$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$表示的势能密度(4.355)式。

泛函(4.375～4.377)式是三类独立变量函数的广义泛函，基于它们可以建立无变分约束条件的三类独立变量函数的广义变分原理。

2. 三类变量函数的势能广义变分原理3-1

在$\mathrm{d}u_i$，$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$，$\mathrm{d}\sigma_{ij}$为独立变量函数时，使泛函(4.375)式(或(4.376)式，或(4.377)式）实现驻值条件的$\mathrm{d}u_i$，$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$，$\mathrm{d}\sigma_{ij}$为塑性流动理论问题的真实解。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.377)式得

$$\delta G_{pa-3}=\iiint\limits_V\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})-\frac{1}{2}(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\mathrm{d}u_{i,j})\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\delta(\mathrm{d}u_i)\right\}\mathrm{d}v$$

$$
-\iint_{S_1}\left[\mathrm{d}\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]\delta(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s
$$

$$
-\iint_{S_2}\left[(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i)\delta\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]\mathrm{d}s
$$

$$
=0 \tag{4.378}
$$

根据变分法基本引理，得

$$
\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}=0 \qquad (V) \tag{4.379}
$$

$$
\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}=0 \qquad (V) \tag{4.380}
$$

$$
\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=\mathrm{d}\sigma_{ij,j}=\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \tag{4.381}
$$

$$
\mathrm{d}\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j=0 \qquad (S_1)
$$

或为

$$
\mathrm{d}\bar{P}_i-\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j=\mathrm{d}\bar{P}_i-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j=0 \quad (S_1) \tag{4.382}
$$

$$
\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \tag{4.383}
$$

这些方程正是塑性流动理论的四类基本方程，故使泛函(4.375)式(或(4.376)式，或(4.377)式）实现驻值条件的解为塑性流动理论问题的真实解。证毕。

4.5.3 二类变量函数的势能广义变分原理

基于泛函(4.375)式（或(4.376)式，或(4.377)式)，利用规一化方法，把变分条件转化为变分约束条件（或为一般约束条件)，可获得一系列新型变分原理。

1．满足应力应变增量关系式

设$\mathrm{d}\sigma_{ij}-\dfrac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}=0$，并用 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$ 代替 $\mathrm{d}\sigma_{ij}$，则泛函(4.377)

式退化为

$$G_{pa-4}=\iiint_V\left[A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)\right]dv-\iint_{S_1}\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i)\mathrm{d}s \quad (4.384)$$

其中$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$是用$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$表示的势能密度(4.355)式。

广义变分原理2-1：

在$\mathrm{d}u_i$和$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$为独立变量函数时，使泛函(4.384)式实现驻值条件的$\mathrm{d}u_i$和$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$为塑性流动理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应变位移关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件；它的一般约束条件为应力应变关系式。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.384)式，可得到

$$\delta G_{pa-4}=\iiint_V\left[-\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\delta\mathrm{d}u_i\right]\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\left\{\mathrm{d}\bar{P}_i-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right\}\delta\mathrm{d}u_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\left[(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]\mathrm{d}s=0 \quad (4.385)$$

根据变分法基本引理，得

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}=0 \quad (V) \quad (4.386)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \quad (V) \quad (4.387)$$

$$d\bar{P}_i-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j=0 \qquad (S_1) \quad (4.388)$$

$$du_i-d\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.389)$$

由上述可知，这个原理的变分条件和一般约束条件为塑性流动理论的四类基本方程，故这个原理的解为塑性流动理论问题的真实解。证毕。

又设$d\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}=0$，并用$d\sigma_{ij}$局部的代替$d\varepsilon_{ij}$，则由泛函(4.376)式得到

$$G_{pa-5}=\iiint\limits_V\left[A(d\varepsilon_{ij})-d\sigma_{ij}\left(d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}\right)\right]dv-\iint\limits_{S_1}d\bar{P}_idu_ids-\iint\limits_{S_2}(du_i-d\bar{u}_i)d\sigma_{ij}l_jds \quad (4.390)$$

其中$A(d\varepsilon_{ij})$是用$d\varepsilon_{ij}$表示的势能密度(4.355)式。

由泛函(4.390)式表示的广义变分原理是二类独立变量的原理；它的变分约束条件为应力应变关系式；它的变分条件为平衡方程、应变位移关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。

2. 满足应变位移增量关系式

设$d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0$，但不作变量代换，于是由泛函(4.375)式得

$$G_{pa-6}=\iiint\limits_V A(d\varepsilon_{ij})dv-\iint\limits_{S_1}d\bar{P}_idu_ids-\iint\limits_{S_2}\frac{1}{2}\left[d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right]l_j(du_i-d\bar{u}_i)ds \quad (4.391)$$

其中$A(d\varepsilon_{ij})$是用$d\varepsilon_{ij}$表示的势能密度(4.355)式。

广义变分原理2-2：

当应变位移(1.64)式为变分约束条件时，使泛函(4.391)式实现驻值条件的 du_i，$d\varepsilon_{ij}$，$d\sigma_{ij}$ 为塑性流动理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力应变关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.391)式得

$$\delta G_{pa-6}=\iiint_V \frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\delta(d\varepsilon_{ij})dv - \iint_{S_1} d\bar{P}_i\delta(du_i)ds - \iint_{S_2}\Big[(du_i-d\bar{u}_i)\delta\Big(\frac{1}{2}d\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\Big)l_j + \frac{1}{2}\Big(d\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\Big)l_j\delta(du_i)\Big]ds=0 \tag{4.392}$$

因具有变分约束条件

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0$$

取拉氏乘子 $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$，故有

$$\iiint_V \lambda_{ij}\delta\Big(d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}\Big)dv = \iiint_V[\lambda_{ij}\delta(d\varepsilon_{ij})+\lambda_{ij,j}\delta(du_i)]dv - \iint_{S=S_1+S_2}\lambda_{ij}l_j\delta(du_i)ds=0 \tag{4.393}$$

将(4.392)式与(4.393)式相加，则得

$$\delta G_{pa-6}=\iiint_V\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}+\lambda_{ij}\Big)\delta(d\varepsilon_{ij})+\lambda_{ij,j}\delta(du_i)\Big]dv$$

$$
\begin{aligned}
&-\iint_{S_1}(\lambda_{ij}l_j+\mathrm{d}\bar{P}_i)\delta(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_2}\Big\{(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i)\delta\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\ \frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\\
&+\left[\lambda_{ij}l_j+\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]\delta(\mathrm{d}u_i)\Big\}\mathrm{d}s\\
=&\,0 \qquad (4.394)
\end{aligned}
$$

根据变分法基本引理，得

$$\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}+\lambda_{ij}=0 \qquad (V) \qquad (4.395)$$

$$\lambda_{ij,j}=0 \qquad (V) \qquad (4.396)$$

$$\lambda_{ij}l_j+\mathrm{d}\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \qquad (4.397)$$

$$\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \qquad (4.398)$$

$$\lambda_{ij}=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right) \qquad (S_2) \qquad (4.399)$$

由于 λ_{ij} 是由积分域内化到边界上的物理量，因其物理性质具有不变性，所以在积分域内(4.399)式亦成立。将 λ_{ij} 之值代入(4.395)式与(4.396)式可得

$$\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}-\mathrm{d}\sigma_{ij}=0 \qquad (V) \qquad (4.400)$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=-\mathrm{d}\sigma_{ij,j}\\
&=-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (4.401)
\end{aligned}
$$

将λ_{ij}之值代入边界S_1上的(4.397)式得

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\ \frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i\\
&=\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i=\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i=0
\end{aligned}
$$

由上述可知，这个原理的变分条件和变分约束条件正是塑性

流动理论的四类基本方程，故这个原理的解为塑性流动理论问题的真实解。证毕。

3. 满足增量形式的平衡方程

设 $\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0$，则由泛函(4.375)式，可得

$$G_{pa-7}=\iiint_V\left(-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\right)\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\left\{\mathrm{d}\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right\}\mathrm{d}u_i\mathrm{d}s+\iint_{S_2}\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}s \quad (4.402)$$

其中$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$为用$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$表示的势能密度为(4.355)式。

广义变分原理2-3：

当平衡方程$\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0$为变分约束条件时，使泛函(4.402)式实现驻值条件的$\mathrm{d}u_i$，$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$，$\mathrm{d}\sigma_{ij}$为塑性流动理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为应力应变关系式、应变位移关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.402)式得

$$\begin{aligned}\delta G_{pa-7}=&\iiint_V\left[-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})-\frac{1}{2}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})\right]\mathrm{d}v\\&-\iint_{S_1}\left\{\left[\mathrm{d}\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]\delta(\mathrm{d}u_i)\right.\\&\left.-\mathrm{d}u_i\delta\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right\}\mathrm{d}s\\&+\iint_{S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\,\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\mathrm{d}s=0\end{aligned} \quad (4.403)$$

由于具有变分约束条件

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0$$

取拉氏乘子为λ_i，故有

$$\iiint_V \lambda_i\delta\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\mathrm{d}v$$

$$=\iiint_V -\lambda_{i,j}\delta\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S=S_1+S_2}\lambda_i\delta\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\mathrm{d}s=0 \qquad (4.404)$$

将(4.403)式与(4.404)式相加，则得

$$\delta G_{pa-7}=\iiint_V\left\{-\frac{1}{2}(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}+\lambda_{i,j})\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\lambda_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\right)\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\right\}\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\left\{\left[\mathrm{d}\bar{P}_i-\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]\delta(\mathrm{d}u_i)\right.$$

$$\left.-(\lambda_i+\mathrm{d}u_i)\delta\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right\}\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_2}(\lambda_i+\mathrm{d}\bar{u}_i)\delta\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\mathrm{d}s$$

$$=0 \qquad (4.405)$$

根据变分法基本引理，得

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\lambda_{i,j}-\frac{1}{2}\lambda_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.406)$$

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}+\lambda_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}=0 \qquad (V) \quad (4.407)$$

$$\mathrm{d}\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j=0 \qquad (S_1) \quad (4.408)$$

$$\lambda_i + \mathrm{d}u_i = 0 \qquad (S_1) \quad (4.409)$$

$$\lambda_i + \mathrm{d}\bar{u}_i = 0 \qquad (S_2) \quad (4.410)$$

由(4.409)式可知$\lambda_i = -\mathrm{d}u_i$。因为$\lambda_i$是由积分域内部化到边界上的物理量，故在积分域内有$\lambda_i = -\mathrm{d}u_i$。

将(4.409)式代入(4.406)式，得

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j} - \frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i} = 0 \qquad (V) \quad (4.411)$$

将(4.409)式代入(4.407)式，并考虑到(4.411)式及应力增量与应变增量成线性关系，则得

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} - \frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\mathrm{d}\varepsilon_{kl}$$

$$= \mathrm{d}\sigma_{ij} - \frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})} = 0 \qquad (V) \quad (4.412)$$

在边界S_2上有

$$\mathrm{d}u_i - \mathrm{d}\bar{u}_i = 0 \qquad (S_2) \quad (4.413)$$

由上述可知，这个原理的变分条件为应变位移关系式、应力应变关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件；它的变分约束条件为平衡方程。这些方程正是塑性流动理论的四类基本方程，故这个变分原理的解是塑性流动理论问题的真实解。证毕。

4.5.4 标准型势能变分原理

基于泛函(4.375)式（或(4.376)式，或(4.377)式)，利用规一化方法，逐步将变分条件转化为变分约束条件或一般约束条件，则得到标准型势能变分原理的泛函。

1．满足应力应变增量关系式

设$\mathrm{d}\sigma_{ij} - \frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})} = 0$，并用$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$代替$\mathrm{d}\sigma_{ij}$，则泛函(4.377)式退化为(4.384)式型的广义泛函。这一步正是把应力应变关系式转化为一般约束条件。

2．满足应变位移增量关系式

设 $d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0$，但不作变量代替，于是泛函(4.384)式退化为

$$G_{p\sigma-\varepsilon}=\iiint_V A(d\varepsilon_{ij})dv-\iint_{S_1}d\bar{P}_i du_i ds$$

$$-\iint_{S_2}\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j(du_i-d\bar{u}_i)ds \qquad (4.414)$$

这是具有一个独立变量函数的泛函，由它形成的变分原理具有变分约束条件（应变位移关系式），变分条件为平衡方程、已知力的边界条件和已知位移边界条件；它的一般约束条件为应力应变关系式。

3．满足位移增量边界条件

设 $du_i-d\bar{u}_i=0$ 在 S_2 上成立，泛函(4.414)式退化为标准型势能变分原理的泛函，亦称势能古典变分原理的泛函

$$\Pi=\iiint_V A(d\varepsilon_{ij})dv-\iint_{S_1}d\bar{P}_i du_i ds \qquad (4.415)$$

4.5.5 三类变量函数的余能广义变分原理

1．建立广义泛函

变分约束条件为

(1) 应力增量与应变增量(1.68)式；

(2) 应变增量与位移增量(1.64)式；

(3) 平衡方程(4.357)式；

(4) 已知力的边界条件(1.69)式。

当满足上述变分约束条件时，塑性流动理论的余能古典变分原理的泛函可表示为

$$\mathscr{L}=\iiint_V \frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}u_{i,j}\mathrm{d}v-\iint_{S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \qquad (4.416)$$

基于(4.416)式，利用拉氏乘子法建立广义变分原理的广义泛函，则有

$$G_{pb}=\iiint_V\Big[\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}u_{i,j}+\alpha_{ij}\Big(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\Big)$$
$$+\beta_{ij}\Big(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}\Big)+\lambda_i\Big(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\Big)_{,j}\Big]\mathrm{d}v$$
$$+\iint_{S_1}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i)\mu_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \qquad (4.417)$$

其中$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$；$\beta_{ij}=\beta_{ji}$；λ_i和μ_i为拉氏乘子。

令$\mathrm{d}\sigma_{ij}$，$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$，$\mathrm{d}u_i$，$\alpha_{ij}$，$\beta_{ij}$，$\lambda_i$，$\mu_i$ 均为独立变量函数，利用驻值条件

$$\delta G_{pb}=0 \qquad (4.418)$$

确定拉氏乘子，则有

$$\delta G_{pb}=\iiint_V\Big[\Big(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\Big)\delta\alpha_{ij}$$
$$+\Big(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}\Big)\delta\beta_{ij}+\Big(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\Big)_{,j}\delta\lambda_i$$
$$+\Big(\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\beta_{kl}\frac{\partial^2 B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})\partial(\mathrm{d}\sigma_{kl})}\Big)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})$$
$$+\Big(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}-\alpha_{ij}\Big)\delta(\mathrm{d}u_{i,j})+\Big(\alpha_{ij}+\beta_{ij}$$
$$-\lambda_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\Big)\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\Big]\mathrm{d}v$$
$$+\iint_{S_1}\Big[(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i)\delta\mu_i+\mu_i\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)$$
$$+\lambda_i\delta\Big(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\Big)\Big]\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\Big[\mathrm{d}\bar{u}_i\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)$$

$$-\lambda_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)\Big]ds=0 \qquad (4.419)$$

根据变分法基本引理，由(4.419)式得

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.420)$$

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(d\sigma_{ij})}=0 \qquad (V) \quad (4.421)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V) \quad (4.422)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}du_{i,j}+\frac{1}{2}du_{j,i}\right)-\beta_{kl}\frac{\partial^2 B}{\partial(d\sigma_{ij})\partial(d\sigma_{kl})}=0 \qquad (4.423)$$

$$\frac{1}{2}d\sigma_{ij}-a_{ij}=0 \qquad (4.424)$$

$$a_{ij}+\beta_{ij}-\lambda_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(d\varepsilon_{ij})\partial(d\varepsilon_{kl})}=0 \qquad (4.425)$$

由于(4.420)式与(4.421)式成立，则由(4.423)式可得

$$\beta_{kl}=\frac{1}{2}d\sigma_{kl} \qquad (4.426)$$

由(4.424)式，得

$$a_{ij}=\frac{1}{2}d\sigma_{ij} \qquad (4.427)$$

由于(4.426)式、(4.427)式、(4.421)式和(4.420)式成立，由(4.425)可得到

$$\lambda_{k,l}=d\varepsilon_{kl}=du_{k,l}$$

所以

$$\lambda_i=du_i \qquad (4.428)$$

由于(4.421)式和其逆关系成立，故有

$$\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}-d\sigma_{ij}=0 \qquad (4.429)$$

由于(4.429)式成立，在边界 $S=S_1+S_2$ 上，可得

$$\mu_i = -\lambda_i = -du_i \qquad (S_1) \qquad (4.430)$$

$$d\sigma_{ij} l_j - d\bar{P}_i = 0 \qquad (S_1) \qquad (4.431)$$

$$d\bar{u}_i - \lambda_i = d\bar{u}_i - du_i = 0 \qquad (S_2) \qquad (4.432)$$

方程(4.420～4.432)式包括了塑性流动问题的四类基本方程及全部拉氏乘子。将拉氏乘子代入(4.417)式，于是可得

$$\begin{aligned} G_{pb-1} = & \iiint_V \left[\frac{1}{2} d\sigma_{ij} du_{i,j} + \frac{1}{2} d\sigma_{ij} \left(d\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} du_{i,j} \right.\right. \\ & \left. - \frac{1}{2} du_{j,i} \right) + \frac{1}{2} d\sigma_{ij} \left(d\varepsilon_{ij} - \frac{\partial B}{\partial (d\sigma_{ij})} \right) \\ & \left. + du_i \left(\frac{\partial A}{\partial (d\varepsilon_{ij})} \right)_{,j} \right] dv \\ & - \iint_{S_1} [(d\sigma_{ij} l_j - d\bar{P}_i) du_i] ds \\ & - \iint_{S_2} d\bar{u}_i d\sigma_{ij} l_j ds \end{aligned} \qquad (4.433)$$

对上式进行化简，可得

$$\begin{aligned} G_{pb-2} = & \iiint_V \left[-B(d\sigma_{ij}) + d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + du_i \left(\frac{\partial A}{\partial (d\varepsilon_{ij})} \right)_{,j} \right] dv \\ & - \iint_{S_1} (d\sigma_{ij} l_j - d\bar{P}_i) du_i ds \\ & - \iint_{S_2} d\bar{u}_i d\sigma_{ij} l_j ds \end{aligned} \qquad (4.434)$$

亦可化简为

$$\begin{aligned} G_{pb-3} = & \iiint_V \left\{ \frac{1}{2} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} d\sigma_{ij} \left(d\varepsilon_{ij} - \frac{\partial B}{\partial (d\sigma_{ij})} \right) \right. \\ & \left. + du_i \left(\frac{\partial A}{\partial (d\varepsilon_{ij})} \right)_{,j} \right\} dv \\ & - \iint_{S_1} (d\sigma_{ij} l_j - d\bar{P}_i) du_i ds \end{aligned}$$

$$-\iint_{S_2} \mathrm{d}\bar{u}_i \mathrm{d}\sigma_{ij} l_j \mathrm{d}s \tag{4.435}$$

其中$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$为用$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$表示的(4.355)式；$B(\mathrm{d}\sigma_{ij})$为用$\mathrm{d}\sigma_{ij}$表示的(4.356)式。

泛函(4.433～4.435)式是基于余能密度建立的三类变量函数的广义泛函，由它们形成的广义变分原理是无变分约束条件的三类独立变量函数的广义变分原理，并以塑性流动理论的四类基本方程为其变分条件。

2．三类变量函数的余能广义变分原理3-2

当$\mathrm{d}u_i$，$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$，$\mathrm{d}\sigma_{ij}$为独立变量函数时，使泛函(4.433)式(或(4.434)式，或(4.435)式）实现驻值条件的$\mathrm{d}u_i$，$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$，$\mathrm{d}\sigma_{ij}$为塑性流动理论问题的真实解。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.434)式可得

$$\begin{aligned}
\delta G_{pb-2} = & \iiint_V \left[\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij} - \frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}\right)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})\right. \\
& + \left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\delta(\mathrm{d}u_i) + \left(\mathrm{d}\sigma_{ij}\right. \\
& \left.\left. - \mathrm{d}u_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\right)\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\right]\mathrm{d}v \\
& - \iint_{S_1}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j - \mathrm{d}\bar{P}_i)\delta(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s \\
& - \iint_{S_1}\left[\mathrm{d}u_i\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j) - \mathrm{d}u_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)\right]\mathrm{d}s \\
& - \iint_{S_2}\left[\mathrm{d}\bar{u}_i\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j) - \mathrm{d}u_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)\right]\mathrm{d}s \\
= & 0
\end{aligned} \tag{4.436}$$

首先论证，若

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} - \frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})} = 0$$

成立，并为线性关系，则有

$$\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}}{\mathrm{d}\sigma_{kl}} - \frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\frac{\partial^2 B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})\partial(\mathrm{d}\sigma_{kl})}=0$$

其中考虑到

$$\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}=\text{常数}$$

对上式进行积分，则有

$$\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\mathrm{d}\varepsilon_{kl}-\mathrm{d}\sigma_{ij}=0 \qquad (4.437)$$

或写为

$$\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}-\mathrm{d}\sigma_{ij}=0 \qquad (4.438)$$

根据变分法基本引理，由泛函变分方程(4.436)式可得

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}=0 \qquad (V) \quad (4.439)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V) \quad (4.440)$$

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}-\mathrm{d}u_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}=0 \qquad (V) \quad (4.441)$$

考虑到(4.437)式，由(4.441)式得

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.442)$$

考虑到(4.438)式，在边界S_1上消去一项，保留

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (4.443)$$

项。在边界S_2上，有

$$\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.444)$$

方程(4.439～4.444)式正是塑性流动理论问题的四类基本方程，故这个原理的解为塑性流动理论问题的真实解。证毕。

4.5.6 二类变量函数的余能广义变分原理

基于泛函(4.433)式（或(4.434)式，或(4.435)式），利用规

一化方法，把变分条件转化为变分约束条件（或为一般约束条件），于是得到已知的广义泛函及一系列新型广义泛函，基于这些新型泛函可以建立广义变分原理。

1. 满足应力应变增量关系式

设 $d\varepsilon_{ij}-\dfrac{\partial B}{\partial(d\sigma_{ij})}=0$，并用 $d\sigma_{ij}$ 代替 $d\varepsilon_{ij}$，则泛函(4.433)式（或(4.434)式，或(4.435)式）退化为

$$
\begin{aligned}
G_{pb-4}=&\iiint_V\left[B(d\sigma_{ij})+du_i(d\sigma_{ij,j})\right]dv\\
&-\iint_{S_1}(d\sigma_{ij}l_j-d\bar{P}_i)du_i ds-\iint_{S_2}d\bar{u}_i d\sigma_{ij}l_j ds
\end{aligned}
\tag{4.445}
$$

其中 $B(d\sigma_{ij})$ 是用 $d\sigma_{ij}$ 表示的余能密度(4.356)式。

广义变分原理2-4：

在 $d\sigma_{ij}$ 和 du_i 为独立变量函数时，使泛函(4.445)式实现驻值条件的 $d\sigma_{ij}$ 和 du_i 为塑性流动理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力位移增量关系式、已知力的边界条件及已知位移边界条件；它的一般约束条件为应力增量与应变增量关系式。这正是塑性流动理论问题的 Hellinge-rissner's原理的形式。

2. 满足应变位移增量关系式

设 $d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0$，但不作变量代换，于是由泛函(4.433)式得

$$
\begin{aligned}
G_{pb-5}=&\iiint_V\Big[-B(d\sigma_{ij})+\frac{1}{2}d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}+\frac{1}{2}d\sigma_{ij}du_{i,j}\\
&+du_i\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\Big]dv-\iint_{S_1}(d\sigma_{ij}l_j-d\bar{P}_i)du_i ds
\end{aligned}
$$

$$-\iint_{S_2} d\bar{u}_i d\sigma_{ij} l_j ds \qquad (4.446)$$

其中 $A(d\varepsilon_{ij})$与 $B(d\sigma_{ij})$ 是用$d\varepsilon_{ij}$与$d\sigma_{ij}$表示的（4.355）式与(4.356)式。

广义变分原理2-5：

当应变位移(1.64)式为变分约束条件时，使泛函(4.446)式实现驻值条件的$d\sigma_{ij}$，$d\varepsilon_{ij}$，du_i 为塑性流动理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力应变增量关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.446)式得

$$\delta G_{pb-5}=\iiint_V\Big[\Big(\frac{1}{2}d\varepsilon_{ij}+\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{\partial B}{\partial(d\sigma_{ij})}\Big)\delta(d\sigma_{ij})$$

$$+\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}-du_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(d\varepsilon_{ij})\partial(d\varepsilon_{kl})}\Big)\delta(d\varepsilon_{ij})$$

$$+\frac{1}{2}d\sigma_{ij}\delta(du_{i,j})+\Big(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\Big)_{,j}\delta(du_i)\Big]dv$$

$$-\iint_{S_1}\Big[(d\sigma_{ij}l_j-d\bar{P}_i)\delta(du_i)+du_i\delta(d\sigma_{ij}l_j)$$

$$-du_i\delta\Big(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\Big)\Big]ds-\iint_{S_2}\Big[d\bar{u}_i\delta(d\sigma_{ij}l_j)$$

$$-du_i\delta\Big(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\Big)\Big]ds=0 \qquad (4.447)$$

因具有变分约束条件

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0$$

取拉氏乘子 $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$，故有

$$\iiint_V\lambda_{ij}\delta(d\varepsilon_{ij}-du_{i,j})dv$$

$$
=\iiint_V [\lambda_{ij}\delta(d\varepsilon_{ij})+\lambda_{ij,j}\delta(du_i)]dv
$$

$$
-\iint_{S=S_1+S_2} \lambda_{ij}l_j\delta(du_i)ds=0 \qquad (4.448)
$$

将(4.447)式与(4.448)式相加，则得

$$
\begin{aligned}
\delta G_{pb-5}=&\iiint_V\Big\{\Big[\frac{1}{2}d\varepsilon_{ij}+\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{\partial B}{\partial(d\sigma_{ij})}\Big]\delta(d\sigma_{ij})\\
&+\Big[\frac{1}{2}d\sigma_{ij}+\lambda_{ij}-du_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(d\varepsilon_{ij})\partial(d\varepsilon_{kl})}\Big]\delta(d\varepsilon_{ij})\\
&+\Big[\lambda_{ij,j}-\frac{1}{2}d\sigma_{ij,j}+\Big(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\Big)_{,j}\Big]\delta(du_i)\Big\}dv\\
&-\iint_{S_1}\Big[(d\sigma_{ij}l_j-d\overline{P}_i)\delta(du_i)+du_i\delta(d\sigma_{ij}l_j)\\
&-du_i\delta\Big(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\Big)-\Big(\frac{1}{2}d\sigma_{ij}l_j\\
&-\lambda_{ij}l_j\Big)\delta(du_i)\Big]ds-\iint_{S_2}\Big[d\overline{u}_i\delta(d\sigma_{ij}l_j)\\
&-du_i\delta\Big(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\Big)-\Big(\frac{1}{2}d\sigma_{ij}l_j\\
&-\lambda_{ij}l_j\Big)\delta(du_i)\Big]ds=0
\end{aligned} \qquad (4.449)
$$

根据变分法基本引理，得

$$
\frac{1}{2}d\varepsilon_{ij}+\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{\partial B}{\partial(d\sigma_{ij})}=0 \quad (V) \quad (4.450)
$$

考虑到变分约束条件和应变位移增量关系式，上式变为

$$
d\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(d\sigma_{ij})}=0 \qquad (V) \quad (4.451)
$$

由(4.449)式，可得

$$
\frac{1}{2}d\sigma_{ij}+\lambda_{ij}-du_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(d\varepsilon_{ij})\partial(d\varepsilon_{kl})}=0 \qquad (4.452)
$$

考虑到变分约束条件和应变位移增量关系式与(4.451)式的成立，由上式可求得

$$\lambda_{ij}=\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij} \tag{4.453}$$

由(4.449)式，可得

$$\lambda_{ij,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij,j}+\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \tag{4.454}$$

将 λ_{ij} 之值代入上式得

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \tag{4.455}$$

在边界 $S=S_1+S_2$ 上，考虑到(4.451)式成立，及 λ_{ij} 之值，则得

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}P_i=0 \qquad (S_1) \tag{4.456}$$

$$\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i=0 \qquad (S_2) \tag{4.457}$$

由上述可知，这个原理的变分条件和变分约束条件正是塑性流动理论问题的四类基本方程，故这个原理的解为塑性流动理论问题的真实解。证毕。

3. 满足增量形式的平衡方程

若 $\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0$，则由泛函(4.433)式得

$$G_{pb-6}=\iiint_V(-B(\mathrm{d}\sigma_{ij})+\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\mathrm{d}v-\iint_{S_1}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i)\mathrm{d}u_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{4.458}$$

其中 $B(\mathrm{d}\sigma_{ij})$ 是用 $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ 表示的余能密度(4.356)式。

广义变分原理2-6：

当平衡方程(4.357)式为变分约束条件时，使泛函(4.458)式实现驻值条件的 $\mathrm{d}u_i$，$\mathrm{d}\sigma_{ij}$，$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$ 为塑性流动理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为应力应变增量关系式、应变位移增量关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.458)式得

$$\delta G_{pb-s}=\iiint\limits_V\left[\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}\right)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})\right.$$

$$\left.+\mathrm{d}\sigma_{ij}\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\right]\mathrm{d}v-\iint\limits_{S_1}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i)\delta(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s$$

$$-\iint\limits_{S_1}\mathrm{d}u_i\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s$$

$$-\iint\limits_{S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s=0 \tag{4.459}$$

由于具有变分约束条件

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0$$

所以有

$$\iiint\limits_V\lambda_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\mathrm{d}v$$

$$=\iiint\limits_V-\lambda_{i,j}\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\mathrm{d}v$$

$$+\iint\limits_{S=S_1+S_2}\lambda_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)\mathrm{d}s=0 \tag{4.460}$$

将(4.459)式与(4.460)式相加，则有

$$\delta G_{pb-s}=\iiint\limits_V\left\{\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}\right)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})\right.$$

$$\left.+\left[\mathrm{d}\sigma_{ij}-\lambda_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\right]\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\right\}\mathrm{d}v$$

$$-\iint\limits_{S_1}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i)\delta(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s$$

$$-\iint\limits_{S_1}\left[\mathrm{d}u_i\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)-\lambda_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)\right]\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_2}\left[d\bar{u}_i\delta(d\sigma_{ij}l_j)-\lambda_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)\right]ds=0$$

(4.461)

根据变分法基本引理，得

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(d\sigma_{ij})}=0 \quad (V) \quad (4.462)$$

$$d\sigma_{ij}-\lambda_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(d\varepsilon_{ij})\partial(d\varepsilon_{kl})}=0 \quad (V) \quad (4.463)$$

$$d\sigma_{ij}l_j-d\bar{P}_i=0 \quad (S_1) \quad (4.464)$$

由于(4.462)式成立，故得

$$d\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}=0$$

因此，在边界S_1上有

$$\lambda_i-du_i=0 \quad (S_1) \quad (4.465)$$

在边界S_2上有

$$\lambda_i-d\bar{u}_i=0 \quad (S_2) \quad (4.466)$$

因λ_i是由积分域内部化到边界上去的物理量，所以λ_i在积分域内亦为

$$\lambda_i=du_i \quad (4.467)$$

将上式代入(4.463)式，因考虑(4.462)式成立，于是得到

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0 \quad (V) \quad (4.468)$$

由上述分析可知，这个原理的变分条件与变分约束条件正是塑性流动理论问题的四类基本方程，故这个原理的解为塑性流动理论问题的真实解。证毕。

4.5.7 标准型余能变分原理

基于泛函(4.433)式（或(4.434)式，或(4.435)式），利用规一化方法，逐步将变分条件转化为变分约束条件（或为一般约束

条件)，则得到标准型余能变分原理的泛函，也就是塑性流动理论问题的余能古典变分原理的泛函。

1．满足应变位移增量关系式

设$d\varepsilon_{ij}-\dfrac{\partial B}{\partial(d\sigma_{ij})}=0$，并用 $d\sigma_{ij}$ 代替 $d\varepsilon_{ij}$，则泛函(4.433)式（或(4.434)式，或(4.435)式)退化为(4.445)式型的广义泛函。这一步正是把应力应变增量关系式转化为一般约束条件。

2．满足增量形式的平衡方程

设 $d\sigma_{ij,j}=0$ 成立，则泛函(4.445)式退化为

$$G_{pb-7}=\iiint\limits_{V}B(d\sigma_{ij})dv-\iint\limits_{S_1}(d\sigma_{ij}l_j-d\bar{P}_i)du_i ds$$

$$-\iint\limits_{S_2}d\bar{u}_i d\sigma_{ij}l_j ds \tag{4.469}$$

这一步是把应力应变增量关系转化为一般约束条件之后，再把平衡方程转化为变分约束条件。

3．满足增量形式的力的边界条件

在边界S_1上，设 $d\sigma_{ij}l_j-d\bar{P}_i=0$ 成立，则泛函(4.469)式退化为

$$G_{pb-8}=\iiint\limits_{V}B(d\sigma_{ij})dv-\iint\limits_{S_2}d\bar{u}_i d\sigma_{ij}l_j ds \tag{4.470}$$

这一步是把力的边界条件转化为变分约束条件。泛函(4.470)式是塑性流动理论的余能古典变分原理的泛函。

§4.6　蠕变理论的广义变分原理

4.6.1　势能密度与余能密度的数学形式

为了建立三类独立变量函数的广义泛函及其广义变分原理，

必需采用新型势能密度与余能密度的数学形式。因为通常的势能密度与余能密度的数学形式是应用了应力应变速度关系式进行了变量代换，消去了一类变量函数，使应力应变速度关系式成为变分原理中的变量函数之间的一般约束条件。下面论述过程中略去弹性变形。

1. 势能密度

在应力应变速度(1.94)式（或(1.95)式）为变分约束条件时，势能密度(1.101)式变为

$$A(\dot{\varepsilon}_{ij})=\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \tag{4.471}$$

2. 余能密度

在应力应变速度(1.96)式（或(1.97)式）及应变速度与位移速度(1.93)式为变分约束条件时，余能密度(1.102)式变为

$$B(\sigma_{ij})=\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\dot{u}_{ij} \tag{4.472}$$

若平衡方程(1.92)式用应变速度表示，其形式为

$$\begin{aligned}&(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}+\delta_{ij}\sigma_{ep})_{,j}+F_i\\&=(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+F_i=0\qquad（略去弹性变形）\end{aligned} \tag{4.473}$$

考虑到势能原理与余能原理的对偶性及建立广义泛函时变量函数之间的匹配关系，在建立余能广义泛函时，变分约束条件的平衡方程应采用(4.473)式。

4.6.2 三类变量函数的势能广义变分原理[11]

1. 建立广义泛函

变分约束条件为

(1) 应力应变速度(1.94)式（或(1.95)式）；

(2) 应变速度与位移速度(1.93)式；

(3) 位移速度边界条件(1.99)式；

(4) 不可压缩条件(1.100)式。

满足上述变分约束条件时，稳定蠕变流动理论的势能古典变分原理的泛函(3.57)式变为

$$\Pi=\iiint_V\left[\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}-F_i\dot{u}_i\right]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i ds \qquad (4.474)$$

基于泛函(4·474)式，利用拉氏乘子法建立广义变分原理的泛函，则有

$$\begin{aligned}G_{ca}=&\iiint_V\left[\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}-F_i\dot{u}_i+a_{ij}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right)+\beta_{ij}(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})\right]dv\\&-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i ds+\iint_{S_2}\lambda_i(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)ds\end{aligned} \qquad (4.475)$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}$; $\beta_{ij}=\beta_{ji}$; λ_i 为拉氏乘子。

令 σ'_{ij}, $\dot{e}_{ij}$, $\dot{u}_i$, a_{ij}, β_{ij}, λ_i 均为独立变量函数时，利用驻值条件

$$\delta G_{ca}=0 \qquad (4.476)$$

确定拉氏乘子，于是有

$$\begin{aligned}\delta G_{ca}=&\iiint_V\left[\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right)\delta a_{ij}\right.\\&+(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})\delta\beta_{ij}+(a_{ij,j}-F_i)\delta\dot{u}_i\\&+\left(\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}+a_{ij}-2\mu g(H)\beta_{ij}\right)\delta\dot{e}_{ij}\\&\left.+\left(\frac{1}{1+\mu}\dot{e}_{ij}+\beta_{ij}\right)\delta\sigma'_{ij}\right]dv\\&-\iint_{S_1}(a_{ij}l_j+\bar{P}_i)\delta\dot{u}_i ds+\iint_{S_2}[(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)\delta\lambda_i\\&+(\lambda_i-a_{ij}l_j)\delta\dot{u}_i]ds=0\end{aligned} \qquad (4.477)$$

由于 $\delta\dot{e}_{ii}=0$，故式中积分项有下面关系式成立：

$$\iiint_V \left(\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}+a_{ij}-2\mu g(H)\beta_{ij}\right)\delta\dot{\varepsilon}_{ij}\mathrm{d}v$$

$$=\iiint_V \left(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}+a_{ij}-2\mu g(H)\beta_{ij}\right)\delta\dot{\varepsilon}_{ij}\mathrm{d}v \qquad (4.478)$$

由于$\delta\sigma'_{ij}$，$\delta\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\delta a_{ij}$，$\delta\beta_{ij}$，$\delta\dot{u}_i$，$\delta\lambda_i$均为独立的任意变量函数，根据变分法基本引理得

$$\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.479)$$

$$\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}=0 \qquad (V) \quad (4.480)$$

$$\frac{1}{1+\mu}\dot{\varepsilon}_{ij}+\beta_{ij}=0 \qquad (V) \quad (4.481)$$

$$a_{ij,j}-\bar{F}_i=0 \qquad (V) \quad (4.482)$$

$$\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}+a_{ij}-2\mu g(H)\beta_{ij}=0 \qquad (4.483)$$

$$a_{ij}l_j+\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (4.484)$$

$$\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.485)$$

$$\lambda_i=a_{ij}l_j \qquad (4.486)$$

由上众式，可得

$$\beta_{ij}=-\frac{1}{1+\mu}\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad (4.487)$$

$$a_{ij}=-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}) \qquad (4.488)$$

$$\lambda_i=-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}) \qquad (4.489)$$

在条件$\dot{\varepsilon}_{ii}=\dot{u}_{i,i}=0$成立的情况下，上述方程包括了稳定蠕变流动理论的四类基本方程及拉氏乘子。将拉氏乘子代入方程(4.475)式，则得广义泛函，即

$$G_{ca-1}=\iiint_V \left[\left(\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\right)\right.$$

$$-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}$$

$$-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i})-\frac{1}{1+\mu}\dot{e}_{ij}(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})\Big]dv$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i ds-\frac{1}{1+\mu}\iint_{S_2}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})l_j(\dot{u}_i$$

$$-\bar{\dot{u}}_i)ds \qquad (4.490)$$

式中利用$\dot{e}_{ii}=\dot{u}_{i,i}=0$的条件进行了化简。

泛函(4.490)式可化简为

$$G_{ca-2}=\iiint_V\Big[\frac{1}{1+\mu}(2g(H)\dot{e}_{ij})\dot{e}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i$$

$$-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}$$

$$-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\Big)\Big]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i ds$$

$$-\iint_{S_2}\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})l_j(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)ds \qquad (4.491)$$

亦可化简为

$$G_{ca-3}=\iiint_V\Big[\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}\dot{u}_{i,j}-\bar{F}_i\dot{u}_i$$

$$-\frac{1}{1+\mu}[2\mu g(H)\dot{e}_{ij}]\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\Big)$$

$$-\frac{1}{1+\mu}\dot{e}_{ij}(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})\Big]dv$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}\frac{1}{1+\mu}[\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})l_j$$

$$+(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)]ds \qquad (4.492)$$

泛函(4.490～4.492)式是三类独立变量函数的广义泛函，由

它们形成的广义变分原理是无变分约束条件的三类独立变量函数的广义变分原理。

2. 三类变量函数的势能广义变分原理3-1

在满足不可压缩条件(1.100)式的情况下，当$\dot{u}_i,\dot{e}_{ij},\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$为独立变量函数时，使泛函(4.490)式(或(4.491)式，或(4.492)式）实现驻值条件的$\dot{u}_i$，$\dot{e}_{ij}$，$\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$为稳定蠕变流动理论问题的真实解。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.491)式得

$$\begin{aligned}\delta G_{ca-2}=&\iiint_V\Big\{-\frac{1}{1+\mu}\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\Big)\delta\sigma'_{ij}\\&-\Big[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i\Big]\delta\dot{u}_i\\&-\frac{1}{1+\mu}\Big[(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})+2\mu^2g(H)\Big(\dot{e}_{ij}\\&-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\Big)\Big]\delta\dot{e}_{ij}\Big\}dv\\&-\iint_{S_1}\Big[\bar{P}_i-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})l_j\Big]\delta\dot{u}_i ds\\&-\iint_{S_2}\Big[(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)\delta\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}\Big)l_j\Big]ds\\=&0\end{aligned}\tag{4.493}$$

式中利用$\dot{e}_{ii}=\dot{u}_{i,i}=0$的条件，在运算过程中有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})\delta\dot{u}_{i,j}\\=&\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})\delta\dot{u}_{i,j}\end{aligned}\tag{4.494}$$

的关系成立

由于$\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$，$\dot{e}_{ij}$，$\dot{u}_i$的相互无关且为任意函数，根据变分法基本引理可得

$$\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.495)$$

$$\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}=0 \qquad (V) \quad (4.496)$$

$$\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i$$

$$=\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \quad (4.497)$$

$$\bar{P}_i-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j$$

$$=\bar{P}_i-\sigma_{ij}l_j=0 \qquad (S_1) \quad (4.498)$$

$$\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.499)$$

由上述可知，方程(4.495～4.499)式，正是稳定蠕变流动理论问题的四类基本方程，故这个原理的解是稳定蠕变流动理论问题的真实解。证毕。

4.6.3 二类变量函数的势能广义变分原理

1. 满足应力应变速度关系式

设 $\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}=0$，并用 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 代替 $\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$，则泛函(4.490)式(或(4.491)式，或(4.492)式)退化为

$$G_{ca-4}=\iiint_V\Big[\frac{1}{1+\mu}(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})\dot{\varepsilon}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i$$

$$-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}\Big(\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\Big)\Big]dv$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)ds$$

$$(4.500)$$

广义变分原理2-1：

在满足不可压缩条件(1.100)式的条件下，当 $\dot{u}_i$ 和 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 为独立变量函数时，使泛函(4.500)式实现驻值条件的 $\dot{u}_i$ 和 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 为稳定蠕变流动理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应变速度与位移速度关系式、力的边界条件和位移边界条件。应力应变速度关系式为原理的一般约束条件。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.500)式得

$$\delta G_{ca-4}=\iiint_V\left\{-\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij})\right.$$
$$\left.-[(2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i]\delta\dot{u}_i\right\}dv$$
$$-\iint_{S_1}[\bar{P}_i-(2g(H)\dot{e}_{ij})l_j]\delta\dot{u}_i ds$$
$$-\iint_{S_2}[(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij})l_j]ds=0 \qquad (4.501)$$

由于$\delta\dot{e}_{ij}$和$\delta\dot{u}_i$为相互无关的任意函数，根据变分法基本引理得

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.502)$$

$$2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \quad (4.503)$$

$$\bar{P}_i-(2g(H)\dot{e}_{ij})l_j=0 \qquad (S_1) \quad (4.504)$$

$$\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.505)$$

由上述可知，这个原理的变分条件和一般约束条件正是稳定蠕变流动理论问题的四类基本方程，故这个原理的解为稳定蠕变流动理论问题的真实解。证毕。

又设 $\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij}=0$，用$\sigma'_{ij}$局部的代替$\dot{e}_{ij}$，则泛函(4.491)式变为

$$G_{ca-5}=\iiint_V\left[\frac{1}{1+\mu}(2g(H)\dot{e}_{ij})\dot{e}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\right.$$
$$\left.-\sigma_{ij}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right)\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\sigma_{ij}l_j(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)\mathrm{d}s \tag{4.506}$$

利用$\dot{\varepsilon}_{ii}=\dot{u}_{i,i}=0$的条件，可得$\sigma'_{ij}=\sigma_{ij}$。

由泛函(4.506)式形成的广义变分原理是二类独立变量函数的原理，它的变分条件为平衡方程、应变速度与位移速度关系式、力的边界条件和位移边界条件。应力应变速度关系式是这个原理的变分约束条件。

2. **满足应变位移速度关系式**

设$\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0$，但不作变量代换，于是由泛函(4.490)式，可得

$$G_{ca-8}=\iiint_V\left[\frac{1}{1+\mu}(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})\dot{\varepsilon}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\right]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}$$

$$+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)\mathrm{d}s \tag{4.507}$$

广义变分原理2-2：

在满足不可压缩条件下，当应变速度与位移速度(1.93)式为变分约束条件时，使泛函(4.507)式实现驻值条件的$\dot{u}_i$，$\dot{\varepsilon}_{ij}$，σ_{ij}为稳定蠕变流动理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力与应变速度关系式、

$$+\frac{1}{1+\mu}2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}\Big)l_j$$

$$+\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j\delta\dot{u}_i\Big]ds=0 \qquad (4.508)$$

由于具有变分约束条件

$$\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0$$

取拉氏乘子 $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$，所以有

$$\iiint_V \lambda_{ij}\delta\Big(\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\Big)dv$$

$$=\iiint_V(\lambda_{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij}+\lambda_{ij,j}\delta\dot{u})dv-\iint_{S=S_1+S_2}\lambda_{ij}l_j\delta\dot{u}_i ds \qquad (4.509)$$

将(4.508)与(4.509)式相加，则得

$$\delta G_{ca-6}=\iiint_V[(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}+\lambda_{ij})\delta\dot{\varepsilon}_{ij}$$

$$+(\lambda_{ij,j}-\bar{F}_i)\delta\dot{u}_i]dv-\iint_{S_1}(\lambda_{ij}l_j+\bar{P}_i)\delta\dot{u}_i ds$$

$$-\iint_{S_2}\Big\{(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)\delta\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}+\frac{1}{1+\mu}2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}\Big)l_j$$

$$+\Big[\lambda_{ij}l_j+\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j\Big]\delta\dot{u}_i\Big\}ds$$

$$=0 \qquad (4.510)$$

由于 $\delta\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\delta\dot{u}_i$，$\delta\sigma_{ij}$ 相互无关且为任意函数，根据变分法基本引理可得

$$2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}+\lambda_{ij}=0 \qquad (V) \quad (4.511)$$

$$\lambda_{ij,j}-\bar{F}_i=0 \qquad (V) \quad (4.512)$$

$$\lambda_{ij}l_j+\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (4.513)$$

$$\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.514)$$

$$\lambda_{ij}=-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j \tag{4.515}$$

由于 λ_{ij} 是由积分域内部化到边界上的物理量，因物理性质具有不变性，故在积分域内(4.515)式成立。将 λ_{ij} 之值代入(4.511)与(4.512)式，则得

$$-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})=0 \quad (V) \tag{4.516}$$

$$-\left[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})\right]_{,j}+\bar{F}_i=0 \quad (V) \tag{4.517}$$

将 λ_{ij} 之值代入(4.513)式，则有

$$\bar{P}_i-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j=0 \tag{4.518}$$

由上述可知，这个原理的变分条件和变分约束条件正是稳定蠕变流动理论的四类基本方程，故这个原理的解为稳定蠕变流动理论问题的真实解。证毕。

3. 满足平衡方程式

设 $\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i=0$，于是由泛函(4.490)式得到

$$G_{cc-7}=\iiint_V\left[-\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+\frac{1-\mu}{1+\mu}(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})\dot{\varepsilon}_{ij}\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}\left\{\bar{P}_i-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j\right\}\dot{u}_i ds$$

$$+\iint_{S_2}\left\{\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j\right\}\tilde{\dot{u}}_i ds \tag{4.519}$$

广义变分原理2-3：

在满足不可压缩条件下，当平衡方程

$$\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i=0$$

为变分约束条件时，使泛函(4.519)式实现驻值条件的 $\dot{u}_i$，$\dot{\varepsilon}_{ij}$，

σ'_{ij} (σ_{ij})为稳定蠕变流动理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为应力与应变速度关系式、应变速度与位移速度关系式、力的边界条件和位移边界条件。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.519)式可得

$$\delta G_{ca-7}=\iiint_V\Big[-\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}\delta\dot{e}_{ij}-\frac{1}{1+\mu}\dot{e}_{ij}\delta\sigma'_{ij}$$

$$+(1-\mu)2g(H)\dot{e}_{ij}\delta\dot{e}_{ij}\Big]dv$$

$$-\iint_{S_1}\Big\{\Big[\bar{P}_i-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})l_j\Big]\delta\dot{u}_i$$

$$-\dot{u}_i\delta\Big[\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}\Big]l_j\Big\}ds$$

$$+\iint_{S_2}\dot{u}_i\delta\Big[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})\Big]ds=0 \quad (4.520)$$

由于具有变分约束条件

$$\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i=0$$

取拉氏乘子λ_i，所以有

$$\iiint_V\lambda_i\delta\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}\Big)_{,j}dv$$

$$=-\iiint_V\lambda_{i,j}\delta\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}\Big)dv$$

$$+\iint_{S_1+S_2}\lambda_i\delta\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}\Big)l_jds \qquad (4.521)$$

将(4.520)与(4.521)式相加，则得

$$\delta G_{ca-7}=\iiint_V\Big\{-\frac{1}{1+\mu}(\dot{e}_{ij}+\lambda_{i,j})\delta\sigma'_{ij}$$

$$-\Big[\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}+\lambda_{i,j}\frac{\mu^2}{1-\mu}2g(H)$$

$$-(1-\mu)2g(H)\dot{e}_{ij}\Big]\delta\dot{e}_{ij}\Big\}dv$$

$$-\iint_{S_1}\Big\{\Big[\bar{P}_i-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})l_j\Big]\delta\dot{u}_i$$

$$-(\lambda_i+\dot{u}_i)\delta\Big[\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}\Big]l_j\Big\}ds$$

$$+\iint_{S_2}(\lambda_i+\bar{\dot{u}}_i)\delta\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}\Big)l_jds$$

$$=0 \qquad (4.522)$$

由于$\delta\sigma'_{ij}$，$\delta\dot{e}_{ij}$，$\delta\dot{u}_i$相互无关且为任意函数，根据变分法基本引理可得

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\lambda_{i,j}-\frac{1}{2}\lambda_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.523)$$

$$\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}+\lambda_{ij}\Big(\frac{\mu^2}{1+\mu}2g(H)\Big)-(1-\mu)2g(H)\dot{e}_{ij}=0$$

$$(V) \quad (4.524)$$

$$\bar{P}_i-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})l_j=0 \qquad (S_1) \quad (5.525)$$

$$\lambda_i+\dot{u}_i=0$$

即

$$\lambda_i=-\dot{u}_i \qquad (S_1) \quad (4.526)$$

$$\lambda_i+\bar{\dot{u}}_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.527)$$

已知在边界上$\lambda_i=-\dot{u}_i$成立，故在积分域内此关系亦成立，将此关系式代入(4.523)式，则得

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.528)$$

将$\lambda_i=-\dot{u}_i$代入(4.524)式，则得

$$\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}-\dot{u}_{i,j}\Big(\frac{\mu^2}{1+\mu}2g(H)\Big)-(1-\mu)2g(H)\dot{e}_{ij}=0$$

利用(4.528)式，把$\dot{u}_{i,j}$用$\dot{e}_{ij}$代入上式，则得

$$\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}-\frac{\mu^2}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}-(1-\mu)2g(H)\dot{e}_{ij}$$

$$=\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})=0 \qquad (V) \quad (4.529)$$

在边界S_2上，令$\lambda_i=-\dot{u}_i$，故有

$$\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.530)$$

综上所述，方程(4.528～4.530)、(4.525)式及变分约束条件正是稳定蠕变流动理论的四类基本方程，故这个原理的解为稳定蠕变流动理论问题的真实解。证毕。

4.6.4 标准型势能变分原理

基于泛函(4.490)式（或(4.491)式，或(4.492)式），利用规一化方法，逐步将变分条件转化为变分约束条件（或为一般约束条件），则得到标准型势能变分原理的泛函。

1. 满足应力应变速度关系式

设$\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij}=0$，并用$\dot{e}_{ij}$代替$\sigma'_{ij}$，则泛函(4.490)式退化为(4.500)式型的广义泛函。这一步是把应力应变速度关系式转化为一般约束条件。

2. 满足应变位移速度关系式

设$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0$，但不作变量代换，于是泛函(4.500)式可退化为

$$G_{ca\text{-}s}=\iiint_V\left[\frac{1}{1+\mu}(2g(H)\dot{e}_{ij})\dot{e}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}(2g(H)\dot{e}_{ij})\,l_j(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)ds \quad (4.531)$$

这是具有一个独立变量函数的泛函，由它形成的变分原理的变分约束条件为应变位移速度关系式；变分条件为平衡方程、力的边

界条件和位移边界条件。它的一般约束条件是应力应变速度关系式。

3. 满足位移速度边界条件

设 $\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i=0$在$S_2$边界上成立，泛函(4.531)式退化为标准型势能变分原理的泛函

$$\Pi=\iiint_V\left[\frac{1}{1+\mu}(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})\dot{\varepsilon}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i ds \qquad (4.532)$$

4.6.5 三类变量函数的余能广义变分原理[11]

1. 建立广义泛函

变分约束条件为

(1) 应力应变速度(1.96)式(或(1.97)式)；

(2) 应变速度与位移速度(1.93)式；

(3) 平衡方程(4.473)式；

(4) 已知力的边界条件(1.98)式；

(5) 不可压缩条件(1.100)式。

当满足上述变分约束条件时，稳定蠕变理论的余能古典变分原理的泛函可表示为

$$\mathscr{L}=\iiint_V\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\dot{u}_{i,j}dv-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_i\sigma_{ij}l_j ds \qquad (4.533)$$

基于泛函(4.533)式，利用拉氏乘子法建立广义变分原理的广义泛函，于是有

$$G_{ab}=\iiint_V\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\dot{u}_{i,j}+\alpha_{ij}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)$$

$$+\beta_{ij}\left[\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)+\lambda_i\left[(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}\right.$$

$$+\bar{F}_i\Big]dv+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\mu_i ds-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_i\sigma_{ij}l_j ds \quad (4.534)$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}$；$\beta_{ij}=\beta_{ji}$；λ_i和 μ_i 为拉氏乘子。

令 $\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$，$\dot{e}_{ij}$，$\dot{u}_i$，$a_{ij}$，$\beta_{ij}$，$\lambda_i$，$\mu_i$ 均为独立变量函数，利用驻值条件

$$\delta G_{cb}=0 \quad (4.535)$$

确定拉氏乘子，则有

$$\delta G_{cb}=\iiint_V\Big\{\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\Big)\delta a_{ij}+\Big[\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big]\delta\beta_{ij}+\Big[(2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i\Big]\delta\lambda_i+\Big[\frac{1}{1+m}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}mf(T)\beta_{ij}\Big]\delta\sigma'_{ij}+\Big(\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}-a_{ij}\Big)\delta\dot{u}_{i,j}+(a_{ij}+\beta_{ij}-2\mu g(H)\lambda_{i,j})\delta\dot{e}_{ij}\Big\}dv+\iint_{S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta\mu_i+\mu_i\delta(\sigma_{ij}l_j)+\lambda_i\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)]ds-\iint_{S_2}[\bar{\dot{u}}_i\delta(\sigma_{ij}l_j)-\lambda_i\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)]ds=0 \quad (4.536)$$

根据变分法基本引理，可得

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.537)$$

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0 \qquad (V) \quad (4.538)$$

$$(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \quad (4.539)$$

$$\alpha_{ij}=\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}=\frac{1}{1+m}\sigma_{ij} \qquad (\dot{\varepsilon}_{ii}=0) \quad (4.540)$$

$$\beta_{ij}=\frac{1}{m(1+m)}\sigma'_{ij}=\frac{1}{m(1+m)}\sigma_{ij} \qquad (\dot{\varepsilon}_{ii}=0) \quad (4.541)$$

$$\alpha_{ij}+\beta_{ij}-2\mu g(H)\lambda_{i,j}=0 \qquad (4.542)$$

已知

$$\mu=\frac{1}{m},\ f(T)g(H)=1$$

将(4.540)、(4.541)式、(4.538)和(4.537)式分别代入(4.542)式可得到

$$\lambda_i=\dot{u}_i \qquad (4.543)$$

由(4.536)式得

$$\sigma_{ij}l_j-P_i=0 \qquad (S_1) \quad (4.544)$$

$$\mu_i\delta(\sigma_{ij}l_j)+\lambda_i\delta(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)=0 \quad (S_1) \quad (4.545)$$

将(4.538)式代入(4.545)式，并考虑到$f(T)g(H)=1$和$\dot{\varepsilon}_{ii}=0$的条件，便可得到

$$\mu_i+\lambda_i=\mu_i+\dot{u}_i=0,\ \mu_i=-\dot{u}_i \qquad (4.546)$$

在边界S_2上，利用(4.538)式及条件$\dot{\varepsilon}_{ii}=0$和$f(T)g(H)=1$，可得到

$$\bar{\dot{u}}_i-\lambda_i=\bar{\dot{u}}_i-\dot{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.547)$$

方程(4.537～4.547)式包括了稳定蠕变理论的四类基本方程及全部拉氏乘子。将拉氏乘子代入泛函(4.534)式，可得到

$$G_{cb-1}=\iiint_V\Big[\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\dot{u}_{i,j}+\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\Big(\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{v}_{i,j}$$

$$-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\Big)+\frac{1}{m(1+m)}\sigma'_{ij}\Big(\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big)$$

$$+\dot{u}_i((2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i)\Big]dv$$

$$-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_i\sigma_{ij}l_j ds \qquad (4.548)$$

对上式进行化简，可得

$$G_{cb-2}=\iiint_V\Big[\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+\frac{1}{m(1+m)}\Big(\dot{\varepsilon}_{ij}$$

$$-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big)\sigma'_{ij}+\dot{u}_i((2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i)\Big]dv$$

$$-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_i\sigma_{ij}l_j ds \qquad (4.549)$$

亦可化简为

$$G_{cb-3}=\iiint_V\Big[\frac{1}{m}\sigma'_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{m(1+m)}\Big(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big)\sigma'_{ij}$$

$$+\dot{u}_i((2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i)\Big]dv$$

$$-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_i\sigma_{ij}l_j ds \qquad (4.550)$$

泛函(4.548～4.550)式是基于余能密度建立的三类变量函数的广义泛函，由它们形成的广义变分原理是无变分约束条件的三类独立变量函数的广义变分原理，其变分条件为稳定蠕变流动理论的四类方程。

2. 三类变量函数的余能广义变分原理3-2

在满足不可压缩条件下，当$\dot{u}_i$，$\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$ 为独立变量函数时，使泛函(4.548)式 (或(4.549)式，或(4.550)式)实现驻值条件的 $\dot{u}_i$，$\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$为稳定蠕变理论问题的真实解。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.550)式得

$$\delta G_{cb-3}=\iiint_V\Big[\frac{1}{m}\Big(\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big)\delta\sigma'_{ij}$$

$$+\Big(\frac{1}{m}\sigma'_{ij}-\mu(2g(H))\dot{u}_{i,j}\Big)\delta\dot{\varepsilon}_{ij}$$

$$+((2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i)\delta\dot{u}_i\Big]dv$$

$$-\iint_{S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta\dot{u}_i+\dot{u}_i\delta(\sigma_{ij}l_j)$$

$$-\dot{u}_i\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)]ds-\iint_{S_2}[\bar{\dot{u}}_i\delta(\sigma_{ij}l_j)$$

$$-\dot{u}_i\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)]ds=0 \qquad (4.551)$$

已知

$$\mu=\frac{1}{m},\ f(T)g(H)=1$$

根据变分法基本引理得

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0 \qquad (V) \quad (4.552)$$

$$\frac{1}{m}\sigma'_{ij}-\mu(2g(H)\dot{u}_{i,j})=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\dot{u}_{i,j}\right)$$

$$=\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.553)$$

$$(2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i=\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0$$

$$(\dot{e}_{ij}=0) \qquad (V) \quad (4.554)$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (4.555)$$

$$\bar{\dot{u}}_i\delta(\sigma_{ij}l_j)-\dot{u}_i\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)$$

$$=(\bar{\dot{u}}_i-\dot{u}_i)\delta(\sigma_{ij}l_j)=\bar{\dot{u}}_i-\dot{u}_i=0 \qquad (4.556)$$

方程(4.552～4.556)式正是稳定蠕变理论问题的四类基本方程，故这个原理的解为蠕变理论问题的真实解。证毕。

4.6.6 二类变量函数的余能广义变分原理

基于泛函(4.548)式（或(4.549)式，或(4.550)式)，利用规一化方法，逐步将变分条件转化为变分约束条件（或为一般约束

条件)，则可得到一系列新型广义泛函，由这些新型广义泛函可以建立广义变分原理。

1. 满足应力应变速度关系式

设 $\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0$，并用$\sigma'_{ij}$ 代替 $\dot{e}_{ij}$，则泛函(4.548)式（或(4.549)式，或(4.550)式）就退化为

$$G_{cb-4}=\iiint_V\left[\frac{1}{1+m}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\sigma'_{ij}+\dot{u}_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}\sigma_{ij}l_j ds \qquad (4.557)$$

广义变分原理2-4：

在满足不可压缩条件下，当$\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$ 和$\dot{u}_i$为独立变量函数时，使泛函(4.557)式实现驻值条件的$\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$和 $\dot{u}_i$ 为稳定蠕变理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力位移速度关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件；它的一般约束条件为应力应变速度关系式。这正是蠕变理论 的 Hellinger-Reissner's 原理的形式。

2. 满足应变位移速度关系式

设 $\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0$，但不作变量代换，由泛函(4.548)式可得

$$G_{cb-5}=\iiint_V\left[\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\dot{u}_{i,j}+\frac{1}{m(1+m)}\sigma'_{ij}\left(\dot{e}_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)+\dot{u}_i((2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i)\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_i\sigma_{ij}l_j ds \qquad (4.558)$$

广义变分原理2-5：

在满足不可压缩条件下，当应变速度与位移速度(1.93)式为变分约束条件时，使上面泛函(4.558) 式实现驻值条件的 σ'_{ij} (σ_{ij})，$\dot{e}_{ij}$，$\dot{u}_i$ 为稳定蠕变理论的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力应变速度关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.558)式得

$$\begin{aligned}\delta G_{cb-5}=\iiint_V\Big[&\frac{1}{1+m}\dot{u}_{i,j}\delta\sigma_{ij}+\frac{1}{1+m}\sigma_{ij}\delta\dot{u}_{i,j}\\&+\frac{1}{m(1+m)}\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big)\delta\sigma'_{ij}\\&+\frac{1}{m(1+m)}\sigma'_{ij}\delta\dot{e}_{ij}-\frac{1}{1+m}\cdot\frac{1}{2}f(T)\sigma_{ij}\delta\sigma'_{ij}\\&\Big((2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i\Big)\delta\dot{u}_i\\&-2\mu g(H)\dot{u}_{i,j}\delta\dot{e}_{ij}\Big]dv\\&-\iint_{S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta\dot{u}_i+\dot{u}_i\delta(\sigma_{ij}l_j)\\&-\dot{u}_i\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)]ds-\iint_{S_2}[\bar{\dot{u}}_i\delta(\sigma_{ij}l_j)\\&-\dot{u}_i\delta(2g(H)\dot{e}_{ij})l_j]ds=0\end{aligned}\tag{4.559}$$

由于具有变分约束条件

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0$$

取$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$为拉氏乘子，所以有

$$\iiint_V\lambda_{ij}\delta(\dot{e}_{ij}-\dot{u}_{i,j})dv=0\tag{4.560}$$

将(4.559)与(4.560)两式相加，则得

$$
\begin{aligned}
\delta G_{cb-5}=&\iiint_V\Big\{\frac{1}{1+m}\Big(\dot u_{i,j}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}+\frac{1}{m}\dot\varepsilon_{ij}\\
&-\frac{1}{m}\ \frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big)\delta\sigma'_{ij}+\Big(\lambda_{ij}+\frac{1}{m(1+m)}\sigma'_{ij}\\
&-2\mu g(H)u_{i,j}\Big)\delta\dot\varepsilon_{ij}-\Big[\Big(\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}-\lambda_{ij}\Big)_{,j}\\
&-\Big((2g(H)\dot\varepsilon_{ij})_{,j}+\bar F_i\Big)\Big]\delta\dot u_i\Big\}dv\\
&-\iint_{S_1}\Big[(\sigma_{ij}l_j-\bar P_i)\delta\dot u_i+\dot u_i\delta(\sigma_{ij}l_j)\\
&-\dot u_i\delta(2g(H)\dot\varepsilon_{ij}l_j)+\Big(\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}-\lambda_{ij}\Big)l_j\delta u\ \Big]ds\\
&-\iint_{S_2}\Big[\bar{\dot u}_i\delta(\sigma_{ij}l_j)\ -\dot u_i\delta(2g(H)\dot\varepsilon_{ij}l_j)\\
&+\Big(\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}-\lambda_{ij}\Big)l_j\delta u_i\ \Big]ds=0 \qquad (4.561)
\end{aligned}
$$

考虑到 $\mu=\frac{1}{m}$，$f(T)g(H)=1$ 和$\dot\varepsilon_{ii}=0$的条件，根据变分法基本引理可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1+m}\Big(\dot u_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}+\frac{1}{m}\ \dot\varepsilon_{ij}-\frac{1}{m}\ \ \frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big)\\
&=\frac{1}{m}\Big[\dot\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big]=0 \qquad (V)\quad (4.562)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{ij}+\frac{1}{m(1+m)}\sigma'_{ij}-2\mu g(H)u_{i,j}\\
&=\frac{1}{2}f(T)\lambda_{ij}+\frac{1}{m(1+m)}\ \frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\frac{1}{m}u_{i,j}\\
&=\frac{1}{2}f(T)\lambda_{ij}+\frac{1}{m(1+m)}\ \frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\frac{1}{m}\dot\varepsilon_{ij}\\
&=\frac{1}{2}f(T)\lambda_{ij}-\frac{1}{1+m}\ \frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0
\end{aligned}
$$

即
$$\lambda_{ij}=\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij} \tag{4.563}$$

$$\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}-\lambda_{ij}=\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}-\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}=0$$

$$(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i=\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \tag{4.564}$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{4.565}$$

$$\bar{\dot{u}}_i-\dot{u}_i=0 \qquad (S_2) \tag{4.566}$$

由上述可知，这个原理的变分条件和变分约束条件为稳定蠕变理论的四类基本方程，故这个原理的解为稳定蠕变理论问题的真实解。证毕。

3. 满足平衡方程

若$(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i=0$，由泛函(4.550)式得

$$G_{cb-6}=\iiint_V\left[\frac{1}{m}\sigma'_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{m(1+m)}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\sigma'_{ij}\right]dv-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}\sigma_{ij}l_j ds \tag{4.567}$$

广义变分原理2-6：

在满足不可压缩条件下，当平衡方程(4.536)式为变分约束条件时，使泛函(4.567)实现驻值条件的$\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$，$\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\dot{u}_i$为稳定蠕变理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为应力应变速度关系式、应变位移速度关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.567)式，可得到

$$\delta G_{cb-6}=\iiint_V\left[\frac{1}{m}\sigma'_{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij}+\frac{1}{m}\dot{\varepsilon}_{ij}\delta\sigma'_{ij}-\frac{1}{m}\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\delta\sigma'_{ij}\right]dv-\iint_{S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta\dot{u}_i+\dot{u}_i\delta(\sigma_{ij}l_j)]ds-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}\delta(\sigma_{ij}l_j)ds=0 \tag{4.568}$$

由于具有变分约束条件

$$[2g(H)\dot{e}_{ij}]_{,j}+\bar{F}_i=0$$

所以有

$$\iiint_V \lambda_i\delta[2g(H)\dot{e}_{ij}]_{,j}dv$$

$$=\iiint_V[-\lambda_{i,j}\mu 2g(H)\delta\dot{e}_{ij}]dv$$

$$+\iint_{S=S_1+S_2}\lambda_i\delta[2g(H)\dot{e}_{ij}l_j]ds=0 \tag{4.569}$$

将(4.568)与(4.569)两式相加，则得

$$\delta G_{cb-6}=\iiint_V\Big[\frac{1}{m}\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big)\delta\sigma'_{ij}$$

$$+\Big(\frac{1}{m}\sigma'_{ij}-2\mu g(H)\lambda_{i,j}\Big)\delta\dot{e}_{ij}\Big]dv$$

$$-\iint_{S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta\dot{u}_i+\dot{u}_i\delta(\sigma_{ij}l_j)$$

$$-\lambda_i\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)]ds$$

$$-\iint_{S_2}[\dot{u}_i\delta(\sigma_{ij}l_j)-\lambda_i\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)]ds=0 \tag{4.570}$$

考虑到 $\mu=\frac{1}{m}$，$f(T)g(H)=1$和 $\dot{e}_{ii}=0$ 的条件，根据变分法基本引理，由(4.570)式得

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0 \qquad (V) \tag{4.571}$$

$$\frac{1}{m}(\sigma'_{ij}-2g(H)\lambda_{ij})=0 \qquad (V) \tag{4.572}$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{4.573}$$

$$\dot{u}_i-\lambda_i=0\ ,\quad \lambda_i=\dot{u}_i \tag{4.574}$$

$$\bar{\dot{u}}_i-\lambda_i=\bar{\dot{u}}_i-\dot{u}_i=0 \qquad (S_2) \tag{4.575}$$

由于λ_i是由积分域化到边界上的物理量，因其物理性质具有不变性，所以λ_i在积分域内及S_2边界上亦具有同样的物理性质，因此$\lambda_i=\dot{u}_i$在积分域和S_2上亦成立，将此关系代入(4.572)式，则有

$$\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{u}_{i,j}=\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\dot{u}_{i,j}$$

$$=\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0 \qquad (V) \quad (4.576)$$

由上述可知，这个原理的变分条件和变分约束条件正是稳定蠕变理论的四类基本方程，故这个原理的解为稳定蠕变理论问题的真实解。证毕。

4.6.7 标准型余能变分原理

基于泛函(4.548)式（或(4.549)式，或(4.550)式），利用规一化方法，逐步将变分条件转化为变分约束条件（或为一般约束条件），则得到一系列新型广义泛函，最后得到标准型余能原理的泛函，也就是稳定蠕变理论问题的余能古典变分原理的泛函。

1．满足应力应变速度关系式

设$\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0$，用$\sigma'_{ij}$代替$\dot{\varepsilon}_{ij}$，则泛函(4.548)式退化为(4.557)式泛函。这一步是应力应变速度关系式化为一般约束条件。

2．满足平衡方程

设$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0$，则泛函(4.557)式退化为

$$G_{cb-7}=\iiint_V\left[\frac{1}{1+m}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\sigma'_{ij}\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_i\sigma_{ij}l_j ds \qquad (4.577)$$

这一步是把平衡方程转化为变分约束条件。

3. 满足力的边界条件

在边界S_1上，因$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0$的关系成立，所以泛函(4.577)式退化为

$$G_{cb-8}=\iiint\limits_V\left[\frac{1}{1+m}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\sigma'_{ij}\right]\mathrm{d}v$$
$$-\iint\limits_{S_2}\bar{\dot{u}}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{4.578}$$

这一步是把力的边界条件转化为变分约束条件。泛函(4.578)式正是稳定蠕变理论的标准型原理的泛函。

§4.7 有限变形蠕变理论的广义变分原理

4.7.1 势能密度与余能密度的数学形式

一般常用的势能密度与余能密度的数学形式是应用了应力应变速度关系式进行变量代换，从中消去了一类变量函数，使应力应变速度关系式变为变分原理中的变量函数之间的一般约束关系式，因此应用（线性）拉氏乘子法不能把一般约束关系转变为变分原理的变分条件。为了建立三类变量函数的广义泛函及其变分原理，必需采用新型势能密度与余能密度的数学形式，使一般约束条件转变为变分约束条件，这样就可应用（线性）拉氏乘子法建立三类变量函数的广义泛函及其变分原理。

1. 势能密度

在应力应变速度(1.106)式（或(1.107)式）为变分约束条件时，势能密度(1.113)式变为

$$A(\dot{e}_{ij})=\frac{\bar{\omega}}{1+\mu}H^{1+\mu}=\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij} \tag{4.579}$$

2. 余能密度

在应力应变速度(1.108)式（或(1.109)式）和应变位移速度(1.105)式为变分约束条件时，余能密度(1.114)式变为

$$B(\sigma_{ij})=\frac{\omega}{1+m}T^{1+m}=\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}$$

$$=\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i}) \tag{4.580}$$

平衡方程(1.104)式用应变速度表示的形式为

$$[2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})]_{,j}+\bar{F}_k=0 \quad (\dot{e}_{ii}=0) \tag{4.581}$$

考虑到势能原理与余能原理的对偶性及建立广义泛函时变量函数之间的匹配关系，在建立余能广义泛函时，变分约束条件的平衡方程应采用(4.581)式。

4.7.2 三类变量函数的势能广义变分原理[11, 12]

1. 建立广义泛函

变分约束条件为

(1) 应力应变速度(1.106)式（或(1.107)式）；

(2) 应变速度与位移速度(1.105)式；

(3) 已知位移速度边界条件(1.111)式；

(4) 不可压缩条件(1.112)式。

当满足上述变分约束条件时，有限变形稳定蠕变理论的势能古典变分原理的泛函(3.73)式变为

$$\Pi=\iiint_V\left[\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\right]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i\mathrm{d}s \tag{4.582}$$

基于泛函(4.582)式，利用拉氏乘子法建立广义变分原理的泛函，于是有

$$G_{nca}=\iiint\limits_V\Big[\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}-\overline{F}_i\dot{u}_i+a_{ij}\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}$$

$$-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\Big)$$

$$+\beta_{ij}(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})\Big]dv$$

$$-\iint\limits_{S_1}\overline{P}_i\dot{u}_i ds+\iint\limits_{S_2}\lambda_i(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)ds \qquad (4.583)$$

其中$a_{ij}=a_{ji}$，$\beta_{ij}=\beta_{ji}$，λ_i为拉氏乘子。

令σ'_{ij}，$\dot{e}_{ij}$，$\dot{u}_i$，a_{ij}，β_{ij}，λ_i均为独立变量函数时，利用驻值条件

$$\delta G_{nca}=0 \qquad (4.584)$$

确定拉氏乘子，于是有

$$\delta G_{nca}=\iiint\limits_V\Big\{\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}$$

$$-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\Big)\delta a_{ij}+(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})\delta\beta_{ij}$$

$$+[a_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})_{,j}-\overline{F}_k]\delta\dot{u}_k$$

$$+\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}+a_{ij}-2\mu g(H)\beta_{ij}\Big)\delta\dot{e}_{ij}$$

$$+\Big(\frac{1}{1+\mu}\dot{e}_{ij}+\beta_{ij}\Big)\delta\sigma'_{ij}\Big\}dv$$

$$-\iint\limits_{S_1}(a_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j+\overline{P}_k)\delta\dot{u}_k ds$$

$$+\iint\limits_{S_2}\{(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\delta\lambda_k-[\lambda_k-a_{ij}(\delta_{ki}$$

$$+u_{k,i})l_j]\delta\dot{u}_k\}ds=0 \qquad (4.585)$$

其中$\delta u_k=0$。

根据变分法基本引理，可得

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}=0$$

$$(V) \quad (4.586)$$

$$\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij}=0 \qquad (V) \quad (4.587)$$

$$(a_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}-\bar{F}_k=0 \qquad (V) \quad (4.588)$$

$$\frac{1}{1+\mu}\dot{e}_{ij}+\beta_{ij}=0\ ,\quad \beta_{ij}=-\frac{1}{1+\mu}\dot{e}_{ij} \qquad (4.589)$$

$$a_{ij}+\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}-2\mu g(H)\beta_{ij}=0 \qquad (4.590)$$

将(4.589)式代入上式得

$$a_{ij}=-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij}) \qquad (4.591)$$

$$a_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j+\bar{P}_i$$

$$=\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_i=0$$

$$(S_1) \quad (4.592)$$

$$\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i=0 \qquad (S_2) \quad (4.593)$$

$$\lambda_i=a_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j$$

$$=-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j$$

$$(S_2) \quad (4.594)$$

利用$\dot{e}_{ii}=0$的关系，在运算过程中可取$\sigma'_{ij}=\sigma_{ij}$。

方程(4.586～4.594)式包括了有限变形稳定蠕变理论的四类基本方程及拉氏乘子。将拉氏乘子代入(4.583)式，则得广义泛函

$$G_{nca-1}=\iiint\limits_V\Big[\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\Big)$$

$$-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}$$

$$-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\Big)$$

$$-\frac{1}{1+\mu}\dot{e}_{ij}(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})\Big]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\overline{P}_i\dot{u}_i\mathrm{d}s-\frac{1}{1+\mu}\iint_{S_2}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})$$

$$(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\mathrm{d}s \tag{4.595}$$

上面泛函(4.595)式可化简为

$$G_{nca-2}=\iiint_V\Big[\frac{1}{1+\mu}(2g(H)\dot{e}_{ij})\dot{e}_{ij}-\overline{F}_i\dot{u}_i$$

$$-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}$$

$$-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\Big)\Big]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\overline{P}_i\dot{u}_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})$$

$$\cdot(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\mathrm{d}s \tag{4.596}$$

亦可化简为

$$G_{nca-3}=\iiint_V\Big[\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\dot{u}_{k,j}-\overline{F}_i\dot{u}_i$$

$$-\frac{1}{1+\mu}(2\mu g(H)\dot{e}_{ij})\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{ij}-\frac{1}{2}u_{j,i}$$

$$-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\Big)$$

$$-\frac{1}{1+\mu}\dot{e}_{ij}(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})\Big]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\overline{P}_i\dot{u}_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\frac{1}{1+u}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})$$

$$\cdot(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\mathrm{d}s \tag{4.597}$$

泛函(4.595～4.597)式是三类独立变量函数的广义泛函，由它们形成的广义变分原理是无变分约束条件的三类独立变量函数的广义变分原理。

2. 三类变量函数的势能广义变分原理3-1

在满足不可压缩条件下，当$\dot{u}_i$，$\dot{e}_{ij}$，$\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$为独立变量函数时，使泛函(4.595)式（或(4.596)式，或(4.597)式)实现驻值条件的$\dot{u}_i$，$\dot{e}_{ij}$，$\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$为有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.596)式可得

$$
\begin{aligned}
\delta G_{nc\sigma-2}=&\iiint_V\Big\{-\frac{1}{1+\mu}\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}\\
&-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\Big)\delta\sigma'_{ij}\\
&-\Big[\Big(\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}\\
&+\bar{F}_k\Big]\delta\dot{u}_k-\frac{1}{1+\mu}\Big[(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})\\
&+2\mu^2g(H)\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\\
&-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\Big)\Big]\delta\dot{e}_{ij}\Big\}dv\\
&-\iint_{S_1}\Big[\bar{P}_k-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}\\
&+u_{k,i})l_j\Big]\delta\dot{u}_k ds-\iint_{S_2}(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\delta\Big[\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}\\
&+\frac{1}{1+\mu}2\mu g(H)\dot{e}_{ij}\Big)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big]ds\\
=&0 \qquad (4.598)
\end{aligned}
$$

根据变分法基本引理，由(4.598)式得

$$
\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}=0
$$

$$(V) \quad (4.599)$$

$$\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij}=0 \quad (V) \quad (4.600)$$

利用(4.600)式和 $\dot{e}_{ii}=0$ 的条件，可得到

$$\left[\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k$$

$$=(\sigma_{ij,j}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}+\bar{F}_k=0 \quad (V) \quad (4.601)$$

$$\bar{P}_k-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j$$

$$=\bar{P}_k-\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \quad (S_1) \quad (4.602)$$

$$\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k=0 \quad (S_2) \quad (4.603)$$

可见，方程(4.599～4.603)式正是有限变形稳定蠕变理论的四类基本方程，故这个原理的解是有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。证毕。

4.7.3 二类变量函数的势能广义变分原理

基于广义泛函(4.595)式（或(4.596)式，或(4.597)式)，利用规一化方法，逐步将变分原理的变分条件转化为变分约束条件（或为一般约束条件)，于是得到一系列新型广义泛函及其变分原理。

1. 满足应力应变速度关系式

设 $\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij}=0$，当用 $\dot{e}_{ij}$ 代替 σ'_{ij}，则泛函(4.595)式退化为

$$G_{*c\,a-4}=\iiint_V\Big[\frac{1}{1+\mu}(2g(H)\dot{e}_{ij})\dot{e}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i$$

$$-(2g(H)\dot{e}_{ij})(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}$$

$$-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i})\Big]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i ds$$

$$-\iint_{S_2} 2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\mathrm{d}s \quad (4.604)$$

广义变分原理2-1：

在满足不可压缩条件下，当 $\dot{u}_i$ 和 $\dot{e}_{ij}$ 为独立变量函数时，使泛函(4.604)式实现驻值条件的 $\dot{u}_i$ 和 $\dot{e}_{ij}$ 为有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应变速度和位移速度关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件；它的一般约束条件为应力应变速度关系式。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.604)式得

$$\begin{aligned}\delta G_{nca-4}=&\iiint_V\Big[-\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}\\&-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\Big)\delta\big(2g(H)\dot{e}_{ij}\big)\\&-\big((2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}+\bar{F}_k\big)\delta\dot{u}_k\Big]\mathrm{d}v\\&-\iint_{S_1}[\bar{\dot{P}}_k-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]\delta\dot{u}_k\mathrm{d}s\\&-\iint_{S_2}[(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]\mathrm{d}s\\=&0\end{aligned} \quad (4.605)$$

根据变分法基本引理，得

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}=0 \quad (V) \quad (4.606)$$

$$(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}+\bar{F}_k=0 \quad (V) \quad (4.607)$$

$$\bar{P}_k-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \quad (S_1) \quad (4.608)$$

$$\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k=0 \quad (V) \quad (4.609)$$

由上述可知，这个原理的变分条件和一般约束条件正是有限变形稳定蠕变理论的四类基本方程，故这个原理的解为有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。证毕。

又设 $\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij}=0$，用 σ'_{ij} 局部代换 $\dot{e}_{ij}$，则泛函(4.596)式变为

$$
\begin{aligned}
G_{nca-5}=&\iiint_V\Big[\frac{1}{1+\mu}(2g(H)\dot{e}_{ij})\dot{e}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\\
&-\sigma_{ij}\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}\\
&-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\Big)\Big]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i ds\\
&-\iint_{S_2}\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)ds
\end{aligned}
\tag{4.610}
$$

由泛函(4.610)式形成的广义变分原理是二类独立变量函数的变分原理，它的变分约束条件为应力应变速度关系式；它的变分条件为平衡方程、应变位移速度关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。

2. 满足应变位移速度关系式

设 $\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}=0$，但不作变量代换，由泛函(4.595)式可得到

$$
\begin{aligned}
G_{nca-6}=&\iiint_V\Big[\frac{1}{1+\mu}(2g(H)\dot{e}_{ij})\dot{e}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\Big]dv\\
&-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}\Big[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}\\
&+u_{k,i})l_j(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\Big]ds
\end{aligned}
\tag{4.611}
$$

广义变分原理2-2：

在满足不可压缩条件下，当应变位移速度(1.105)式为变分约束条件时，使泛函(4.611)式实现驻值条件的$\dot{u}_i$，$\dot{e}_{ij}$，σ_{ij}为有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力应变速度关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.611)式得

$$\delta G_{Kca-6}^{I}=\iiint_V[2g(H)\dot{e}_{ij}\delta\dot{e}_{ij}-\bar{F}_i\delta\dot{e}_i]dv$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i\delta\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\delta\left[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}\right.$$

$$\left.+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]ds$$

$$-\iint_{S_2}\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}$$

$$+u_{k,i})l_j\delta\dot{u}_i ds=0 \tag{4.612}$$

由于具有变分约束条件

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}=0$$

取拉氏乘子$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$，所以有

$$\iiint_V[\lambda_{ij}\delta(\dot{e}_{ij})-\lambda_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta\dot{u}_{k,j}]dv$$

$$=\iiint_V[\lambda_{ij}\delta(\dot{e}_{ij})+(\lambda_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}\delta\dot{u}_k]dv$$

$$-\iint_{S=S_1+S_2}[\lambda_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]\delta\dot{u}_k ds=0 \tag{4.613}$$

将(4.612)与(4.613)两式相加，则得

$$\delta G_{Kca-6}=\iiint_V\Big\{(2g(H)\dot{e}_{ij}+\lambda_{ij})\delta\dot{e}_{ij}$$

$$+[(\lambda_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}-\bar{F}_k]\delta\dot{u}_k\Big\}dv$$

$$-\iint_{S_1}[\lambda_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j+\bar{P}_k]\delta\dot{u}_k ds$$

$$-\iint_{S_2}\Big\{(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\delta\Big[\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}$$

$$+\frac{1}{1+\mu}2\mu g(H)\dot{e}_{ij}\Big)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big]$$

$$+\Big[\lambda_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j+\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}$$

$$+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big]\delta\dot{u}_k\Big\}ds=0$$

(4.614)

根据变分法基本引理，可得

$$2g(H)\dot{e}_{ij}+\lambda_{ij}=0 \quad (V) \quad (4.615)$$

$$(\lambda_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}-\bar{F}_k=0 \quad (V) \quad (4.616)$$

$$\lambda_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j+\bar{P}_k=0 \quad (S_1) \quad (4.617)$$

$$\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i=0 \quad (S_2) \quad (4.618)$$

$$\lambda_{ij}=-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij}) \quad (4.619)$$

由于 λ_{ij} 是由积分域内部化到边界上的物理量，因其物理性质具有不变性，故在积分域内部(4.619)式亦成立。将λ_{ij}之值代入(4.615)和(4.616)两式，得到下列两式，即

$$-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})=0 \quad (V) \quad (4.620)$$

$$\Big[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big]_{,j}+\bar{F}_k=0$$

(V) (4.621)

将 λ_{ij}之值代入(4.617)式，则有

$$\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0$$

$$(S_1) \quad (4.622)$$

由上述可知，这个原理的变分条件和变分约束条件正是有限变形稳定蠕变理论的四类基本方程，故这个原理的解是有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。证毕。

3. 满足平衡方程式

设 $\left[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0$，由泛函(4.595)式，得

$$G_{nca-7}=\iiint_V\left[-\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}+\frac{1-\mu}{1+\mu}(2g(H)\dot{e}_{ij})\dot{e}_{ij}\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}\left[\bar{P}_k-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\dot{u}_k ds-\iint_{S_2}\left[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\bar{\dot{u}}_k ds \quad (4.623)$$

广义变分原理2-3：

在满足不可压缩条件下，当平衡方程

$$\left[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0 \quad (4.624)$$

为变分约束条件时，使上面泛函(4.623)式实现驻值条件的 $\dot{u}_i$，$\dot{e}_{ij}$，σ'_{ij} (σ_{ij})为有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为应力与应变速度关系式、应变速度与位移速度关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.623)式，得

$$\delta G_{nca-7}=\iiint_V\left[-\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}\delta\dot{e}_{ij}-\frac{1}{1+\mu}\dot{e}_{ij}\delta\sigma'_{ij}\right.$$

$$+(1-\mu)2g(H)\dot{e}_{ij}\delta\dot{e}_{ij}\Big]dv$$

$$-\iint_{S_1}\Big\{\Big[\bar{P}_k-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}$$

$$+u_{k,i})l_j\Big]\delta\dot{u}_k-\dot{u}_k\delta\Big[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}$$

$$+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big]\Big\}ds$$

$$-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_i\delta\Big[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}$$

$$+u_{k,i})l_j\Big]ds=0 \tag{4.625}$$

由于具有变分约束条件(4.624)式，同时取λ_i为拉氏乘子，所以有

$$\iiint_V\lambda_k\delta\Big[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big]_{,j}dv$$

$$=\iiint_V-\lambda_{k,j}\delta\Big[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big]dv$$

$$+\iint_{S=S_1+S_2}\lambda_k\delta\Big[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big]ds$$

$$=0 \tag{4.626}$$

将(4.625)与(4.626)两式相加，则得

$$\delta G_{nca-7}=\iiint_V\Big\{-\frac{1}{1+\mu}[\dot{e}_{ij}+\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})]\delta\sigma'_{ij}$$

$$-\Big[\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}+\lambda_{k,j}\frac{\mu^2}{1+\mu}2g(H)(\delta_{ki}+u_{k,i})$$

$$-(1-\mu)2g(H)\dot{e}_{ij}\Big]\delta\dot{e}_{ij}\Big\}dv$$

$$-\iint_{S_1}\left\{\left[\bar{P}_k-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}\right.\right.$$

$$\left.+u_{k,i})l_j\right]\delta\dot{u}_k-(\lambda_k+\dot{u}_k)\delta\left[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}\right.$$

$$\left.\left.+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\right\}ds$$

$$+\iint_{S_2}(\lambda_k+\bar{\dot{u}}_k)\delta\left[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}\right.$$

$$\left.+u_{k,i})l_j\right]ds=0 \qquad (4.627)$$

根据变分法基本引理得

$$\dot{e}_{ij}-\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})=0 \qquad (V) \quad (4.628)$$

$$\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}+\lambda_{k,j}\frac{\mu^2}{1+\mu}2g(H)(\delta_{ki}+u_{k,i})$$
$$-(1-\mu)2g(H)\dot{e}_{ij}=0 \qquad (V) \quad (4.629)$$

$$\bar{P}_k-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0$$
$$(S_1) \quad (4.630)$$

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_k+\dot{u}_k=0\\&\lambda_k=-\dot{u}_k\end{aligned}\right\} \qquad (4.631)$$

$$\lambda_k+\bar{\dot{u}}_k=0 \qquad (S_2) \quad (4.632)$$

已知在边界上，$\lambda_i=-\dot{u}_i$ 关系式成立，故在积分域内此关系亦成立，将此关系式代入(4.628)式可得

$$\dot{e}_{ij}-\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})$$

$$=\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}=0$$
$$(V) \quad (4.633)$$

将$\lambda_i=-\dot{u}_i$代入(4.629)式，则得

$$\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}-\dot{u}_{k,j}\frac{\mu^2}{1+\mu}2g(H)(\delta_{ki}+u_{k,i})$$

$$-(1-\mu)2g(H)\dot{e}_{ij}=0$$

利用(4.633)式，上式得

$$\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})=0 \qquad (V) \qquad (4.634)$$

在边界S_2上，令$\lambda_i=-\dot{u}_i$，故有

$$\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i=0 \qquad (S_2) \qquad (4.635)$$

由上述可知，方程(4.633～4.635)式和(4.630)式及变分约束条件（平衡方程）正是有限变形稳定蠕变理论的四类基本方程，故这个原理的解为有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。证毕。

4.7.4 标准型势能变分原理

基于泛函(4.595)式（或(4.596)式，或(4.597)式），利用规一化方法，逐步将变分原理的变分条件转化为变分约束条件（或转为一般约束条件），则得到标准型势能变分原理的泛函。

1. 满足应力应变速度关系式

设$\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij}=0$，当用$\dot{e}_{ij}$代替$\sigma'_{ij}$，则泛函(4.595)式退化为(4.604)式的泛函。这一步是把应力应变速度关系式转化为一般约束条件。

2. 满足应变位移速度关系式

设 $\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}=0$，但不作变量代换，于是泛函(4.604)式退化为

$$G_{nca-s}=\iiint_V\left[\frac{1}{1+\mu}(2g(H)\dot{e}_{ij})\dot{e}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\right]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}(2g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)ds \qquad (4.636)$$

3. 满足位移速度边界条件

设 $\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i=0$ 在边界 S_2上成立，泛函(4.636)式就退化为标准型势能变分原理的泛函，即

$$\Pi=\iiint_V\left[\frac{1}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\right]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i\mathrm{d}s \tag{4.637}$$

4.7.5 三类变量函数的余能广义变分原理[11, 12]

1. 建立广义泛函

变分约束条件为

(1) 应力应变速度关系式(1.108)式（或(1.109)式）；

(2) 应变速度与位移速度关系式(1.105)式；

(3) 平衡方程(4.581)式；

(4) 已知力的边界条件(1.110)式；

(5) 不可压缩条件(1.112)式。

当满足上述变分约束条件时，有限变形稳定蠕变理论的余能古典变分原理的泛函(3.79)式变为

$$\mathscr{L}=\iiint_V\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_k\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\mathrm{d}s \tag{4.638}$$

基于泛函(4.638)式，利用拉氏乘子法建立广义变分原理的广义泛函，于是有

$$G_{ncb}=\iiint_V\left\{\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})+\beta_{ij}\left[\dot{e}_{ij}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right]+a_{ij}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right.$$

$$-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\Big)$$

$$+\lambda_k\Big[\Big(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k\Big]\Big\}dv$$

$$+\iint_{S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]\mu_k ds$$

$$-\iint_{S_2}\dot{\bar{u}}_k[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]ds \tag{4.639}$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}$； $\beta_{ij}=\beta_{ji}$； λ_i和μ_i 为拉氏乘子。

令 $\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$， $\dot{e}_{ij}$， $\dot{u}_i$， a_{ij}， $\beta_{ij},\lambda_i,\mu_i$ 均为独立变量函数，由于 $\delta u_i=0$，利用驻值条件

$$\delta G_{ncb}=0 \tag{4.640}$$

确定拉氏乘子，则有

$$\delta G_{ncb}=\iiint_V\Big\{\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}$$

$$-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\Big)\delta a_{ij}+\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big)\delta\beta_{ij}$$

$$+\Big[\Big(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k\Big]\delta\lambda_k$$

$$+\Big[\frac{1}{1+m}\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})-\frac{1}{2}mf(T)\beta_{ij}\Big]\delta\sigma'_{ij}$$

$$+\Big[\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})-a_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big]\delta\dot{u}_{k,j}$$

$$+[a_{ij}+\beta_{ij}-2\mu g(H)\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})]\delta\dot{e}_{ij}\Big\}dv$$

$$+\iint_{S_1}\{[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]\delta\mu_k$$

$$+\mu_k\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)+\lambda_k\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}$$

$$+u_{k,i})l_j)\}ds-\iint_{S_2}[\dot{\bar{u}}_k\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)$$

$$-\lambda_i\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\,]ds=0 \quad (4.641)$$

根据变分法基本引理，得

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}=0$$

$$(V) \quad (4.642)$$

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0 \qquad (V) \quad (4.643)$$

$$(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}+\bar{F}_k=0 \qquad (V) \quad (4.644)$$

$$\alpha_{ij}=\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}=\frac{1}{1+m}\sigma_{ij} \quad (\dot{e}_{ii}=0) \qquad (4.645)$$

$$\beta_{ij}=\frac{1}{m(1+m)}\sigma'_{ij}=\frac{1}{m(1+m)}\sigma_{ij} \quad (\dot{e}_{ii}=0) \qquad (4.646)$$

$$\alpha_{ij}+\beta_{ij}-2\mu g(H)\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})=0 \qquad (4.647)$$

已知

$$\mu=\frac{1}{m}, \quad f(T)g(H)=1$$

将(4.645)和(4.646)两式代入(4.647)式，则得

$$\frac{1}{m}\left[\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]=0$$

利用(4.642)和(4.643)两式，上式可变为

$$\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})-\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})=0$$

所以

$$\lambda_k=\dot{u}_k \qquad (4.648)$$

利用(4.643)式，在边界S_1上可得

$$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0 \qquad (S_1) \quad (4.649)$$

$$\mu_k=-\lambda_k=-\dot{u}_k \qquad (S_1) \quad (4.650)$$

$$\bar{\dot{u}}_k-\lambda_k=\bar{\dot{u}}_k-\dot{u}_k=0 \qquad (S_2) \quad (4.651)$$

方程(4.642～4.651)式包括了有限变形稳定蠕变理论的四类基本方程及全部拉氏乘子。

将拉氏乘子代入泛函(4.639)式，于是得到

$$G_{ncb-1}=\iiint_V\Big\{\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})+\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\Big)+\frac{1}{m(1+m)}\sigma'_{ij}\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big)+\dot{u}_k\Big[\Big(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k\Big]\Big\}dv-\iint_{S_1}\Big[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\Big]\dot{u}_k ds-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_k\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j ds \tag{4.652}$$

对上式进行化简，可得

$$G_{ncb-2}=\iiint_V\Big\{\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}+\frac{1}{m(1+m)}\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big)\sigma'_{ij}+\dot{u}_k\Big[\Big(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k\Big]\Big\}dv-\iint_{S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]\dot{u}_k ds-\iint_{S_2}[\bar{\dot{u}}_k\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]ds \tag{4.653}$$

亦可化简为

$$G_{ncb-3}=\iiint_V\Big\{\frac{1}{m}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}-\frac{1}{m(1+m)}\Big(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big)\sigma'_{ij}+\dot{u}_k\Big[\Big(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k\Big]\Big\}dv-\iint_{S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]\dot{u}_k ds$$

$$-\iint_{S_2} \bar{\dot{u}}_k \sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}) l_j \mathrm{d}s \tag{4.654}$$

泛函(4.652～4.654)式是基于余能密度建立的三类独立变量函数的广义泛函，由它们形成的广义变分原理是三类独立变量函数的广义原理，其变分条件为有限变形稳定蠕变理论的四类方程。

2. 三类变量函数的余能广义变分原理3-2

在满足不可压缩条件下，当$\dot{u}_i$,$\dot{e}_{ij}$,$\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$为独立变量函数时，使泛函(4.652)式（或(4.653)式，或(4.654)式)实现驻值条件的$\dot{u}_i$，$\dot{e}_{ij}$，$\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$为有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。

证明：在驻值条件下，由泛函(4.654)式得到

$$\begin{aligned}
\delta G_{ncb-3} = & \iiint_V \left\{ \frac{1}{m}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\delta\sigma'_{ij} \right. \\
& + \left[\frac{1}{m}\sigma'_{ij} - 2\mu g(H)\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]\delta\dot{e}_{ij} \\
& \left. + [(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j} + \bar{F}_k]\delta\dot{u}_k \right\}\mathrm{d}v \\
& - \iint_{S_1} [\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j - \bar{P}_k]\delta\dot{u}_k \mathrm{d}s \\
& - \iint_{S_1} [\dot{u}_k\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j) \\
& - \dot{u}_k\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]\mathrm{d}s \\
& - \iint_{S_2} [\bar{\dot{u}}_k\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j) \\
& - \dot{u}_k\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]\mathrm{d}s = 0
\end{aligned} \tag{4.655}$$

已知

$$\mu = \frac{1}{m}, \quad f(T)g(H) = 1$$

根据变分法基本引理可得到

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0 \qquad (V) \qquad (4.656)$$

$$\frac{1}{m}\sigma'_{ij}-2\mu g(H)\hat{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})$$
$$=\frac{1}{m}\left[\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\hat{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]$$
$$=\frac{1}{m}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\hat{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\hat{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\hat{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\hat{u}_{k,i}\right)$$
$$=0 \qquad (4.657)$$

$$\Big(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k$$
$$=\Big(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k=0 \qquad (4.658)$$

$$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0 \qquad (S_1) \qquad (4.659)$$

考虑到(4.656)式，在边界S_2上得到

$$\hat{\bar{u}}_k-\hat{u}_k=0 \qquad (S_2) \qquad (4.660)$$

及在边界S_1上消去多余项。

方程(4.656～4.660)式正是有限变形稳定蠕变理论的四类基本方程，故这个原理的解为有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。证毕。

4.7.6 二类变量函数的余能广义变分原理

基于广义泛函(4.652)式（或(4.653)式，或(4.654)式)，利用规一化方法，把变分原理的变分条件转化为变分约束条件（或转为一般约束条件)，于是形成一系列新型广义泛函，基于这些新型广义泛函可以建立广义变分原理。

1. 满足应力应变速度关系式

设 $\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0$，并用 σ'_{ij} 代替 $\dot{e}_{ij}$，则泛函(4.652)

式退化为

$$
\begin{aligned}
G_{ncb-4}=&\iiint_V\left\{\frac{1}{1+m}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\sigma'_{ij}\right.\\
&\left.+\dot{u}_k\left[\left(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k\right]\right\}dv\\
&-\iint_{S_1}\left[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\right]\dot{u}_k ds\\
&-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_k[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]ds
\end{aligned}
\tag{4.661}
$$

广义变分原理2-4：

在满足不可压缩条件下，当σ'_{ij} (σ_{ij})和$\dot{u}_k$为独立变量函数时，使泛函(4.661)式实现驻值条件的σ'_{ij} (σ_{ij})和$\dot{u}_k$为有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力位移速度关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件；它的一般约束条件为应力应变速度关系式，利用一般约束条件可以把应力位移关系式化为应变速度与位移速度关系式。这正是有限变形稳定蠕变理论的Hellinger-Reissner's原理的形式。

2. 满足应变位移速度关系式

设 $\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}=0$，但不作变量代换，由泛函(4.652)式得到

$$
\begin{aligned}
G_{ncb-5}=&\iiint_V\left\{\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right.\\
&+\frac{1}{m(1+m)}\sigma'_{ij}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\\
&\left.+\dot{u}_k\left[\left(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k\right]\right\}dv
\end{aligned}
$$

$$-\iint_{S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]\dot{u}_k\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_k\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\mathrm{d}s \tag{4.662}$$

广义变分原理2-5：

在满足不可压缩条件下，当应变速度与位移速度关系式为变分约束条件时，使泛函(4.662)式实现驻值条件的 σ'_{ij} (σ_{ij})，$\dot{e}_{ij}$，$\dot{u}_k$为有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为平衡方程、应力应变速度关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。

证明。在驻值条件下，由泛函(4.662)式得

$$\begin{aligned}\delta G_{ncb-5}=\iiint_V\Big\{&\frac{1}{1+m}\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta\sigma'_{ij}\\&+\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}(\delta_{ki}+\delta_{k,i})\delta\dot{u}_{k,j}\\&+\frac{1}{m(1+m)}\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big)\delta\sigma'_{ij}\\&+\frac{1}{m(1+m)}\sigma'_{ij}\delta\dot{e}_{ij}-\Big[\frac{1}{1+m}\quad\frac{1}{2}f(T)\sigma_{ij}\Big]\delta\sigma'_{ij}\\&+\Big[\Big(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k\Big]\delta\dot{u}_k\\&-2\mu g(H)\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta\dot{e}_{ij}\Big\}\mathrm{d}v\\&-\iint_{S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]\delta\dot{u}_k\mathrm{d}s\\&-\iint_{S_1}[\dot{u}_k\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\\&-\dot{u}_k\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$-\iint_{S_2}[\dot{\bar{u}}_k\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)$$

$$-\dot{u}_k\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]\mathrm{d}s=0 \quad (4.663)$$

由于具有变分约束条件

$$\dot{e}_{ij}-\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})=0$$

取拉氏乘子$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$，所以有

$$\iiint_V\lambda_{ij}\delta[\dot{e}_{ij}-\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})]\mathrm{d}v=0 \qquad (4.664)$$

将(4.663)与(4.664)两式相加，可得

$$\delta G_{ncb\cdot5}=\iiint_V\Big\{\frac{1}{1+m}\Big[\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}$$

$$+\frac{1}{m}\dot{e}_{ij}-\frac{1}{m}\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big]\delta\sigma'_{ij}$$

$$+\Big[\lambda_{ij}+\frac{1}{m(1+m)}\sigma'_{ij}-2\mu g(H)\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}$$

$$+u_{k,i})\Big]\delta\dot{e}_{ij}+\Big[\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}(\delta_{ki}-u_{k,i})$$

$$-\lambda_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big]\delta\dot{u}_{k,j}+\Big[\Big(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}$$

$$+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k\Big]\Big\}\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]\delta\dot{u}_k\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_1}[\dot{u}_k\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)$$

$$-\dot{u}_k\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_2}[\dot{\bar{u}}_k\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}l_j))$$

$$-\dot{u}_k\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]ds=0 \quad (4.665)$$

根据变分法基本引理，得

$$\frac{1}{1+m}\left[\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\frac{1}{m}\dot{e}_{ij}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\right]=0$$

考虑到变分约束条件得

$$\frac{1}{m}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)=0 \qquad (V) \quad (4.666)$$

由(4.665)式得

$$\lambda_{ij}+\frac{1}{m(1+m)}\sigma'_{ij}-2\mu g(H)\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})=0$$

已知

$$\mu=\frac{1}{m}, \ \left(\frac{1}{2}f(T)\right)[2g(H)]=1$$

则上式变为

$$\frac{1}{2}f(T)\lambda_{ij}-\frac{1}{1+m}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)=0$$

$$\lambda_{ij}=\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij} \qquad (4.667)$$

由(4.665)式得

$$[2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})]_{,j}+\bar{F}_k$$

$$=[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})]_{,j}+\bar{F}_k=0 \qquad (V) \quad (4.668)$$

$$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0 \qquad (S_1) \quad (4.669)$$

$$\bar{\dot{u}}_k-\dot{u}_k=0 \qquad (S_2) \quad (4.670)$$

由上述可知，这个原理的变分条件和变分约束条件为有限变形稳定蠕变理论的四类基本方程，故这个原理的解为有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。证毕。

3. 满足平衡方程

若

$$(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}+\bar{F}_k=0$$

由泛函(4.652)式，得

$$G_{ncb-6}=\iiint_V\left[\frac{1}{m}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}-\frac{1}{m(1+m)}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\sigma'_{ij}\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]\dot{u}_k ds$$

$$-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_k[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]ds \qquad (4.671)$$

广义变分原理2-6：

在满足不可压缩条件下，当平衡方程(4.581)式为变分约束条件时，使泛函(4.671)式实现驻值条件的σ'_{ij} (σ_{ij})，$\dot{e}_{ij}$，$\dot{u}_k$为有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。

这个原理的变分条件为应力应变速度关系式、应变位移速度关系式、已知力的边界条件和已知位移边界条件。

证明： 在驻值条件下，由泛函(4.671)式可得

$$\delta G_{ncb-6}=\iiint_V\left[\frac{1}{m}\sigma'_{ij}\delta\dot{e}_{ij}+\frac{1}{m}\dot{e}_{ij}\delta\sigma'_{ij}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{m}\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\delta\sigma'_{ij}\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]\delta\dot{u}_k ds$$

$$-\iint_{S_1}[\dot{u}_k\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]ds$$

$$-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)ds=0 \qquad (4.672)$$

由于具有变分约束条件

$$(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}+\overline{F}_k=0$$

取拉氏乘子λ_i，所以有

$$\iiint_V \lambda_k\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}\,\mathrm{d}v$$

$$=\iiint_V -\lambda_{k,j}2\mu g(H)(\delta_{ki}+\mu_{k,i})\delta\dot{e}_{ij}\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S=S_1+S_2}\lambda_k\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\mathrm{d}s=0 \qquad (4.673)$$

将(4.672)与(4.673)两式相加，则得

$$\delta G_{acb-e}=\iiint_V\left\{\frac{1}{m}\left[\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right]\delta\sigma'_{ij}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{m}\sigma'_{ij}-2\mu g(H)\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]\delta\dot{e}_{ij}\right\}\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\overline{P}_k]\delta\dot{u}_k\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_1}[\dot{u}_k\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)$$

$$-\lambda_k\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_2}[\bar{\dot{u}}_k\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)$$

$$-\lambda_k\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]\mathrm{d}s=0 \quad (4.674)$$

根据变分法基本引理，得

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0 \qquad (V) \quad (4.675)$$

$$\frac{1}{m}\sigma'_{ij}-2\mu g(H)\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})$$

$$=\frac{1}{m}\left[\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]$$

$$=\frac{1}{m}[\dot{e}_{ij}-\lambda_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})]=0 \qquad (V) \qquad (4.676)$$

$$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0 \qquad (S_1) \qquad (4.677)$$

$$\dot{u}_k\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)-\lambda_k\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)=0$$

考虑到(4.675)式，上式变为

$$(\dot{u}_k-\lambda_k)\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)=0$$

则有

$$\dot{u}_k-\lambda_k=0$$

即

$$\lambda_k=\dot{u}_k \qquad (S_1) \qquad (4.678)$$

因

$$\bar{\dot{u}}_k\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)-\lambda_k\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)$$

$$=(\bar{\dot{u}}_k-\lambda_k)\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)=0$$

所以

$$\bar{\dot{u}}_k-\lambda_k=0 \qquad (S_2) \qquad (4.679)$$

由于λ_k是由积分域化到边界上的物理量，因其物理性质具有不变性，所以$\lambda_k=\dot{u}_k$在积分域内与边界上均成立，则由(4.676)式可得

$$\dot{e}_{ij}-\dot{u}_{kj}(\delta_{ki}+u_{k,i})=0 \qquad (4.680)$$

或

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}=0$$

在边界S_2上，方程(4.679)式变为

$$\bar{\dot{u}}_k-\dot{u}_k=0 \qquad (4.681)$$

由上述可知，这个原理的变分条件和变分约束条件正是有限变形稳定蠕变的四类基本方程，故这个原理的解为有限变形稳定蠕变理论问题的真实解。证毕。

4.7.7 标准型余能变分原理

基于广义泛函(4.652)式（或(4.653)式，或(4.654)式），利

用规一化方法，逐步把变分原理的变分条件转化为变分约束条件（或转为一般约束条件），则得到标准型余能原理的泛函，也就是有限变形稳定蠕变理论的余能古典变分原理的泛函。

1．满足应力应变速度关系式

设 $\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0$，用$\sigma'_{ij}$ 代替 $\dot{e}_{ij}$，则泛函(4.652)式退化为(4.661)式泛函。这一步是把应力应变速度关系转化为一般约束条件。

2．满足平衡方程

设$(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}+\bar{F}_k=0$，则泛函(4.661)式退化为

$$G_{ncb-7}=\iiint_V\left[\frac{1}{1+m}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\sigma'_{ij}\right]dv$$

$$-\iint_S[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]\dot{u}_k ds$$

$$-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_k\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j ds \qquad (4.682)$$

这一步是把平衡方程转化为变分约束条件。

3．满足力的边界条件

在边界S_1上，因$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0$关系式成立，所以泛函(4.682)式可退化为

$$G_{ncb-8}=\iiint_V\left[\frac{1}{1+m}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\sigma'_{ij}\right]dv$$

$$-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_k\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j ds \qquad (4.683)$$

这一步是把力的边界条件转化为变分约束条件。泛函(4.683)式正是有限变形稳定蠕变理论的标准型变分原理的泛函。

§4.8 结 论

用变分问题来描述固体力学范畴内的问题，采用拉氏乘子法建立各类广义泛函及其广义变分原理，实质上是基于势能密度与余能密度的基础上，各种变分约束条件、一般约束条件和变分条件之间的匹配问题。

广义泛函中的变量函数之间的约束条件，可分变分约束条件与一般约束条件。一般约束条件是不能用（线性）拉氏乘子法使之转化为变分条件的。因为广义泛函中的某类变量函数利用一般约束条件被消去了，因此必然得到乘子为零的结果。

应用拉氏乘子法建立各类广义变分原理，使研究广义变分原理严格建立在数学方法的基础上，促进了广义变分原理的发展。

基于新型势能密度与余能密度的数学形式和变量函数之间的匹配原则，利用拉氏乘子法建立了三类独立变量函数的固体力学系统（弹性力学、有限弹性力学、塑性形变理论、塑性流动理论、蠕变理论）的各类广义变分原理。

利用规一化方法，按照统一的模式，基于各类三类独立变量函数的广义变分原理的基础上，形成了一系列新型的广义变分原理，并在分析过程中推出了已知的（被他人已提出的）各类变分原理。

参 考 文 献

1 钱伟长．弹性理论中的广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用．机械工程学报，1979，15(2)

2 钱伟长著．变分法及有限元(上册)．北京：科学出版社，1980

3 鹫津久一郎著．弹性和塑性力学中的变分法．北京：科学出版社，984

4 钱伟长著．广义变分原理．上海：知识出版社，1985

5 胡海昌著．弹性力学的变分原理及其应用．北京：科学出版社，1981

6 牛庠均．弹性力学的广义变分原理．北京工业大学学报，1989，15(2) Niu Xiangjun. Generalized Variational Principles of Elasticity. International Conference on Computational Engineering Science. USA: Atlanta, 1988

7 胡海昌．弹塑性理论中的一些变分原理．物理学报，1954，10(3)

8 郭仲衡著．非线性弹性理论．北京：科学出版社，1980

9 卡恰诺夫 L M；周承倜译．塑性理论基础．北京：人民教育出版社，1959

10 王仁箸著．塑性力学基础．北京：科学出版社，1982

11 牛庠均、姚传玺．蠕变理论的广义变分原理．北京工业大学学报，1991，17(2)

12 牛庠均．有限变形蠕变理论的广义变分原理．北京工业大学学报，1992，18(2)

第五章　修正(分区)变分原理

§5.1 概　述

5.1.1　修正(分区)变分原理

变分原理是许多近似（包含数值）法的理论基础。由于变分原理的发展，促进了近似法的形成和发展；同样，由于近似法的发展亦促进了新型变分原理的形成与发展。修正变分原理就是由于有限元法的发展而使之形成和发展的。在这方面钱伟长、（美）卞学鐄等人进行了系统的创造性的工作[1~15]。本章主要在第四章的广义变分原理的泛函的基础上，在变量函数之间不同的匹配条件下，形成了不同于已有的各类新型修正变分原理[11~15]。

在数值分析过程中，对固体系统进行几何剖分，把固体系统分割成有限个子区的集合，称子区为元素；然后在每个元素上分片构造待解函数，这样在元素间的交界面上，保证待解函数的连续性就是一个需要解决的关键问题。为了保证待解函数在元素交界面上的连续性就产生了不同的方法。其中一种方法是在分片构造待解函数时，使待解函数满足元素界面上的连续性条件；其二是修改原来的古典变分原理与广义变分原理，加上保证待解函数在元素边界上满足连续性的项，这样就形成了修正(分区)变分原理。因此，所谓修正（分区）变分原理系指在元素交界面上为保证待解函数的连续性要求，在古典与广义变分原理的泛函的形式上，导入一个修正项，从而形成新型泛函及其变分原理。修正变

分原理的泛函有下面两个特点：其一是固体系统被分割成有限个元素的集合，固体系统的总体能量（势能、余能、动能）是有限个元素的能量之和；其二是在每个元素上分片构造待解函数，而不是在整个定义域上构造待解函数。

5.1.2 待解函数的构造

固体系统记为V，其整体边界为$S=S_1\cup S_2$，用点、线、面把固体系统分割为有限个子区的集合，称子区为元素，记为V_a，它的边界为分片光滑的，记为S_a，于是建立一种几何剖分V_h，用有限个元素V_a的和，逼近固体系统，故有

$$V=\bigcup_{a=1}^{m} V_a \tag{5.1}$$

几何剖分与元素的形状具有任意性，在分割时不仅要考虑对固体的几何形状的逼近性和固体物理性质的间断性，而且还要考虑收敛性要求和在某种意义下的最佳剖分的问题等其它因素。

待解函数的插值逼近是以元素V_a为定义域，常用多项式插值逼近，在离散的全部节点上$(P_i=1,2,\cdots,N)$上定义广义函数值U_i，它们的集合记为

$$K_U=\{U_i(P),i=1,2,\cdots,N\}$$

并将其称为离散型固体系统的自由度。在元素V_a上构造以节点广义函数值U_i为待定参数的多项式插值函数$u_i(P)$，由$u_i(P)$形成的函数空间记为V_h，于是任意的函数$u(P)\in V_h$，可表示为

$$u(P)=\sum_{i=1}^{N}U_i(P)G_i(P) \tag{5.2}$$

其中将

$$G_i(P_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

称为函数空间V_h的一组基函数（或称形状函数）。

方程（5.2）式是待解函数的一般形式，它在元素内部具有充分的光滑性，但在元素的交界面上待解函数或为连续的C^0函数类，或为函数本身及其一阶导数连续的C^1函数类；或为具有更高光滑性的C^n函数类。就整体而言，待解函数类V_h不是解析函数类，但它是由分片解析函数类组成。

元素边界S_a一般可表示为

$$S_a = S_{ab} \cup S_1 \cup S_2 \tag{5.3}$$

当元素处于V内部时，有

$$S_a = S_{ab} \tag{5.4}$$

其中S_{ab}为元素V_a与V_b的交界面。

5.1.3 交界条件

就固体力学而言，待解函数除满足四类基本方程之外，由于采用分片构造待解函数，因此在元素的交界面S_{ab}上，还应满足交界条件，即待解函数的连续性条件。

就弹性力学而言，交界条件可表示为

（1）位移连续性条件，即

$$u_i^a - u_i^b = 0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.5}$$

（2）力的连续性条件（或称力的平衡条件），即

$$(\sigma_{ij} l_j)^a + (\sigma_{ij} l_j)^b = 0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.6}$$

或用应变函数可表示为

$$(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,l_j)^a + (a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,l_j)^b = 0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.7}$$

$$(l_j)^a = -(l_j)^b \tag{5.8}$$

其中$(l_j)^a$为元素V_a沿交界面S_{ab}的外法线方向余弦；$(l_j)^b$为元素V_b沿交界面S_{ab}的外法线方向余弦。

（3）元素边界上的待解函数

当待解函数在元素边界S_a上独立构造时，位移函数记为u_i^s；应力函数记为p_i^s；应变函数记为ε_{ij}^s。

5.1.4 互补性

就某些力学问题而言，待解函数应满足的微分方程、边界条件、交界条件是唯一的，但满足的方式不同，如部分条件在分片构造待解函数时已满足，其余条件可由泛函实现驻值条件时满足。这两种不同的方式都能使待解函数满足全部条件。这样，分片构造待解函数与修正变分原理之间，就待解函数应满足的条件而言，具有互补性。而这种互补性对研究修正变分原理及解决实际问题是有益的。另外，可根据力学问题的难易点，避难就易，构造不同待解函数，选取不同的修正变分原理解决具体力学问题。

当构造的待解函数在元素交界面上具有充分光滑性时，修正变分原理就退化为古典变分原理（或退化为广义变分原理），这时交界条件自然得到满足。

由于各种离散方法之间具有内在的规律性，所以在介绍修正变分原理的同时，也要介绍与之有关的其它类型的变分问题，如有限元型、边界元型、区域型、加权余数（广义伽略金）型等。

§5.2 弹性力学的修正变分原理

5.2.1 势能型修正变分原理 I

基于古典变分原理的泛函（3.1）式，对固体系统进行几何剖分，采用分片构造待解函数，当位移函数在元素交界面上不连续时，为了保证连续性条件（5.5）式，采用拉氏乘子法将变分约束条件（5.5）式导入泛函（3.1）式中，在泛函（3.1）式中增加修正项，即

$$\iint_{S_{ab}} \lambda_i^a (u_i^a - u_i^b) \mathrm{d}s$$

从而形成了势能型修正变分原理Ⅰ的泛函[6]。

1．变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数具备下列条件：

（1）在元素内部满足应变位移（1.2）式；

（2）在边界上满足位移边界条件（1.8）式；

（3）在元素边界上，用其表示应力函数的应变函数为独立构造的边界函数时，则使下面泛函实现驻值条件的位移、应变函数为弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{ea-1}=&\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[A(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_i u_i\right]\mathrm{d}v\right.\\
&\left.-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i u_i \mathrm{d}s\right\}-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\iint_{S_{ab}}\lambda_i^a(u_i^a-u_i^b)\mathrm{d}s \quad (5.9)
\end{aligned}
$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(1.9)式。

证明：在驻值条件下，考虑到变分约束条件（1.2)式，由泛函（5.9）式得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{ea-1}=&\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}-\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\delta u_i\mathrm{d}v\right.\\
&\left.+\iint_{S_a\cap S_1}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)-\bar{P}_i\right]\delta u_i\mathrm{d}s\right\}\\
&-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[\lambda_i^a-\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^a\right]\delta u_i^a\mathrm{d}s\right.\\
&+\iint_{S_{ab}}\left[\lambda_i^a+\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^b\right]\delta u_i^b\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$+\iint\limits_{S_{ab}}(u_i^a-u_i^b)\delta\lambda_i^s\,ds\Big\}=0 \quad (5.10)$$

其中S_0为元素交界面S_{ab}的总个数。

由于δu_i，δu_i^a，δu_i^b，$\delta\lambda_i^s$为相互无关且为任意函数，根据变分法基本引理得

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.11)$$

$$u_i^a-u_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.12)$$

$$\lambda_i^s-\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^a=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.13)$$

$$\lambda_i^s+\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (5.15)$$

由上述可知，泛函（5.9）式的变分条件、变分约束条件和一般约束条件正是弹性力学的四类基本方程和交界条件，故泛函（5.9）式在变分约束条件下实现驻值条件的解为弹性力学问题的近似解。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理Ⅰ

（1）若待解函数在元素内部满足应变位移关系式（1.2）式，在边界上满足位移边界条件（1.8）式，及在元素边界上引入独立参变量λ_i^s时，则使泛函（5.9）式实现驻值条件的位移、应变函数为弹性力学问题的近似解。

（2）若待解函数在元素内部满足应变位移关系式(1.2)式，在元素边界上满足位移边界条件（1.8）式，在元素交界面上，令

$$\lambda_i^s=\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j \quad (5.16)$$

则使泛函（5.9）式实现驻值条件的位移、应变函数为弹性力学问题的近似解。

5.2.2 势能型修正变分原理II

基于广义变分原理的泛函（4.18）式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；

（2）在元素边界上应力函数和位移函数为独立构造的边界函数时，则使下面泛函（5.17）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{ea-2}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Big[\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\bar{F}_i u_i\Big)\\
&-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl})\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}\,u_{j,i}\Big)\\
&-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl})\Big]\mathrm{d}v\\
&-\iint_{S_a}P_i^*(u_i-u_i^*)\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{F}_i u_i^*\mathrm{d}s\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

$$(S_a=S_{ab}\cup S_1\cup S_2)^*$$

证明： 在驻值条件下，由泛函（5.17）式得

$$
\delta M_{ea-2}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Big[-\frac{1}{2}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}\,u_{j,i}\Big)\delta\sigma_{ij}
$$

---

* 下文公式中的S_a，S_{ab}，S_1，S_2仍存在$S_a=S_{ab}\cup S_1\cup S_2$关系，故从略，不再注明。

$$-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\delta\varepsilon_{ij}$$

$$-\left(\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i\right)\delta u_i\Big]dv$$

$$-\iint_{S_a}\left[(u_i-u_i^s)\delta P_i^s+\left(P_i^s-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\right)\delta u_i\right]dv$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[(u_i-u_i^s)\delta P_i^s+\left(P_i^s-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\,l_j\right)\delta u_i\right.$$

$$\left.+(\bar{P}_i-P_i^s)\delta u_i^s\right]ds-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(u_i-\bar{u}_i)\delta P_i^s+\left(P_i^s-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_i\right)\delta u_i\right]ds\Big\}=0 \qquad (5.18)$$

其中在交界面S_{ab}上$P_i^s\delta u_i^s$为相消项。

根据变分法基本引理，得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.19)$$

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}=0 \qquad (V_a) \quad (5.20)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.21)$$

$$u_i-u_i^s=0 \qquad (S_1),(S_a) \quad (5.22)$$

$$P_i^s-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl})l_j=0 \quad (S_1),(S_2),(S_a) \quad (5.23)$$

$$\bar{P}_i-P_i^s=0 \qquad (S_1) \quad (5.24)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.25)$$

由上述可知，泛函（5.17）式的变分条件正是弹性力学的四类基本方程及交界条件，故泛函（5.17）式在驻值条件下的解为

弹性力学问题的近似解。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理 I

若在元素内部位移、应变、应力函数均为独立变量函数；在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.17）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

3. 势能型边界元变分原理 I

若在元素内部位移、应变、应力函数满足平衡方程（5.21）式、应变位移（5.19）式及应力应变（5.20）式；在元素边界上，应力、位移函数为独立构造的边界函数时，则满足下面边界变分方程（5.26）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\delta\left\{\iint_{S_a}\left[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_ju_i - P_i^a(u_i-u_i^a)\right]ds-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_iu_i^a ds\right\}=0 \tag{5.26}$$

4. 势能区域型变分原理 I

若位移、应变、应力函数在元素内部为独立变量函数，在元素交界面上满足交界条件（5.5～5.7）式，在边界S_1与S_2上满足边界条件（1.7）和（1.8）式时，则满足下面变分方程(5.27)式（或它的化简形式）的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\delta\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\bar{F}_iu_i-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\right]dv\right\}=0 \tag{5.27}$$

5. 势能型加权余数（广义伽略金）方程 Ⅱ

（1）若位移、应变、应力函数在元素内部为独立变量函数，在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.18）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

（2）若位移、应变、应力函数在元素交界面上满足交界条件（5.22）和（5.23）式，在边界S_1与S_2上满足边界条件（5.24）和（5.25）式，则满足下面变分方程（5.28）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[&-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij}\\
&-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\delta\varepsilon_{ij}\\
&-((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i)\delta u_i\Big]\mathrm{d}v\Big\}=0
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

（3）若在元素内部位移、应变、应力函数满足平衡方程（5.21）式、应变位移（5.19）式、应力应变（5.20）式时，则满足下面变分方程（5.29）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{M}\Big\{&\iint_{S_a}[(u_i-u_i^s)\delta P_i^s+(P_i^s-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\delta u_i]\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_a\cap S_1}[(u_i-u_i^s)\delta P_i^s+(P_i^s-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\delta u_i\\
&+(\bar{P}_i-P_i^s)\delta u_i^s]\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_a\cap S_2}[(u_i-\bar{u}_i)\delta P_i^s+(P_i^s-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\delta u_i]\mathrm{d}s\Big\}=0
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

5.2.3 势能型修正变分原理III

基于广义变分原理的泛函（4.18）式，但采用不同于上节介绍的分片构造待解函数类，可形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；

（2）在元素边界上，应力、应变函数为连续的，而位移函数为独立构造的边界函数时，则使下面泛函（5.30）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{ea-3}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[&\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\overline{F}_iu_i\\
&-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}\\
&-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\Big]dv\\
&-\iint_{S_a}\sigma_{ij}l_j(u_i-u_i^*)ds-\iint_{S_a\cap S_I}\overline{P}_iu_i^*ds\Big\}
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

证明：在驻值条件下，由泛函（5.30）式得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{ea-3}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big\{&-\frac{1}{2}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\delta\sigma_{ij}\\
&-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\delta\varepsilon_{ij}\\
&-\Big[\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\overline{F}_i\Big]\delta u_i\Big\}dv
\end{aligned}
$$

$$-\iint_{S_a}[(u_i-u_i^*)\delta\sigma_{ij}l_j]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}[(u_i-u_i^*)\delta\sigma_{ij}l_j+(\bar{P}_i$$

$$-\sigma_{ij}l_j)\delta u_i^*]ds-\iint_{S_a\cap S_2}[(u_i$$

$$-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j]ds\Big\}=0 \qquad (5.31)$$

其中在交界面S_{ab}上$\sigma_{ij}l_j\ \delta u_i^*$项为相消项。

根据变分法基本引理，得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.32)$$

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0 \qquad (V_a) \quad (5.33)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.34)$$

$$u_i-u_i^*=0 \qquad (S_1),(S_a) \quad (5.35)$$

$$\bar{P}_i-\sigma_{ij}l_j=0 \qquad (S_1) \quad (5.36)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.37)$$

由上述可知，泛函（5.30）式的变分条件和变分约束条件（力的连续性条件）正是弹性力学的四类基本方程和交界条件，故在变分约束条件下泛函（5.30）实现驻值的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理Ⅱ

若在元素内部位移、应变、应力函数均为独立变量函数，在元素边界上应力函数为连续函数，而位移函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.30）式实现驻值的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

3. 势能型边界元变分原理Ⅱ

若在元素内部位移、应变、应力函数满足平衡方程（5.34）式、应变位移（5.32）式及应力应变（5.33）式；在元素边界上应力函数为连续的，而位移函数为独立构造的边界函数时，则满足下面边界变分方程（5.38）式的位移、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\delta\left\{\iint_{S_a}\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}l_ju_i-\sigma_{ij}l_j(u_i-u_i^a)\right]ds\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_iu_i^a ds\right\}=0 \qquad (5.38)$$

4. 势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅱ

（1）若在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上应力函数为连续的，而位移函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.31）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

（2）若在元素内部位移、应变、应力函数满足平衡方程（5.34）式、应变位移（5.32）式及应力应变（5.33）式；在元素边界上应变、应力函数为连续的，而位移函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.39）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}[(u_i-u_i^a)\delta\sigma_{ij}l_j]ds\right.$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}[(u_i-u_i^a)\delta\sigma_{ij}l_j+(\bar{P}_i-\delta_{ij}l_j)\delta u_i^a]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}[(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_jds]=0 \qquad (5.39)$$

5.2.4 势能型修正变分原理IV

基于广义变分原理的泛函（4.27）式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部位移、应变函数为独立变量函数；

（2）在元素边界上应变函数为连续函数，而位移函数为独立构造的边界函数时，则使下面泛函（5.40）式实现驻值条件的位移、应变函数为弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{ea-4}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{&\iiint_{V_a}\Big[\frac{1}{2}a_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kl}-\overline{F}_i u_i\\
&-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\Big]\mathrm{d}v\\
&-\iint_{S_a}a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,l_j(u_i-u_i^s)\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_a\cap S_1}\overline{P}_i u_i^s\mathrm{d}s\Big\}
\end{aligned}\tag{5.40}
$$

证明： 在驻值条件下，由泛函（5.40）式得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{ea-4}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{&\iiint_{V_a}\Big[-\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\\
&-((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\overline{F}_i)\,\delta u_i\Big]\mathrm{d}v\\
&-\iint_{S_a}[(u_i-u_i^s)\delta(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}l_j)]\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$
-\iint\limits_{S_a\cap S_1}[(u_i-u_i^a)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)
$$

$$
+(\bar{P}_i-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\delta u_i^a]\mathrm{d}s
$$

$$
-\iint\limits_{S_a\cap S_2}[(u_i-\bar{u}_i)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)]\mathrm{d}s\Big\}=0
$$

(5.41)

其中在交界面S_{ab}上$a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j\delta u_i^a$项为相消项。

根据变分法基本引理，得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.42)$$

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.43)$$

$$u_i-u_i^a=0 \qquad (S_1),(S_a) \quad (5.44)$$

$$\bar{P}_i-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j=0 \qquad (S_1) \quad (5.45)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.46)$$

由上述可知，泛函（5.40）式的变分条件、变分约束条件（力的交界条件）和一般约束条件(应力应变关系式)正是弹性力学问题的四类基本方程及交界条件，故在变分约束条件下，泛函（5.40）式实现驻值条件解为弹性力学问题的近似解。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理Ⅳ

若在元素内部应变、位移函数为独立变量函数；在元素边界上应变函数为连续的，而位移函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.40）式实现驻值条件的应变、位移函数为弹性力学问题的近似解。

3. 势能型边界元变分原理Ⅳ

若在元素内部位移、应变函数满足平衡方程（5.43）式和应变位移（5.42）式；在元素边界上应变函数为连续的，而位移函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.47）式的

应变、位移函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\delta\left\{\iint_{S_a}\left[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j u_i - a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j(u_i - u_i^*)\right]ds\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{F}_i u_i^* ds\right\} = 0 \qquad (5.47)$$

4. 势能区域型变分原理Ⅳ

在元素边界上待解函数满足交界条件（5.5～5.7）式，在边界S_1和S_2上满足边界条件（5.45）、(5.46）式时，则满足变分方程（5.48）式的应变、位移函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\delta\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \bar{F}_i u_i\right.\right.$$

$$\left.\left.-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right]dv\right\} = 0$$

$$(5.48)$$

5. 势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅳ

（1）若在元素内部位移、应变函数为独立变量函数，在元素边界上应变函数为连续的，而位移函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.41）式的应变、位移函数为弹性力学问题的近似解。

（2）待解函数在元素的边界上满足交界条件（5.5～5.7）式，在边界S_1和S_2上满足边界条件（5.45）、(5.46）式时，则满足变分方程（5.49）式的应变、位移函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\right.\right.$$

$$\left.\left.-((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j} + \bar{F}_i)\delta u_i\right]dv\right\} = 0 \qquad (5.49)$$

（3）若在元素内部位移、应变函数满足平衡方程(5.43)式和应变位移关系（5.42）式；在元素边界上应变函数为连续的，而位移函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.50）式的应变、位移函数为弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{M}\Big\{&\iint_{S_a}[(u_i-u_i^a)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)]ds \\
&-\iint_{S_a\cap S_1}[(u_i-u_i^a)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j) \\
&+(\bar{P}_i-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\delta u_i^a]ds \\
&-\iint_{S_a\cap S_2}[(u_i-u_i^a)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)]ds\Big\}=0
\end{aligned}
\tag{5.50}
$$

5.2.5 势能型修正变分原理V

基于广义变分原理的泛函（4.34）式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部应变、位移函数满足应变位移（1.2)式；

（2）在元素边界上，应变、应力函数为连续函数，而位移函数为独立构造的边界函数时，则使下面泛函（5.51）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{\varepsilon\sigma-5}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{&\iiint_{V_a}\left(\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_iu_i\right)dv \\
&-\iint_{S_a}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_i(u_i-u_i^a)ds
\end{aligned}
$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1} \bar{P}_i u_i^* \mathrm{d}s\Big\} \tag{5.51}$$

证明：在驻值条件下，由泛函（5.51）式得

$$\delta M_{e0-5}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\delta\varepsilon_{ij}$$

$$-\Big(\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i\Big)\delta u_i\Big]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a}\Big[(u_i-u_i^*)\delta\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j\Big]\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\Big[(u_i-u_i^*)\delta\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j$$

$$+\Big(\bar{P}_i-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\Big)\delta u_i^*\Big]\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\Big[(u_i-u_i^*)\delta\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}$$

$$+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j\Big]\mathrm{d}s\Big\}=0 \tag{5.52}$$

其中在交界面S_{ab}上$\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j\ \delta u_i^*$项为相消项。

根据变分法基本引理，得

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0 \qquad (V_a) \tag{5.53}$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \tag{5.54}$$

$$u_i-u_i^*=0 \qquad (S_1),(S_a) \tag{5.55}$$

$$\bar{P}_i-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j=0 \qquad (S_1) \tag{5.56}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \tag{5.57}$$

由上述可知，泛函（5.51）式的变分条件和变分约束条件正是弹性力学的四类基本方程及交界条件，故在变分约束条件下，使泛函（5.51）式实现驻值条件的解为弹性力学问题的近似解。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理V

若应变、位移函数满足应变位移（1.2）式；在元素边界上应变、应力函数为连续函数，即满足交界条件（5.6）、(5.7)式，而位移函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.51）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

3. 势能型边界元变分原理V

若在元素内部位移、应变、应力函数满足平衡方程（5.54）式、应力应变（5.53）式及应变位移（1.2)式；在元素边界上应变、应力函数为连续的，而位移函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.58）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\delta\left\{\iint\limits_{S_a}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\ a_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}\right)l_j u_i -\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}\right)l_j\left(u_i-u_i^{s}\right)\right]\mathrm{d}s -\iint\limits_{S_a\cap S_1}\overline{P}_i u_i^{s}\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (5.58)$$

4. 势能型加权余数（广义伽略金）方程V

（1）若应变、位移函数满足应变位移（1.2)式；在元素边界上应变、应力函数为连续函数，而位移函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.52）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

（2）若在元素的交界面上，待解函数满足交界条件(5.5～5.7)式；在元素边界S_1和S_2上，待解函数满足边界条件（5.56)、

（5.57）式时，则满足变分方程（5.59）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V}\left[-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\delta\varepsilon_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i\right)\delta u_i\right]\mathrm{d}v\right\}=0$$

（5.59）

（3）若在元素内部位移、应变、应力函数满足平衡方程（5.54）式、应变位移（1.2）式、应力应变（5.53）式；在元素边界上应变、应力函数为连续的，而位移函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.60）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}\left[(u_i-u_i^s)\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]\mathrm{d}s\right.$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\left[(u_i-u_i^s)\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right.$$

$$\left.+\left(\bar{P}_i-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\right)\delta u_i^s\right]\mathrm{d}s$$

$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}\left[(u_i-u_i^s)\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]\mathrm{d}s\right\}=0$$

（5.60）

5.2.6 势能型修正变分原理VI

基于广义变分原理的泛函（4.47）式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数具备下列条件：

（1）在元素内部满足平衡方程

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\ \varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.61)$$

（2）在元素边界上位移函数为连续的，而应力函数为独立构造的边界函数时，则使下面泛函（5.62）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$M_{ea-6}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv\right]\right.$$
$$-\iint_{S_a}\left[P_i^s-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\ \varepsilon_{kl})l_j\right]u_i ds$$
$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}P_i^s\bar{u}_i ds\right\} \qquad (5.62)$$

证明：在驻值条件下，由泛函（5.62）式得

$$\delta M_{ea-6}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij}\right.\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u_i))\delta\varepsilon_{ij}\right]dv$$
$$-\iint_{S_a}\left[P_i^s-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\ \varepsilon_{kl})l_j\right]\delta u_i ds$$
$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[\bar{P}_i-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\ \varepsilon_{kl})l_j\right]\delta u_i ds$$
$$-\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(P_i^s-\frac{1}{2}(\delta_{ij}+a_{ijkl}\ \varepsilon_{kl})l_j\right)\delta u_i\right.$$
$$\left.\left.+(u_i-\bar{u}_i)\delta P_i^s\right]ds\right\}=0 \qquad (5.63)$$

（这里证明引用了变分约束条件平衡方程。）

其中在元素交界面S_{ab}上$u_i \delta P_i^s$项为相消项。

根据变分法基本引理，得

$$\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i} = 0 \qquad (V_a) \quad (5.64)$$

$$\sigma_{ij} - a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\underset{\cdots}{u_i}) = 0 \qquad (V_a) \quad (5.65)$$

$$P_i^s - \frac{1}{2}(\sigma_{ij} + a_{ijkl} \varepsilon_{kl}) l_j = 0 \quad (S_2),(S_a) \quad (5.66)$$

$$\bar{P}_i - \frac{1}{2}(\sigma_{ij} + a_{ijkl} \varepsilon_{kl}) l_j = 0 \qquad (S_1) \quad (5.67)$$

$$u_i - \bar{u}_i = 0 \qquad (S_2) \quad (5.68)$$

由上述可知，泛函（5.62）式的变分条件和变分约束条件正是弹性力学的四类基本方程和交界条件，故在变分约束条件下，使泛函（5.62）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理Ⅵ

若在元素内部应力函数满足平衡方程（5.61）式；在元素边界上位移函数为连续的，而应力函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.62）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

3. 势能型边界元变分原理Ⅵ

若待解函数在元素内部满足平衡方程（5.61）式、应变位移（5.64)式、应力位移（5.65）式；在元素边界上位移函数为连续的，而应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.69）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M} \delta \Big\{ \iint_{sa} \frac{1}{2} \Big(\frac{1}{2} \sigma_{ij} + \frac{1}{2} a_{ijkl} \varepsilon_{kl} \Big) l_j u_i$$

$$+ \Big[P_i^s - \frac{1}{2}(\sigma_{ij} + a_{ijkl} \varepsilon_{kl}) l_j \Big] u_i \mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a \cap S_2} P_i^* \bar{u}_i ds\Bigg\} = 0 \tag{5.69}$$

4. 势能区域型变分原理Ⅵ

若应力函数在元素内部满足平衡方程(5.61)式；在元素边界上待解函数满足交界条件（5.5～5.7）式，在边界S_1和S_2上满足边界条件（5.67）、(5.68）式，则满足变分方程（5.70）式的应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M} \delta\left\{\iiint_{V_a} -\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dv\right\} = 0 \tag{5.70}$$

5. 势能型加权余数(广义伽略金)方程Ⅵ

（1）若在元素内部应力函数满足平衡方程（5.61）式，在元素边界上位移函数为连续的，而应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.63）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

（2）若待解函数在元素内部满足平衡方程（5.61）式，在元素边界上满足交界条件（5.5～5.7）式，在边界S_1和S_2上满足边界条件（5.67）、(5.68）式时，则满足变分方程（5.71）式的位移、应变和应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\underset{\dots}{u_i})\right)\delta\varepsilon_{ij}\right]dv\right\} = 0 \tag{5.71}$$

（3）若在元素内部待解函数满足平衡方程（5.61）式、应变位移（5.64）式、应力位移（5.65）式；在元素交界面上位移函数为连续的，而应力函数为独立构造的边界函数时，则满足泛函边界变分方程（5.72）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}\left[P_i^a-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl})l_j\right]\delta u_i ds\right.$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[\bar{P}_i-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl})l_j\right]\delta u_i ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\left[P_i^a-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl})l_j\delta u_i\right.$$

$$\left.\left.+(u_i-\bar{u}_i)\delta P_i^a\right]ds\right\}=0 \tag{5.72}$$

5.2.7 余能型修正变分原理 I

基于古典变分原理的泛函（3.13）式，对固体系统进行几何剖分，采用分片构造待解函数，当应力函数在元素交界面上不连续时,为了保证力的连续性（5.6）式的条件,采用拉氏乘子法,将变分约束条件（5.6）式导入泛函（3.13)式中，在泛函（3.13）式中增加修正项，即

$$\iint_{S_{ab}}\lambda_i^a[(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b]ds$$

从而形成了余能型修正变分原理 I 的泛函[2~3]。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数具备下列条件：

（1）在元素内部满足平衡方程（1.1）式；

（2）在边界S_1上满足边界条件（1.7）式；

（3）在元素边界上，位移函数为独立构造的边界函数，而应力函数为不连续时，则使下面泛函（5.73）式实现驻值条件的位移、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$M_{eb-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}B(\sigma_{ij})\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\iint_{S_{ab}}\lambda_i^s[(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b]\mathrm{d}s \qquad (5.73)$$

其中$B(\sigma_{ij})$为（1.9）式；取拉氏乘子$\lambda_i^s=u_i^s$。

证明： 在驻值条件下，由泛函（5.73）式得

$$\delta M_{eb-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v\right.$$

$$-\iint_{S_a}[\sigma_{ij}l_j\delta u_i^s-u_i^s\delta\sigma_{ij}l_j]\mathrm{d}s$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}l_i\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (5.74)$$

考虑到平衡方程为变分约束条件时，则有

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}u_i\delta\sigma_{ij,j}l_j\mathrm{d}v\right\}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}-u_{i,j}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v+\iint_{S_a}u_i\delta\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\}$$

$$=0 \qquad (5.75)$$

将（5.74）和（5.75）式相加，则得

$$\delta M_{eb-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}-u_{i,j}\right]\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v\right.$$

$$-\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b]\delta u_i^s\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_{ab}}\left[(u_i^s-u_i^a)\delta(\sigma_{ij}l_j)^a+(u_i^s-u_i^b)\delta(\sigma_{ij}l_j)^b\right]ds$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}(\bar{u}_i-u_i)\delta\sigma_{ij}l_j ds\right\}=0 \qquad (5.76)$$

根据变分法基本引理，由（5.76）式得

$$\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.77)$$

$$(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.78)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_i^s-u_i^a=0 \\ u_i^s-u_i^b=0 \end{array}\right. \qquad (S_{ab}) \quad (5.79)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.80)$$

由上述可知，泛函（5.73）式的变分条件和变分约束条件正是弹性力学的四类基本方程和交界条件，故泛函（5.73）式在变分约束条件下实现驻值条件的解为弹性力学问题的近似解。证毕。

2. 余能型有限元修正变分原理Ⅰ

若待解函数在元素内部满足平衡方程（1.1）式，在边界S_1上满足边界条件（1.7）式；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，应力函数为不连续函数时，则使泛函（5.73）式实现驻值条件的位移、应力函数为弹性力学问题的近似解。

5.2.8　余能型修正变分原理II

基于广义变分原理的泛函（4.80）式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割为有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条

件：

（1）在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；

（2）在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则使下面泛函（5.81）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{eb-2}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[&-\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}\\
&-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\\
&-\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})\\
&-u_i\Big((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i\Big)\Big]dv\\
&+\iint_{S_a}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-P_i^s)u_i^s ds\\
&+\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_iP_i^s ds\Big\}
\end{aligned}
\tag{5.81}
$$

证明：在其驻值条件下，由泛函（5.81）式得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{eb-2}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\{&-(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})\delta\sigma_{ij}\\
&+[a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\underset{\cdots}{u_i})-\sigma_{ij}]\delta\varepsilon_{ij}\\
&-[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i]\delta u_i\}dv\\
&+\iint_{S_a}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-P_i^s)\delta u_i^s\\
&+(u_i^s-u_i)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)]ds\\
&+\iint_{S_a\cap S_1}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i^s
\end{aligned}
$$

$$+(u_i^s-u_i)\delta(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}l_j)]\mathrm{d}s$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_2}[(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}l_j-P_i^s)\delta u_i^s+(\bar{u}_i-u_i^s)\delta P_i^s$$

$$+(u_i^s-u_i)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)]\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (5.82)$$

其中在交界面S_{ab}上$u_i^s\delta P_i^s$为相消项。

根据变分法基本引理，得

$$\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\,\sigma_{kl}=0 \qquad (V_a) \quad (5.83)$$

$$a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}(\dot{u}_i)-\sigma_{ij}=0 \qquad (V_a) \quad (5.84)$$

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.85)$$

$$u_i^s-u_i=0 \qquad (S_1),(S_2),(S_a) \quad (5.86)$$

$$a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}l_j-P_i^s=0 \qquad (S_2),(S_a) \quad (5.87)$$

$$a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (5.88)$$

$$\bar{u}_i-u_i^s=0 \qquad (S_2) \quad (5.89)$$

由上述可知，泛函（5.81）式的变分条件正是弹性力学的四类基本方程及交界条件，故泛函（5.81）式实现驻值条件的解为弹性力学问题的近似解。证毕。

2. 余能型有限元修正变分原理Ⅰ

若在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.81）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

3. 余能型边界元变分原理Ⅰ

若在元素内部待解函数满足应力应变（5.83）式、应力位移（5.84）式及平衡方程（5.85）式；在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.90）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\delta\left\{\iint_{S_a}\left[-\frac{1}{2}a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,l_j\,u_i\right.\right.$$

$$\left.+\left(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}l_j-P_i^s\right)u_i^s\right]\mathrm{d}s$$

$$\left.+\iint_{s_a\cap s_2}\bar{u}_iP_i^s\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (5.90)$$

4. 余能区域型变分原理Ⅱ

若位移、应变、应力函数在元素内部为独立变量函数，在元素交界面上满足交界条件(5.86)、(5.87)式，在边界S_1与S_2上满足边界条件(5.88)、(5.89)式，则满足变分方程(5.91)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\delta\left\{\iiint_{v_a}\left[-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\,\sigma_{kl}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-u_i\left(\left(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right)\right]\mathrm{d}v\right\}=0 \qquad (5.91)$$

5. 余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅱ

（1）若在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.82）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

（2）若位移、应变、应力函数在元素交界面上满足交界条件（5.86～5.87）式，在边界上满足边界条件（5.88)、(5.89）式，则满足变分方程（5.92）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\left(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}\right)\delta\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$+\left(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\left(\underset{\cdots}{u_i}\right)-\sigma_{ij}\right)\delta\varepsilon_{ij}$$

$$-\Big(\big((a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl})_{,j}+F_i\big)\delta u_i\Big]dv\Big\}=0 \qquad (5.92)$$

（3）若在元素内部位移、应变、应力函数满足方程(5.83～5.85)式；在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数，则满足边界变分方程（5.93）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iint_{S_a}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-P_i^s)\delta u_i^s$$

$$+(u_i^s-u_i)\delta(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,l_j)]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i^s$$

$$+(u_i^s-u_i)\delta(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}l_j)]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}[(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,l_j-P_i^s)\delta u_i^s$$

$$+(\bar{u}_i-u_i^s)\delta P_i^s+(u_i^s-u_i)$$

$$\delta(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}l_j)]ds\Big\}=0 \qquad (5.93)$$

5.2.9 余能型修正变分原理III

基于广义变分原理的泛函（4.80）式，但采用不同于上节的分片构造待解函数类，可形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；

（2）在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则

使下面泛函（5.94）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$M_{eb-3}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[-\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}$$

$$-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)-\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})$$

$$-u_i\Big((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i\Big)\Big]dv$$

$$+\iint_{S_a}u_i(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}l_j-P_i^a)ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}P_i^a u_i ds\Big\} \tag{5.94}$$

证明：在驻值条件下，由泛函（5.94）式得

$$\delta M_{eb-3}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a}\Big[-(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\,\sigma_{kl})\delta\sigma_{ij}$$

$$+(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\underset{\cdots}{u_i})-\sigma_{ij})\delta\varepsilon_{ij}$$

$$-\Big((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i\Big)\delta u_i\Big]dv$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}[(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}l_j-P_i^a)\delta u_i$$

$$+(\bar{u}_i-u_i)\delta P_i^a]ds\Big\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}[(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}l_j)^a-P_i^a]\delta u_i^a ds$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^b-P_i^a]\delta u_i^b ds$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(u_i^a)-(u_i^b)]\delta P_i^a ds\Big\}=0 \qquad (5.95)$$

根据变分法基本引理，由（5.95）式得

$$\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0 \qquad (V_a) \quad (5.96)$$

$$a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{u}_i)-\sigma_{ij}=0 \qquad (V_a) \quad (5.97)$$

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}-\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.98)$$

$$a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-P_i^a=0 \qquad (S_2),(S_{ab}) \quad (5.99)$$

$$u_i^a-u_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.100)$$

$$a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (5.101)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.102)$$

由上述分析可知，泛函（5.94）式的变分条件和变分约束条件正是弹性力学的四类基本方程和交界条件，故在变分约束条件下，泛函（5.94）式实现驻值条件的解为弹性力学问题的近似解。证毕。

2. 余能型有限元修正变分原理 I

若在元素内部位移、应变、应力函数均为独立变量函数；在元素边界上应力为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.94）式实现驻值条件的应力、位移、应变函数为弹性力学问题的近似解。

3. 余能型边界元变分原理 I

若在元素内部位移、应变、应力函数满足应力应变（5.96）式、应力位移（5.97）式、平衡方程（5.98）式；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.103)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iint_{S_a}\Big[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j u_i-u_i(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-P_i^a)\Big]ds$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i P_i^a \mathrm{d}s\Bigg\}=0 \tag{5.103}$$

4. 余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅱ

（1）若在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.95）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

（2）若在元素内部待解函数满足方程（5.96～5.98）式；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.104）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

变分方程为

$$\begin{aligned}
&\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Bigg\{\iint\limits_{S_{ab}}[((a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a-P_i^a)\delta u_i^a]\mathrm{d}s\\
&\quad+\iint\limits_{S_{ab}}[((a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^b-P_i^b)\delta u_i^b]\mathrm{d}s\\
&\quad+\iint\limits_{S_{ab}}(u_i^a-u_i^b)\delta P_i^a\mathrm{d}s\Bigg\}\\
&\quad+\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iint\limits_{S_a\cap S_1}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i]\mathrm{d}s\\
&\quad+\iint\limits_{S_a\cap S_2}[(\bar{u}_i-u_i)\delta P_i^a+(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-P_i^a)\delta u_i]\mathrm{d}s\Bigg\}=0
\end{aligned} \tag{5.104}$$

5.2.10 余能型修正变分原理Ⅳ

基于广义变分原理的泛函（4.89）式，采用分片构造待解函

数，可形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部应力、位移函数为独立变量函数；

（2）在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.105）式实现驻值条件的位移、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$M_{eb-4}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-u_i(\sigma_{ij,j}+F_i)\Big]dv+\iint_{S_a}(\sigma_{ij}l_j-P_i^a)u_i ds+\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i P_i^a ds\Big\} \tag{5.105}$$

证明：在驻值条件下，由泛函（5.105)式得

$$\begin{aligned}\delta M_{eb-4}=&\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}[(u_{i,j}-b_{ijkl}\sigma_{kl})\delta\sigma_{ij}\\&-(\sigma_{ij,j}+F_i)\delta u_i]dv\\&+\iint_{S_a\cap S_1}(\sigma_{ij}l_j-P_i)\delta u_i ds\\&+\iint_{S_a\cap S_2}[(\sigma_{ij}l_j-P_i^a)\delta u_i+(\bar{u}_i-u_i)\delta P_i^a]ds\Big\}\\&+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^a-P_i^a]\delta u_i^a ds\end{aligned}$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^b-P_i^s]\delta u_i^b \mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_{ab}}(u_i^a-u_i^b)\delta P_i^s \mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (5.106)$$

根据变分法基本引理，得

$$\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0 \qquad (V_a) \quad (5.107)$$

$$\sigma_{ij,j}+\overline{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.108)$$

$$\sigma_{ij}l_j-P_i^s=0 \qquad (S_2),(S_{ab}) \quad (5.109)$$

$$u_i^a-u_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.110)$$

$$\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (5.111)$$

$$\overline{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.112)$$

由上述可知，泛函（5.105)式的变分条件与变分约束条件正是弹性力学的四类基本方程和交界条件。证毕。

2. 余能型有限元修正变分原理Ⅳ

若在元素内部应力、位移函数为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则泛函（5.105)式实现驻值条件的应力、位移函数为弹性力学问题的近似解。

3. 余能型边界元变分原理Ⅳ

若在元素内部位移、应力函数满足方程式（5.107)、(5.108)式；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.113）式的应力、位移函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\delta\Big\{\iint_{S_a}\Big[\frac{1}{2}\sigma_{ij}l_ju_i-(\sigma_{ij}l_j-P_i^s)u_i\Big]\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\overline{u}_iP_i^s\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (5.113)$$

4. 余能区域型变分原理Ⅳ

若待解函数在元素边界上满足交界条件（5.5～5.7）式，在边界S_1和S_2上满足边界条件（5.111）、(5.112）式时，则满足变分方程（5.114）式的位移、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\delta\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\right.\right.$$

$$\left.\left.-u_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\right]dv\right\}=0 \tag{5.114}$$

5. 余能型加权余数(广义伽略金)方程Ⅳ

（1）若在元素内部位移、应力函数为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.106)式的应力、位移函数为弹性力学问题的近似解。

（2）待解函数在元素边界上满足交界条件（5.5～5.7)式，在边界S_1和S_2上满足边界条件（5.110)、(5.111）式时，则满足变分方程（5.115)式的位移、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}[(u_{i,j}-b_{ijkl}\sigma_{kl})\delta\sigma_{ij}\right.$$

$$\left.-(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta u_i]dv\right\}=0 \tag{5.115}$$

（3）若在元素内部位移、应力函数满足位移应力(5.107)式和平衡方程（5.108）式；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.116）式的位移、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i ds+\iint_{S_a\cap S_2}[(\sigma_{ij}l_j-P_i^s)\delta u_i\right.$$

$$\left.+(\bar{u}_i-u_i)\delta p_i^s]ds\right\}+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}[((\sigma_{ij}l_j)^a-P_i^s)\delta u_i^a\right.$$

$$+((\sigma_{ij}l_j)^b-P_i^s)\delta u_i^s+(u_i^a-u_i^b)\delta P_i^s]ds\Big]=0 \quad (5.116)$$

5.2.11 余能型修正变分原理V

基于广义变分原理的泛函（4.97）式，采用分片构造待解函数，可形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数具备下列条件：

（1）在元素内部应变、位移函数满足应变位移（1.2）式；

（2）在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.117）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$M_{eb-5}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})$$

$$-u_i((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i)\Big]dv$$

$$+\iint_{S_a}[u_i(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s)]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s ds\Big\} \quad (5.117)$$

证明：在驻值条件下，由泛函（5.117）式得

$$\delta M_{eb-5}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}[-(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})\delta\sigma_{ij}$$

$$-((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i)\delta u_i]dv$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i]ds$$

$$+\iint_{S_a \cap S_2} [(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s)\delta u_i$$

$$+(\bar{u}_i-u_i)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s]\mathrm{d}s\Big\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}[((a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s)\delta u_i^a$$

$$+((a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^b-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s)\delta u_i^b$$

$$+(u_i^a-u_i^b)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s]\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (5.118)$$

根据变分法基本引理，得

$$\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\,\sigma_{kl}=0 \qquad (V_a) \quad (5.119)$$

$$(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.120)$$

$$u_i^a-u_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.121)$$

$$a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s=0\ (S_2),(S_{ab}) \quad (5.122)$$

$$a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (5.123)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.124)$$

由上述分析可知，泛函（5.117）式的变分条件和变分约束条件正是弹性力学的四类方程和交界条件，故在变分约束条件下，使泛函（5.117）式实现驻值条件下的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。证毕。

2．余能型有限元修正变分原理V

若在元素内部应变、位移函数满足应变位移（1.2)式；在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.117）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

3．余能型边界元变分原理V

若在元素内部位移、应变、应力函数满足应变位移(1.2)式、应力应变（5.119)式及平衡方程（5.120)式；在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.125)式的位移、应变函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\delta\left\{\iint\limits_{S_a}\left[-\frac{1}{2}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)u_i\right.\right.$$
$$\left.+(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s)u_i\right]ds$$
$$\left.+\iint\limits_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s ds\right\}=0 \qquad (5.125)$$

4. **余能区域型变分原理V**

若应变、位移函数在元素内部满足应变位移(1.2) 式，在元素边界上满足交界条件（5.5)、(5.6) 式，在边界S_1和S_2上满足边界条件（5.123)、(5.124)式，则满足变分方程（5.126)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\delta\left\{\iiint\limits_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})\right.\right.$$
$$\left.\left.-u_i((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i)\right]dv\right\}=0 \qquad (5.126)$$

5. **余能型加权余数（广义伽略金）方程V**

（1）若在元素内部应变、位移函数满足应变位移(1.2)式；在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.118)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

（2）若在元素的交界面上，待解函数满足交界条件(5.5～5.7)式，在边界S_1与S_2上满足边界条件（5.123)、(5.124)式，则满足变分方程（5.127）式的位移、应变函数为弹性力学问题的

近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint\limits_{S_a\cap S_1}[a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i]\delta u_i ds+\iint\limits_{S_a\cap S_2}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j\right.$$

$$\left.-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s)\delta u_i+(\bar{u}_i-u_i)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s]ds\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint\limits_{S_{ab}}[((a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s)\delta u_i^a\right.$$

$$+((a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^b-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s)\delta u_i^b$$

$$\left.+(u_i^a-u_i^b)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s]ds\right\}=0 \qquad (5.127)$$

5.2.12 余能型修正变分原理VI

基于广义变分原理的泛函（4.106)式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成为有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数具备下列条件：

（1）在元素内部满足平衡方程（4.3）式；

（2）在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数时，则使下面泛函实现驻值条件的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$M_{eb-6}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{V_a}\left[\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\right]dv\right.$$

$$+\iint\limits_{S_a}u_i[\sigma_{ij}l_j-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s]ds$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}l_j)^s\,\mathrm{d}s\Big\} \qquad (5.128)$$

证明：在其驻值条件下，由泛函（5.128）式得

$$\delta M_{eb-8}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{V_a}(b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij})\delta\sigma_{ij}$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i\mathrm{d}s$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_2}[(\bar{u}_i-u_i)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s$$

$$+(\sigma_{ij}l_j-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_i)^s)\delta u_i]\mathrm{d}s\Big\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint\limits_{S_{ab}}[((\sigma_{ij}l_j)^a-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s)\delta u_i^a$$

$$+((\sigma_{ij}l_j)^b-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s)\delta u_i^b$$

$$+(u_i^a-u_i^b)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s]\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (5.129)$$

根据变分法基本引理，得

$$b_{ijkl}\,\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij}=0 \qquad (V_a) \qquad (5.130)$$

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\underset{\cdots}{u_i})=0 \qquad (V_a) \qquad (5.131)$$

$$\sigma_{ij}l_j-(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}l_j)^s=0 \qquad (S_2),(S_{ab}) \qquad (5.132)$$

$$u_i^a-u_i^b=0 \qquad (5.133)$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \qquad (5.134)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \qquad (5.135)$$

由上述分析可知，泛函（5.128)式的变分条件与变分约束条件正是弹性力学的四类基本方程及交界条件，故在变分约束条件

下，泛函（5.128）式实现驻值条件的应力、应变、位移函数为弹性力学问题的近似解。证毕。

2. 余能型有限元修正变分原理Ⅵ

若在元素内部应力函数满足平衡方程（4.3）式；在元素边界上应变函数为在边界上独立构造的边界函数时，则使泛函(5.128)式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

3. 余能型边界元变分原理Ⅵ

若待解函数在元素内部满足平衡方程（4.3）式、应力应变（5.130）式、应力位移（5.131）式；在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.136）式的位移、应力、应变关系式为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\delta\left\{\iint_{S_a}\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}l_ju_i-(\sigma_{ij}l_j-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s)u_i\right]ds-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s ds\right\}=0 \quad (5.136)$$

4. 余能区域型变分原理Ⅵ

若在元素内部应力函数满足平衡方程（4.3）式；在元素边界上满足交界条件（5.5～5.7）式；在边界S_1与S_2上满足边界条件（5.134）、(5.135）式，则满足变分方程（5.137）式的应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\delta\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{1}{2}\sigma_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\right]dv\right\}=0 \quad (5.137)$$

5. 余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅵ

（1）若在元素内部应力函数满足平衡方程（4.3）式；在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.129）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

(2) 若应力函数在元素内部满足平衡方程 (4.3) 式，在元素边界上满足交界条件 (5.5～5.7) 式，在边界S_1和S_2上满足边界条件 (5.134)、(5.135) 式时，则满足变分方程 (5.138) 式的应力、应变、位移函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[(b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij})\delta\sigma_{ij}\right.\right.$$
$$\left.\left.+(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\underset{\cdots}{u_i}))\delta\varepsilon_{ij}\right]dv\right\}=0 \tag{5.138}$$

(3) 若在元素内部待解函数满足平衡方程 (4.3) 式、应力应变 (5.130) 式、应力位移 (5.131) 式；在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程 (5.139) 式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i ds\right.$$
$$+\iint_{S_a\cap S_2}\left[(\bar{u}_i-u_i)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s\right.$$
$$\left.\left.+(\sigma_{ij}l_j-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})^s)\delta u_i\right]ds\right\}$$
$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[((\sigma_{ij}l_j)^a-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s)\delta u_i^a\right.\right.$$
$$+((\sigma_{ij}l_j)^b-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s)\delta u_i^b$$
$$\left.\left.+(u_i^a-u_i^b)\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s\right]ds\right\}=0 \tag{5.139}$$

§5.3 有限变形弹性力学的修正变分原理

基于古典与广义变分原理的泛函，采用分片构造待解函数，在元素交界面S_{ab}上要求待解函数满足交界条件（或称连续性条件）。对有限变形弹性力学问题，待解函数满足的交界条件为

（1）位移连续性条件

$$u_i^a - u_i^b = 0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.140)$$

（2）合力连续性条件

$$[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]^a + [\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]^b = 0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.141)$$

在离散分析过程中，采用分片构造待解函数的基础上，解决有限变形弹性力学问题时，待解函数在满足有限变形弹性力学的四类基本方程的同时，还必须满足交界条件(5.140)、(5.141)式。

5.3.1 势能型修正变分原理 I

基于古典变分原理的泛函（3.29）式，对固体系统进行几何剖分，采用分片构造待解函数，当位移函数在元素交界面上不连续时，为了保证连续性条件（5.140）式，采用拉氏乘子法将变分约束条件（5.140）式导入泛函（3.29）式中，在泛函（3.29）式中增加修正项，即

$$\iint_{S_{ab}} \lambda_i^a (u_i^a - u_i^b) \mathrm{d}s \qquad (5.142)$$

从而形成了势能型修正变分原理 I 的泛函。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数具备：

(1) 在元素内部，满足应变位移 (1.15) 式；

(2) 在边界S_2上，满足位移边界条件 (1.23) 式；

(3) 在元素边界面上，应变为独立构造的边界函数时，

则使下面泛函 (5.143) 式实现驻值条件的位移、应变函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{na-1} = & \sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}[A(e_{ij})-\bar{F}_k u_k]\mathrm{d}v\right. \\
& \left. - \iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_k u_k \mathrm{d}s\right\} \\
& - \sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\iint_{S_{ab}}\lambda_k^s(u_k^a - u_k^b)\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{5.143}
$$

其中$A(e_{ij})$为(1.26)式，取拉氏乘子

$$
\lambda_k^s = \left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]^s
$$

证明：在驻值条件下，由泛函 (5.143) 式得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{na-1} = & \sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a} -\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})+\bar{F}_k\right]\delta u_k \mathrm{d}v\right. \\
& \left. - \iint_{S_a\cap S_1}\left[\bar{P}_k - \frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\delta u_i \mathrm{d}s\right\} \\
& - \sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[\lambda_k^s - \left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^a\right]\delta u_i^a \mathrm{d}s\right. \\
& + \iint_{S_{ab}}\left[\lambda_k^s - \left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^b\right]\delta u_i^b \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$-\iint_{S_{ab}}(u_k^a-u_k^b)\delta\lambda_k^a \mathrm{d}s\Big\}=0 \tag{5.144}$$

根据变分法基本引理，得

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k=0 \qquad (V_a) \tag{5.145}$$

$$u_k^a-u_k^b=0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.146}$$

$$\lambda_k^a-\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^a=0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.147}$$

$$\lambda_k^a-\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^b=0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.148}$$

$$\bar{P}_k-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \qquad (S_1) \tag{5.149}$$

由上述分析可知，泛函（5.143）式的变分条件和变分约束条件正是有限变形弹性力学的四类基本方程及交界条件，故在变分约束条件下，使泛函（5.143）式实现驻值条件的位移、应变函数为有限变形弹性力学问题的近似解。证毕。

2．势能型有限元修正变分原理 I

若待解函数在元素内部满足应变位移（1.15）式，在边界S_2上满足位移边界条件（1.23）式；应变函数在元素边界上为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.143)式实现驻值条件的位移、应变函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

5.3.2　势能型修正变分原理II

基于广义变分原理的泛函（4.138)式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1．变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成为有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数满足下列条件：

（1）位移、应变、应力函数在元素内部为独立变量函数；

(2) 在元素边界上应力、位移函数为独立构造的边界函数时，则使下面泛函 (5.150) 式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$M_{na-2}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[A(e_{ij})-\bar{F}_k u_k\right.\right.$$
$$-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\right]dv-\iint_{S_a}P_k^s(u_k-u_k^s)ds$$
$$\left.-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_k u_k^s ds\right\} \tag{5.150}$$

其中$A(e_{ij})$为 (1.26) 式。

证明： 在驻值条件下，由泛函 (5.150) 式得

$$\delta M_{na-2}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\delta e_{ij}$$
$$-\frac{1}{2}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\delta\sigma_{ij}$$
$$\left.-\left(\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k\right)\delta u_k\right]dv$$
$$-\iint_{S_a}\left[(u_k-u_k^s)\delta P_k^s+\left(P_k^s-\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\delta u_k\right]ds$$
$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[(u_k-u_k^s)\delta P_k^s+(\bar{P}_k-P_k^s)\delta u_k^s\right.$$
$$\left.+\left(P_k^s-\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\delta u_k\right]ds$$

$$-\iint_{S_a \cap S_2}\Big[(u_k-\bar{u}_k)\delta P_k^s+\Big(P_k^s-\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big)$$

$$(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big)\delta u_k\Big]ds\Big\}=0 \qquad (5.151)$$

其中在元素交界面S_{ab}上有$P_k^s\delta u_k^s$为相消项。

根据变分法基本引理，得

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}}=0 \qquad (V_a) \quad (5.152)$$

$$e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}=0 \quad (V_a) \quad (5.153)$$

$$\Big(\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big)(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k=0(V_a) \quad (5.154)$$

$$u_k-u_k^s=0 \qquad (S_1),(S_2),(S_a) \quad (5.155)$$

$$P_k^s-\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \ (S_1),(S_2),(S_a)$$

$$(5.156)$$

$$\bar{P}_k-P_k^s=0 \qquad (S_1) \quad (5.157)$$

$$u_k-\bar{u}_k=0 \qquad (S_2) \quad (5.158)$$

由上述可知，泛函（5.150）式的变分条件正是有限变形弹性力学的四类基本方程和交界条件，故泛函（5.150)式实现驻值条件的解为有限变形弹性力学问题的近似解。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理Ⅰ

若在元素内部位移、应变及应力函数为独立变量函数；在元素边界上应力、位移函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.150）式实现驻值条件的位移、应变及应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

3. 势能型边界元变分原理Ⅰ

若在元素内部位移、应变及应力函数满足应力位移(5.152)式、应变位移（5.153）式及平衡方程（5.154）式；在元素边界

上应力、位移函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.159）式的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{M}\Big\{ & \iint\limits_{S_\alpha}\Big[(u_k-u_k^s)\delta P_k^s+\Big(P_k^s-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki} \\
& +u_{k,i})l_j\Big)\delta u_k\Big]ds \\
& -\iint\limits_{S_\alpha\cap S_1}\Big[(u_k-u_k^s)\delta P_k^s+(\bar{P}_k-P_k^s)\delta u_k^s \\
& +\Big(P_k^s-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big)\delta u_k\Big]ds \\
& -\iint\limits_{S_\alpha\cap S_2}\Big[(u_k-u_k^s)\delta P_k^s+\Big(P_k^s-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki} \\
& +u_{k,i})l_j\Big)\delta u_k\Big]ds\Big\}=0 \qquad (5.159)
\end{aligned}
$$

4. 势能型加权余数（广义加略金）方程Ⅱ

（1）若在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上，应力、位移函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.151)式的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

（2）若位移、应变、应力函数在元素交界面上满足交界条件（5.155)、(5.156）式，在边界S_1与S_2上满足边界条件（5.157)、(5.158）式，则满足变分方程（5.160）式的应力、应变、位移函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{M}\Big\{ & \iiint\limits_{V_\alpha}\Big[-\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\Big(\frac{1}{2}u_{i,j} \\
& +\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Big)\Big)\delta e_{ij}
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{1}{2}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\delta\sigma_{ij}
$$

$$
-\left(\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k\right)\delta u_k\Bigg]\mathrm{d}v\Bigg\}=0
$$

(5.160)

5.3.3 势能型修正变分原理III

基于广义变分原理的泛函（4.138）式，但采用不同于上节中的分片构造的待解函数类，从而形成下面各修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数满足下列条件：

（1）位移、应变、应力函数在元素内部为独立变量函数；

（2）在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，

则使下面泛函（5.161）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$
M_{na-3}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Bigg[A(e_{ij})-\bar{F}_k u_k
-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}
-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\Bigg]\mathrm{d}v-\iint_{S_a}\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(u_k-u_k^s)\mathrm{d}s
-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_k u_k^s\mathrm{d}s\Bigg\} \qquad (5.161)
$$

其中$A(e_{ij})$为(1.26)式。

证明：在驻值条件下，由泛函（5.161）式得

$$
\delta M_{na-3}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Bigg[-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\left(\frac{1}{2}u_{l,j}\right.\right.
$$

$$+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Big)\Big)\delta e_{ij}$$

$$-\frac{1}{2}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\delta\sigma_{ij}$$

$$-\left(\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k\right)\delta u_k\Big]dv$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_1}\Big[(u_k-u_k^s)\delta\Big(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big)$$

$$+\Big(\bar{P}_k-\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)\delta u_k^s\Big]ds$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_2}\Big[(u_k-\bar{u}_k)\delta\Big(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big)\Big]ds\Big\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint\limits_{S_{ab}}\Big[(u_k^a-u_k^s)\delta\Big(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big)^a$$

$$+(u_k^b-u_k^s)\delta\Big(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big)^b$$

$$+\Big(\Big(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big)^a+\Big(\delta_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big)^b\Big)$$

$$\cdot\ \delta u_k^s\Big]ds=0 \qquad (5.162)$$

根据变分法基本引理，得

$$e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}=0 \qquad (V_a) \quad (5.163)$$

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}}=0 \qquad (V_a) \quad (5.164)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k=0 \ (V_a) \quad (5.165)$$

$$u_k^a-u_k^s=0 \qquad (S_1),(S_{ab}) \quad (5.166)$$

$$u_k^b-u_k^s=0 \qquad (S_1),(S_{ab}) \quad (5.167)$$

$$(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a+(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b=0$$

$$(S_{ab}) \quad (5.168)$$

$$\bar{P}_k-\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_i=0 \qquad (S_1) \quad (5.169)$$

$$u_k-\bar{u}_k=0 \qquad (S_2) \quad (5.170)$$

由上述可知，泛函（5.161)式的变分条件正是有限变形弹性力学问题的四类基本方程及交界条件，故泛函(5.161)式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

2. 势能型有限元修正变分原理Ⅱ

若在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则泛函（5.161)式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

3. 势能型边界元变分原理Ⅱ

若在元素内部位移、应变、应力函数满足应变位移(5.163)式、应力位移（5.164）式、平衡方程（5.165）式；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则满足下面边界变分方程（5.171）式的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}\left[(u_k-u_k^*)\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\right.\right.$$

$$\left.+(\bar{P}_k-\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\delta u_k^*\right]ds$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(u_k-\bar{u}_k)\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\right]ds\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[(u_k^a-u_k^*)\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a\right.\right.$$

$$+(u_k^b-u_k^*)\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b$$

$$\left.\left.+(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a+(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b\right]\delta u_k^*\right\}ds=0$$

(5.171)

4. 势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅱ

若在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.162）式的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

5.3.4 势能型修正变分原理Ⅳ

基于广义变分原理的泛函（4.146）式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数满足：

（1）在元素内部位移、应变函数为独立变量函数；

（2）在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，

则使下面泛函（5.172）式实现驻值条件的位移、应变函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{na-4}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Big[A(e_{ij})-F_k u_k \\
&-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Big)\Big]\mathrm{d}v \\
&-\iint_{S_a}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(u_k-u_k^s)\mathrm{d}s \\
&-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_k u_k^s\mathrm{d}s\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{5.172}
$$

证明： 在驻值条件下，由泛函（5.172）式得

$$
\delta M_{na-4}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Big[-\Big(\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k\Big)\delta u_k
$$

$$-\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\Bigg]dv$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_1}\Bigg[(u_k-u_k^s)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right.$$

$$\left.+\left(\bar{P}_k-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\delta u_k^s\right]ds$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_2}\left[(u_k-\bar{u}_k)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\right]ds\Bigg\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Bigg\{\iint\limits_{S_{ab}}\Bigg[(u_k^a-u_k^s)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^a$$

$$+(u_k^b-u_k^s)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^b$$

$$+\left(\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)^a+\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)^b\right)$$

$$\cdot\ \delta u_k^s\Bigg]ds\Bigg\}=0 \qquad (5.173)$$

根据变分法基本引理，得

$$\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0 \qquad (V_a) \quad (5.174)$$

$$e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}=0 \qquad (V_a) \quad (5.175)$$

$$u_k^a-u_k^s=0 \qquad (S_1),(S_{ab}) \quad (5.176)$$

$$u_k^b-u_k^s=0 \qquad (S_1),(S_{ab}) \quad (5.177)$$

$$\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]^a+\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]^b=0$$

$$(S_{ab}) \quad (5.178)$$

$$\bar{P}_k-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \qquad (S_1) \quad (5.179)$$

$$u_k-\bar{u}_k=0 \qquad (S_2) \quad (5.180)$$

由上述可知，泛函（5.172）式的变分条件和一般约束条件正是有限变形弹性力学的四类基本方程和交界条件，故泛函（5.172）式实现驻值条件的位移、应变和应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。证毕。

2．势能型有限元修正变分原理Ⅳ

若在元素内部位移、应变函数为独立变量函数；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.172)式实现驻值条件的位移、应变为有限变形弹性力学问题的近似解。

3．势能型边界元变分原理Ⅳ

若在元素内部位移、应变函数满足平衡方程（5.174)式、应变位移（5.175）式；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.181）的位移、应变函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iint\limits_{S_a\cap S_1}\Bigg[(u_k-u_k^s)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\\
&\quad+\left(\bar{P}_k-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\delta u_k^s\Bigg]ds\\
&\quad+\iint\limits_{S_a\cap S_2}\Bigg[(u_k-\bar{u}_k)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\Bigg]ds\Bigg\}\\
&\quad+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Bigg\{\iint\limits_{S_a}\Bigg[(u_k^a-u_k^s)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\\
&\quad+(u_k^b-u_k^s)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\\
&\quad+\Bigg(\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^a\\
&\quad+\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^b\Bigg)\delta u_k^s\Bigg]ds\Bigg\}=0 \qquad (5.181)
\end{aligned}
$$

4．势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅳ

(1) 若在元素内部位移、应变函数为独立变量函数；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.173)式的位移、应变函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

(2) 在元素边界上，待解函数满足交界条件(5.176～5.178)式；在边界S_1与S_2上，满足边界条件(5.179)、(5.180)式时，则满足变分方程(5.182)式的位移、应变函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k\right)\delta u_k\right]dv\right\}=0 \qquad (5.182)$$

5.3.5 势能型修正变分原理V

基于广义变分原理的泛函(4.153)式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数具备下列条件：

(1) 在元素内部应变、位移函数满足应变位移(5.175)式；

(2) 在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，

使下面泛函(5.183)式实现驻值条件的位移、应变、应力泛函为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$M_{aa\quad 5}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[A(e_{ij})-\bar{F}_k u_k\right]dv\right.$$
$$-\iint_{S_a}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\left(\delta_{ki}+u_{k,i}\right)l_j\,(u_k-u_k^s)ds$$

$$
-\iint_{S_a \cap S_1} \bar{P}_k u_k^s \mathrm{d}s \Bigg\} \tag{5.183}
$$

其中$A(e_{ij})$为（1.26）式。

证明：在驻值条件下，由泛函（5.183)式得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{na-3} = \sum_{a=1}^{M} \Bigg\{ & \iiint_{V_a} \Bigg[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} - \sigma_{ij}\right)\delta e_{ij} \\
& - \left(\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki} + u_{k,i})\right)_{,j} + \bar{F}_k \right)\delta u_k \Bigg] \mathrm{d}v \\
& - \iint_{S_a \cap S_1} \Bigg[(u_k - u_k^s)\delta\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki} + u_{k,i}) l_j\right) \\
& + \left(\bar{P}_k - \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki} + u_{k,i}) l_j\right)\delta u_k^s \Bigg] \mathrm{d}s \\
& - \iint_{S_a \cap S_2} \Bigg[(u_k - \bar{u}_k)\delta\Bigg(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right) \\
& \cdot (\delta_{ki} + u_{k,i}) l_j \Bigg] \mathrm{d}s \Bigg\} \\
& - \sum_{S_{ab}=1}^{S_0} \Bigg\{ \iint_{S_{ab}} \Bigg[(u_k^a - u_k^s)\delta\Bigg(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right) \\
& \cdot (\delta_{ki} + u_{k,i}) l_j \Bigg)^a \\
& + (u_k^b - u_k^s)\delta\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki} + u_{k,i}) l_j\right)^b \\
& + \left(\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki} + u_{k,i}) l_j\right)^a \right. \\
& \left. + \left(\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki} + u_{k,i}) l_j\right)^b \right)\delta u_k^s \Bigg] \mathrm{d}s \Bigg\} = 0
\end{aligned} \tag{5.184}
$$

根据变分法基本引理，得

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}=0 \qquad (V_a)(5.185)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k=0 \qquad (V_a)\ (5.186)$$

$$u_k^a-u_k^s=0 \qquad (S_1),(S_{ab})\ (5.187)$$

$$u_k^b-u_k^s=0 \qquad (S_1),(S_{ab})\ (5.188)$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]^a$$

$$+\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i}l)_j\right]^b=0 \qquad (5.189)$$

$$\bar{P}_k-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \qquad (S_1)\ (5.190)$$

$$u_k-\bar{u}_k=0 \qquad (S_2)\ (5.191)$$

由上述分析可知，泛函（5.183）式的变分条件和变分约束条件正是有限变形弹性力学的四类基本方程及交界条件，故在变分约束条件下，使泛函（5.183)式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。证毕。

2．势能型有限元修正变分原理V

若在元素内部应变、位移函数满足应变位移关系式（5.175）式；在元素边界上，位移函数为独立构造的边界函数时，使泛函（5.183)式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

3．势能型边界元变分原理V

若在元素内部位移、应变、应力函数满足应变位移(5.175)式、应力应变（5.185）式及平衡方程（5.186）式；在元素边界上，位移函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.192）式的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[(u_k^a-u_k^s)\delta\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^a\right.\right.$$

$$+(u_k^b-u_k^s)\delta\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^b$$

$$+\left(\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^a+\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^b\right)\delta u_k^s\right]\mathrm{d}s\Bigg\}$$

$$+\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}\left[(u_k-u_k^s)\delta\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\right.\right.$$

$$\left.+\left(\overline{P}_k-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\delta u_k^s\right]\mathrm{d}s$$

$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}\left[(u_k-\overline{u}_k)\delta\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\right]\mathrm{d}s\right\}=0$$

(5.192)

4. 势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅴ

(1) 若应变、位移函数满足应变位移 (5.175) 式；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.184)式的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

(2) 若在元素的交界面上待解函数满足交界方程 (5.187～5.189)式；在边界S_1与S_2上满足边界条件 (5.190)、(5.191) 式时，则满足边界变分方程 (5.193) 式的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)\delta e_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\overline{F}_k\right)\delta u_k\right]\mathrm{d}v\right\}=0$$

(5.193)

5.3.6 势能型修正变分原理VI

基于广义变分原理的泛函（4.166）式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数满足：

（1）在元素内部满足平衡方程

$$\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0 \qquad (5.194)$$

（2）在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，

则使下面泛函（5.195）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$\begin{aligned}M_{na-6}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\left(\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\right]dv\\&-\iint_{S_a}\left[P_i^a-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]u_i ds\\&+\iint_{S_a\cap S_2}P_i^a\bar{u}_i ds\Bigg\}\end{aligned} \qquad (5.195)$$

证明： 在驻值条件下，由泛函（5.195）式得

$$\begin{aligned}\delta M_{na-6}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Bigg[-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A(e_{ij}(u_i))}{\partial e_{ij}}\right)\delta e_{ij}\\&-\frac{1}{2}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\delta\sigma_{ij}\Bigg]dv\\&-\iint_{S_a\cap S_1}\left[\bar{P}_k-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\delta u_k ds\end{aligned}$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(P_k^s-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\delta u_k\right.$$

$$\left.+(u_k-\bar{u}_k)\delta P_k^s\right]ds\Big\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_a}\Big[\Big(P_k^s-\Big(\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big)(\delta_{ki}$$

$$+u_{k,i})l_j\Big)^a\Big)\delta u_k^a+\Big(P_k^s-\Big(\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big)$$

$$\cdot(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big)^b\Big)\delta u_k^b$$

$$+(u_k^a-u_k^b)\delta P_k^s\Big]ds\Big\}=0 \tag{5.196}$$

根据变分法基本引理，得

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A(e_{ij}(u_i))}{\partial e_{ij}}=0 \qquad (V_a) \tag{5.197}$$

$$e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}=0 \qquad (V_a) \tag{5.198}$$

$$u_i^a-u_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.199}$$

$$P_k^s-\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]^a=0 \qquad (S_2),(S_{ab}) \tag{5.200}$$

$$P_k^s-\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]^b=0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.201}$$

$$\bar{P}_k-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \qquad (S_1) \tag{5.202}$$

$$u_k-\bar{u}_k=0 \qquad (S_2) \tag{5.203}$$

由以上分析可知，泛函（5.195）式的变分条件和变分约束条件正是有限变形的四类基本方程和交界条件，故在变分约束条件下，使泛函（5.195）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数

为有限变形弹性力学问题的近似解。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理Ⅵ

若在元素内部应力函数满足平衡方程（5.194）式；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.195)式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

3. 势能型边界元变分原理Ⅵ

若在元素内部待解函数满足平衡方程（5.194）式、应变位移（5.198）式及应力位移（5.197)式；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.204）式的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}\left[\bar{P}_k-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\delta u_k \mathrm{d}s\right.$$
$$+\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(P_k^s-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\delta u_k\right.$$
$$\left.\left.+(u_k-\bar{u}_k)\delta P_k^s\right]\mathrm{d}s\right\}$$
$$+\sum_{a,b=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[(u_k^a-u_k^b)\delta P_k^s\right.\right.$$
$$+\left(P_k^s-\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^a\right)\delta u_k^a$$
$$\left.\left.+\left(P_k^s-\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^b\right)\delta u_k^b\right]\mathrm{d}s\right\}=0$$

（5.204）

4. 势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅵ

（1）若在元素内部应力函数满足平衡方程（5.194）式；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程

(5.196) 式的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

(2) 若在元素内部应力函数满足平衡方程(5.194)式；在元素交界面上待解函数满足交界条件(5.199～5.201)式；在边界S_1与S_2上满足边界条件 (5.202)、(5.203) 式，则满足变分方程 (5.204) 式的位移、应力、应变函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A(e_{ij}(u_i))}{\partial e_{ij}}\right)\delta e_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\delta\sigma_{ij}\right]dv\right\}=0 \tag{5.205}$$

5.3.7 余能型修正变分原理 I

基于古典变分原理的泛函 (3.37) 式，对固体系统进行几何剖分，采用分片构造待解函数，当在元素内部构造的待解函数不满足合力连续条件 (5.141)式时，为了保证合力的连续性条件成立，采用拉氏乘子法将变分约束条件 (5.141)式导入泛函(3.37)式中，在泛函中增加了修正项，即

$$\iint_{S_{ab}}\lambda_k^*\left[(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a+(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b\right]ds \tag{5.206}$$

从而形成了余能型修正变分原理 I 的泛函。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数具备下列条件：

（1）在元素内部满足平衡方程（1.14）式；

（2）在边界S_1上满足边界条件（1.22）式；

（3）在元素交界面S_{ab}上合力连续性条件（5.141）式不必满足时，

则使下面泛函（5.207）式实现驻值条件的位移、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$M_{nb-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[B(\sigma_{ij})+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}\right]dv\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_k\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j ds\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\iint_{S_{ab}}\lambda_k^s[(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))^a+(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))^b]\,ds$$

(5.207)

其中$B(\sigma_{ij})$为(1.29)式；λ_k^s为交界面S_{ab}上的拉氏乘子。

证明：在驻值条件下，由泛函（5.207）式得

$$\delta M_{nb-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\delta\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$\left.+u_{k,i}\sigma_{ij}\delta u_{k,j}\right]dv-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_k\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)ds$$

$$-\iint_{S_a}[\lambda_k^s\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)$$

$$\left.+\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\delta\lambda_k^s]ds\right\}=0$$

因具有变分约束条件，故有

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}u_k\delta\ (\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\ )_{,j}\,dv\ \right\}$$

$$= \sum_{a=1}^{M} \left\{ \iiint\limits_{V_a} [-u_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\delta\sigma_{ij} - u_{k,i}\sigma_{ij}\delta u_{k,j}]\mathrm{d}v \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{S_a} u_k \delta\ (\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\mathrm{d}s \right\} = 0$$

上面两式相加，得

$$\delta M_{nb-1} = \sum_{a=1}^{M} \left\{ \iiint\limits_{V_a} \left[\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i} \right. \right.$$

$$\left. + u_{k,i}u_{k,j}) \right] \delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v$$

$$\left. - \iint\limits_{S_a \cap S_2} (\bar{u}_k - u_k)\delta\ [\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]\mathrm{d}s \right\}$$

$$- \sum_{S_{ab}=1}^{S_0} \left\{ \iint\limits_{S_{ab}} [(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a \right.$$

$$+ (\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,j})l_j)^b]\delta\lambda_k^s \mathrm{d}s$$

$$+ \iint\limits_{S_{ab}} [(\lambda_k^s - u_k^a)\delta(\ \sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\ )^a$$

$$\left. + (\lambda_k^s - u_k^b)\delta\ (\ \sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\ )^b]\mathrm{d}s \right\} = 0$$

$$(5.208)$$

根据变分法的基本引理，得

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}) = 0 \qquad (V_a) \quad (5.209)$$

$$\bar{u}_k - u_k = 0 \qquad (S_2) \quad (5.210)$$

$$(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a + (\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b = 0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.211)$$

$$\lambda_k^s - u_k^a = 0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.212)$$

$\lambda_k^a - u_k^b = 0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.213)$

综上所述，泛函（5.207）式的变分条件、变分约束条件和一般约束条件正是有限变形弹性力学的四类基本方程和交界条件，故泛函（5.207)式在变分约束条件下，实现驻值条件的位移、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。证毕。

2．余能型有限元修正变分原理 I

（1）若在元素内部待解函数满足平衡条件（1.14）式；在边界上满足力的边界条件（1.22）式；在元素交界面上引入独立参量λ_k^a时，则使泛函（5.207）式实现驻值条件的位移、应力、λ_k^a为有限变形弹性力学问题的近似解。

（2）若待解函数在元素内部满足平衡条件（1.14）式，在边界上满足力的边界条件（1.22）式；在元素交界面上，令

$$\lambda_k^a = u_k^a \qquad (5.214)$$

即在元素交界面上独立构造位移函数为边界函数时，则使泛函（5.207）式实现驻值条件的位移、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

5.3.8 余能型修正变分原理II

基于广义变分原理的泛函（4.204）式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1．变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割为有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；

（2）在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，

则使下面泛函（5.215）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数

为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$M_{nb\cdot 2}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\right)\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)+u_k\left(\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}\right.$$

$$\left.\left.+\bar{F}_k\right)\right]dv-\iint_{S_a}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-P_k^s\right)u_k^s\mathrm{d}s\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_kP_k^s\mathrm{d}s\right\}\tag{5.215}$$

其中$A(e_{ij})$为（1.26）式；$B(\sigma_{ij})$为（1.29）式。

证明： 在驻值条件下，由泛函（5.215）式得

$$\delta M_{nb\cdot 2}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\right)\delta\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$+\left(\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k\right)\delta u_k$$

$$\left.+\left(\sigma_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\frac{\partial^2A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\right)\delta e_{ij}\right]dv$$

$$-\iint_{S_a}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-P_k^s\right)\delta u_k^s\right.$$

$$\left.+\left(u_k^s-u_k\right)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\right]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\right)\delta u_k^s\right.$$

$$\left.+(u_k^s-u_k)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\right]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-P_k^s\right)\delta u_k^s\right.$$

$$+(u_k^g-u_k)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)$$

$$+(\bar{u}_k-u_k^g)\delta P_k^g\Big]\mathrm{d}s\Big\}=0 \tag{5.216}$$

其中在元素交界面S_{ab}上$u_k^g\delta P_k^g$为相消项。

根据变分法基本引理，得

$$e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=0 \qquad (V_a) \tag{5.217}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k=0 \qquad (V_a) \tag{5.218}$$

$$\sigma_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}=0$$

利用（5.217）式，上式可变为

$$e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}=0 \qquad (V_a) \tag{5.219}$$

$$u_k^g-u_k=0 \qquad (S_1),(S_2),(S_a) \tag{5.220}$$

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-P_k^g=0 \qquad (S_2),(S_a) \tag{5.221}$$

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0 \qquad (S_1) \tag{5.222}$$

$$\bar{u}_k-u_k^g=0 \qquad (S_2) \tag{5.223}$$

由上述分析可知，泛函（5.215）式的变分条件为有限变形弹性力学的四类基本方程和交界条件，故泛函（5.215)式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。证毕。

2. 余能型有限元修正变分原理 I

若位移、应变、应力函数在元素内部为独立变量函数，在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.215）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为有限变形弹

性力学问题的近似解。

3. 余能型边界元变分原理Ⅱ

若在元素内部待解函数满足应力应变（5.217）式、应变位移（5.219）式、平衡方程（5.218）式；在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.224)式的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iint_{S_a}\Bigg[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-P_k^s\right)\delta u_k^s \\
&+(u_k^s-u_k)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\Bigg]ds \\
&-\iint_{S_a\cap S_1}\Bigg[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\right)\delta u_k^s \\
&+(u_k^s-u_k)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\Bigg]ds \\
&-\iint_{S_a\cap S_2}\Bigg[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-P_k^s\right)\delta u_k^s \\
&+(u_k^s-u_k)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right) \\
&+(\bar{u}_k-u_k^s)\delta P_k^s\Bigg]ds\Bigg\}=0
\end{aligned}
\tag{5.224}
$$

4. 余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅱ

（1）若在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.216）式的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

（2）若待解函数在元素边界上满足交界条件（5.220）、（5.221）式；在边界S_1与S_2上满足边界条件（5.222)、(5.223）式，则满足变分方程（5.225）式的位移、应变、应力函数为有限

变形弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}\right)\delta\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$+\left(\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k\right)\delta u_k$$

$$\left.\left.+\left(\sigma_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\right)\delta e_{ij}\right]dv\right\}=0$$

(5.225)

5.3.9 余能型修正变分原理III

基于广义变分原理的泛函（4.204）式，采用不同于上节分片构造的待解函数类，从而形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；

（2）在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，

则使泛函（5.226）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$M_{nb-3}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}\right)\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)+u_k\left(\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k\right)\right]dv$$

$$-\iint_{S_a}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-P_k^s\right)u_k ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_k P_k^a \mathrm{d}s\Big\}\qquad(5.226$$

其中$A(e_{ij})$为(1.26)式；$B(\sigma_{ij})$为(1.29)式。

证明：在驻值条件下，由泛函（5.226）式得

$$\delta M_{nb-3}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[\Big(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\Big)\delta\sigma_{ij}$$

$$+\Big(\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k\Big)\delta u_k$$

$$+\Big(\sigma_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\frac{\partial A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\Big)\delta e_{ij}\Big]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\Big)\delta u_k\Big]\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-P_k^a\Big)\delta u_k$$

$$+(\bar{u}_k-u_k)\delta P_k^a\Big]\mathrm{d}s\Big\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big)^a-P_s^k\Big]\delta u_k^a\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_{ab}}\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big)^b-P_k^a\Big]\delta u_k^b\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_{ab}}\Big[(u_k^a-u_k^b)\delta P_k^a\Big]\mathrm{d}s\Big\}=0\qquad(5.227)$$

根据变分法基本引理，得

$$e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=0\qquad(V_a)\quad(5.228)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k=0 \qquad (V_a) \quad (5.229)$$

$$\sigma_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}=0$$

利用（5.228）式，上式可变为

$$e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0 \qquad (V_a) \quad (5.230)$$

$$u_k^a-u_k^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.231)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^a-P_k^s=0 \quad (S_2),(S_{ab}) \quad (5.232)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^b-P_k^s=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.233)$$

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0 \qquad (S_1) \quad (5.234)$$

$$\bar{u}_k-u_k=0 \qquad (S_2) \quad (5.235)$$

综上所述，泛函（5.226）式的变分条件正是有限变形弹性力学的四类基本方程及交界条件，故使泛函（5.226)式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

2. 余能型有限元修正变分原理Ⅱ

若在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.226）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

3. 余能型边界元变分原理Ⅱ

若在元素内部待解函数满足应力应变关系式（5.228)式、平衡方程（5.229）式及应变位移关系式（5.230）式；在元素边界上，应力函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.236）式的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的

近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\right)\delta u_k\right]ds\right.$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-P_k^s\right)\delta u_k\right.$$

$$\left.\left.+(\bar{u}_k-u_k)\delta P_k^s\right]ds\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^a-P_k^s\right]\delta u_k^a ds\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^b-P_k^s\right]\delta u_k^b ds$$

$$\left.+\iint_{S_{ab}}\left[(u_k^a-u_k^b)\delta P_k^s\right]ds\right\}=0 \qquad (5.236)$$

4．余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅱ

若在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.227)式的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

5.3.10 余能型修正变分原理Ⅳ

基于广义变分原理的泛函(4.212)式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1．变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成为有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部位移、应力函数为独立变量函数；

（2）在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，

则使泛函（5.237）式实现驻值条件的位移、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{nb-4}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Big[B(\sigma_{ij})+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}\\
&+u_k((\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}+\bar{F}_k)\Big]dv\\
&-\iint_{S_a}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-P_k^s]u_k ds\\
&-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_k P_k^s ds\Bigg\}
\end{aligned}
\qquad (5.237)
$$

证明： 在驻值条件下，由泛函（5.237）式得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{nb-4}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Big[\Big(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\Big)\delta\sigma_{ij}\\
&+((\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}+\bar{F}_k)\delta u_k\Big]dv\\
&-\iint_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k)\delta u_k]ds\\
&-\iint_{S_a\cap S_2}[(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-P_k^s)\delta u_k\\
&+(\bar{u}_k-u_k)\delta P_k^s]ds\Bigg\}\\
&-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Bigg\{\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a-P_k^s]\delta u_k^a ds\\
&+\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b-P_k^s]\delta u_k^b ds
\end{aligned}
$$

$$-\iint_{S_{ab}}[(u_k^a-u_k^b)\delta P_k^s]ds\Big\}=0 \tag{5.238}$$

根据变分法基本引理，得

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0 \qquad (V_a) \tag{5.239}$$

$$(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}+\bar{F}_k=0 \qquad (V_a) \tag{5.240}$$

$$(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a-P_k^s=0 \qquad (S_2),(S_{ab}) \tag{5.241}$$

$$(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b-P_k^s=0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.242}$$

$$u_k^a-u_k^b=0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.243}$$

$$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0 \qquad (S_1) \tag{5.244}$$

$$\bar{u}_k-u_k=0 \qquad (S_2) \tag{5.245}$$

由上述可知，泛函（5.237）式的变分条件和一般约束条件正是有限变形弹性力学的四类基本方程和交界条件，故泛函（5.237）式实现驻值条件的位移、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。证毕。

2．余能型有限元修正变分原理Ⅳ

若在元素内部位移、应力函数为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.237)式实现驻值条件的位移、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

3．余能型边界元变分原理Ⅳ

若在元素内部位移、应力函数满足应力位移（5.239)式、平衡方程（5.240）式；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.246）式的位移、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iint_{S_a\cap S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]\delta u_k ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}[(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-P_k^a)\delta u_k$$

$$+(\bar{u}_k-u_k)\delta P_k^a]\mathrm{d}s\Big\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a-P_k^a]\delta u_k^a\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b-P_k^a]\delta u_k^b\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(\bar{u}_k-u_k)\delta P_k^a]\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (5.246)$$

4. 余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅳ

（1）若在元素内部位移、应力函数为独立变量函数；在元素边界上，应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.238）式的位移、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

（2）在元素交界面上待解函数满足交界条件（5.241～5.243）式；在边界S_1与S_2上满足边界条件（5.244）、（5.245）式时，则满足变分方程（5.247）式的位移、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[\Big(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\Big)\delta\sigma_{ij}$$

$$+((\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}+\bar{F}_k)\delta u_k\Big]\mathrm{d}v\Big\}=0 \qquad (5.247)$$

5.3.11 余能型修正变分原理Ⅴ

基于广义变分原理的泛函（4.213）式，采用分片构造待解

函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1．变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部应力、位移函数为独立变量函数；应变位移关系式为一般约束条件；

（2）在元素边界上用独立构造的位移边界函数来表示应变函数时，

则使下面泛函（5.248）式实现驻值条件的位移、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{mb-5}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Bigg[-B(\sigma_{ij})+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\left(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}\right)\\
&+\sigma_{ij}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\\
&+u_k\left(\left(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k\right)\Bigg]\mathrm{d}v\\
&+\iint_{S_a}\Bigg[\left(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^s\\
&-\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Bigg]u_k\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^s(\bar{u}_k)\right]\mathrm{d}s\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{5.248}
$$

其中$B(\sigma_{ij})$为(1.29)式，$A(e_{ij})$为(1.26)式。

证明：在驻值条件下，由泛函（5.248）式得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{nb-5} = \sum_{a=1}^{M} \Big\{ & \iiint\limits_{V_a} \Big[\frac{1}{2} \Big(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j} - \frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} \Big) \delta \sigma_{ij} \\
& + \Big(\Big(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}} (\delta_{ki} + u_{k,j}) \Big)_{,j} + \bar{F}_k \Big) \delta u_k \Big] \mathrm{d}v \\
& + \iint\limits_{S_a \cap S_1} \Big[\bar{P}_k - \frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}} (\delta_{ki} + u_{k,i}) l_j \Big] \delta u_k \mathrm{d}s \\
& + \iint\limits_{S_a \cap S_2} \Big[\Big(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}} (\delta_{ki} + u_{k,i}) l_j \Big)^s \\
& - \Big(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}} (\delta_{ki} + u_{k,i}) l_j \Big) \Big] \delta u_k \mathrm{d}s \\
& + \iint\limits_{S_a \cap S_2} \Big[(u_k - \bar{u}_k) \delta \Big(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}} (\delta_{ki} \\
& + u_{k,i}) l_j \Big)^s \Big] \mathrm{d}s \Big\} \\
& - \sum_{S_{ab}=1}^{S_0} \Big\{ \iint\limits_{S_{ab}} \Big[\Big(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}} (\delta_{ki} + u_{k,i}) l_j \Big)^s \\
& - \Big(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}} (\delta_{ki} + u_{k,i}) l_j \Big)^a \Big] \delta u_k^a \mathrm{d}s \\
& + \iint\limits_{S_{ab}} \Big[\Big(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}} (\delta_{ki} + u_{k,i}) l_j \Big)^s \\
& - \Big(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}} (\delta_{ki} + u_{k,i}) l_j \Big)^b \Big] \delta u_k^b \mathrm{d}s \\
& + \iint\limits_{S_{ab}} \Big[(u_k^a - u_k^b) \delta \Big(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}} (\delta_{ki}
\end{aligned}
$$

$$+u_{k,i})l_j\Big)^s\Big]ds\Big\}=0 \qquad (5.249)$$

根据变分法基本引理，得

$$\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=0 \quad (V_a) \qquad (5.250)$$

$$\left(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+F_k=0 \quad (V_a) \qquad (5.251)$$

$$u_k^a-u_k^b=0 \qquad (S_{ab}) \qquad (5.252)$$

$$\left(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^s$$
$$-\left(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^a=0$$
$$(S_2),(S_{ab}) \qquad (5.253)$$

$$\left[\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]^s$$
$$-\left[\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]^b=0$$
$$(S_{ab}) \qquad (5.254)$$

$$P_k-\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \quad (S_1) \qquad (5.255)$$

$$u_k-\bar{u}_k=0 \qquad (S_2) \qquad (5.256)$$

综上所述，泛函（5.248）式的变分条件和一般约束条件(应变位移关系式）正是有限变形弹性力学的四类基本方程和交界条件，故泛函（5.248）式实现驻值条件的位移、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。证毕。

2．余能型有限元修正变分原理Ⅴ

若在元素内部位移、应力函数为独立变量函数，在元素边界上独立构造位移函数为边界函数，并用其表示应变函数，则使泛

函（5.248）式实现驻值条件的位移、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

3. 余能型边界元变分原理Ⅴ

若在元素内部位移、应力函数满足应力位移（5.250)式及平衡方程（5.251）式；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数，并用其表示应变函数时，则满足变分方程（5.257）式的位移、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}\left[\bar{P}_k-\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]\delta u_k ds\right.$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^a\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\right]\delta u_k ds$$

$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}\left[(u_k-\bar{u}_k)\delta\left(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\right]ds\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[\left(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^s\right.\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^a\right]ds$$

$$+\iint_{S_{ab}}\left[\left(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^s\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^b\right]ds$$

$$-\iint_{S_{ab}}\left[(u_k^a-u_k^b)\delta\left(\frac{\partial A(e_{ij}(\underset{\cdots}{u_i}))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}\right.\right.$$

$$+u_{k,i})l_j\Big)^{s}\Big]\mathrm{d}s\Big\}=0 \tag{5.257}$$

4. 余能型加权余数（广义伽略金）方程V

（1）若在元素内部位移、应力函数为独立变量函数；在元素边界上，位移函数为独立构造的边界函数，并用其表示应变函数时，则满足变分方程（5.249）式的位移、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

（2）若在元素交界面上，待解函数满足交界条件（5.252～5.254）式；在边界S_1与S_2上，满足边界条件（5.255）、(5.256)式时，则满足变分方程（5.258）式的位移、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{V_\alpha}\Big[\frac{1}{2}\Big(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\Big)\delta\sigma_{ij}$$

$$+\Big(\Big(\frac{\partial A(e_{ij}(\dot{u}_i))}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k\Big)\delta u_k\Big)\mathrm{d}v\Big\}=0 \tag{5.258}$$

5.3.12 余能型修正变分原理VI

基于广义变分原理的泛函（4.225）式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部满足平衡方程

$$\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k=0 \tag{5.259}$$

（2）在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数，并用其表示应力函数时，

则使下面泛函（5.260）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{nb-6}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\left[-B(\sigma_{ij})+\sigma_{ij}e_{ij}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\right]\mathrm{d}v\\
&-\iint_{S_a}u_k\left[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^s\right]\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_k\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^s\mathrm{d}s\Bigg\}
\end{aligned}
\qquad (5.260)
$$

其中$A(e_{ij})$为(1.26)式；$B(\sigma_{ij})$为(1.29)式。

证明：在驻值条件下，并考虑到变分约束条件（5.259)式，由泛函（5.260）式得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{nb-6}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Bigg[\left(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\right)\delta\sigma_{ij}\\
&+\Bigg(\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\Bigg(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}\\
&+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Bigg)\Bigg)\delta e_{ij}\Bigg]\mathrm{d}v\\
&-\iint_{S_a\cap S_1}\left[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\right]\delta u_k\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_a\cap S_2}\Bigg[\Bigg(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\Bigg(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}\\
&+u_{k,i})l_j\Bigg)^s\Bigg)\Bigg]\delta u_k\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(\bar{u}_k-u_k)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^s\right]\mathrm{d}s\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
-\sum_{S_{ab}=1}^{s_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[\left(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^a-\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^s\right]\delta u_k^a \mathrm{d}v+\iint_{S_{ab}}\left[\left(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^b\right.\right.
$$

$$
\left.-\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^s\right]\delta u_k^b \mathrm{d}v
$$

$$
\left.-\iint_{S_{ab}}\left[(u_k^a-u_k^b)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^s\right]\mathrm{d}s\right\}=0 \tag{5.261}
$$

根据变分法基本引理，得

$$
e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=0 \qquad (V_a) \tag{5.262}
$$

$$
\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)=0
$$

亦可利用（5.262）式，上式变为

$$
e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0 \qquad (V_a) \tag{5.263}
$$

$$
u_k^a-u_k^b=0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.264}
$$

$$
\left(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^a-\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^s=0
$$

$$
(S_2),(S_{ab}) \tag{5.265}
$$

$$
\left(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^b-\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^s=0
$$

$$
(S_{ab}) \tag{5.266}
$$

$$
\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0 \qquad (S_1) \tag{5.267}
$$

$$
\bar{u}_k-u_k=0 \qquad (S_2) \tag{5.268}
$$

由以上分析可知，泛函（5.260）的变分条件和变分约束条件（平衡方程）正是有限变形弹性力学的四类基本方程和交界条件，故在变分约束条件下使泛函（5.260）式实现驻值条件的位

移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。证毕。

2．余能型有限元修正变分原理Ⅵ

在元素内部应力函数满足平衡方程（5.259）式；在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数，并用其表示应力函数时，则使泛函（5.260）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

3．余能型边界元变分原理Ⅵ

若在元素内部待解函数满足平衡方程（5.259）式、应变位移方程（5.263）式及应力应变（5.262）式；在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数，并用其表示应力函数时，则满足边界变分方程（5.269）式的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iint\limits_{S_a\cap S_1}\left[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\right]\delta u_k\mathrm{d}s \\
&\quad+\iint\limits_{S_a\cap S_2}\left[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^{s}\right]\delta u_k\mathrm{d}s \\
&\quad+\iint\limits_{S_a\cap S_2}\left[(\bar{u}_k-u_k)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^{s}\right]\mathrm{d}s\Bigg\} \\
&\quad+\sum_{S_{ab}=0}^{S_0}\Bigg\{\iint\limits_{S_{ab}}\left[\left(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^{a}-\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^{s}\right] \\
&\quad\delta u_k^{a}\mathrm{d}s+\iint\limits_{S_{ab}}\Bigg[\left(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^{b} \\
&\quad-\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^{s}\Bigg]\delta u_k^{b}\mathrm{d}s \\
&\quad+\iint\limits_{S_{ab}}\left[(\bar{u}_k-u_k)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^{s}\right]\mathrm{d}s\Bigg\}=0 \qquad (5.269)
\end{aligned}
$$

4．余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅵ

（1）若在元素内部应力函数满足平衡方程（5.259）式；在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.261）式的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

（2）若在元素内部应力函数满足平衡方程（5.259）式；在元素交界面上待解函数满足交界条件（5.264～5.266）式；在边界S_1与S_2上，满足边界条件（5.267)、(5.268）式时，则满足下面变分方程（5.270）式的位移、应变、应力函数为有限变形弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\right)\delta\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$+\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\left(\frac{1}{2}u_{l,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\right)\delta e_{ij}\Big]$$

$$\left.dv\right\}=0 \qquad (5.270)$$

§5.4 塑性形变理论的修正变分原理

基于古典与广义变分原理的泛函，采用分片构造待解函数，在元素交界面S_{ab}上，要求待解函数满足交界条件（或称连续性条件）。对塑性形变理论问题，待解函数满足的交界条件为

（1）位移连续性条件

$$u_i^a-u_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.271)$$

（2）合力连续性条件

$$(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.272)$$

在满足应力应变关系式时，亦可写为

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}l_j\right)^a+\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}l_j\right)^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.273)$$

或写为

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}l_j+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}l_j\right)^a+\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}l_j+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}l_j\right)^b=0$$

$$(S_{ab}) \quad (5.274)$$

在离散分析过程中，采用分片构造待解函数的基础上，解决塑性形变理论问题时，待解函数在满足塑性形变理论的四类基本方程的同时，还必须满足交界条件（5.271）、(5.272)式（或(5.271)、(5.273)式，或（5.271）与（5.274）式)。

5.4.1 势能型修正变分原理 I

基于古典变分原理的泛函（3.47）式，对固体系统进行几何剖分，采用分片构造待解函数，当在元素内构造的待解函数不满足位移连续性条件（5.271）式时，为了保证位移连续性条件成立，采用拉氏乘子法将变分约束条件（5.271)式导入泛函(3.47)式中，在泛函中增加了修正项，即

$$\iint_{S_{ab}}\lambda_i^s(u_i^a-u_i^b)\mathrm{d}s \qquad (5.275)$$

从而形成了势能型塑性形变理论修正变分原理 I 的泛函

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成为有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数具备下列条件：

(1) 在元素内部满足应变位移（1.32）式；

(2) 在边界S_2上满足边界条件（1.40）式；

(3) 在元素交界面S_{ab}上，位移连续性条件（5.271）式不必满足时，

则使下面泛函（5.276）式实现驻值条件的位移、应变函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$M_{da-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}[A(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_i u_i]dv-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i-u_i ds\right\}-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\iint_{S_{ab}}\lambda_i^s(u_i^a-u_i^b)ds \quad (5.276)$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(1.50)式；λ_i^s为交界面S_{ab}上的拉氏乘子。

证明：在驻值条件下，由泛函（5.276）式得

$$\begin{aligned}\delta M_{da-1}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}-\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\delta u_i dv\\&+\iint_{S_a\cap S_1}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)-\bar{P}_i\right]\delta u_i ds\Bigg\}\\&-\sum_{S_{ab}}^{S_0}\Bigg\{\iint_{S_{ab}}\left[\lambda_i^s-\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^a\right]\delta u_i^a ds\\&-\iint_{S_{ab}}\left[\lambda_i^s+\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^b\right]\delta u_i^b ds\\&+\iint_{S_{ab}}\left[(u_i^a-u_i^b)\delta\lambda_i^s\right]ds\Bigg\}=0\end{aligned} \quad (5.277)$$

根据变分法基本引理，得

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.278)$$

$$u_i^a-u_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.279)$$

$$\lambda_i^s-\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^a=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.280)$$

$$\lambda_i^s+\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.281)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (5.282)$$

由上述分析可知，泛函（5.276）式的变分条件、变分约束条件和一般约束条件正是塑性形变理论的四类基本方程及交界条件，故在变分约束条件下，泛函（5.276)式实现驻值条件的位移、应变函数为塑性形变理论问题的近似解。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理Ⅰ

（1）若在元素内部待解函数满足应变位移关系式(1.32)式，在边界S_2上满足边界条件（1.40）式；在元素交界面上引入独立参变量λ_i^e时，则使泛函（5.276）式实现驻值条件的位移、应变函数，λ_i^e为塑性形变理论问题的近似解。

（2）若在元素内部待解函数满足应变位移关系式(1.32)式；在边界S_2上满足边界条件（1.40）式，在元素的交界面上，令

$$\lambda_i^e=\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)^e \qquad (5.283)$$

即在元素交界面上独立构造应变函数时，则使泛函（5.283)式实现驻值条件的位移、应变函数为塑性形变理论问题的近似解。

5.4.2 势能型修正变分原理II

基于广义变分原理的泛函（4.273）式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；

（2）在元素边界上，位移、应力函数为独立构造的边界函数时，

则使下面泛函（5.284）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$M_{da-2}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)-\bar{F}_iu_i\right]dv$$

$$\left.-\iint_{S_a}P_i^s(u_i-u_i^s)ds-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_iu_i^sds\right\}\qquad(5.284)$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242)式。

证明：在驻值条件下，由泛函（5.284）式得

$$\delta M_{da-2}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\delta\varepsilon_{ij}\right.\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij}$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right)\delta u_i\right]dv$$

$$-\iint_{S_a}\left[(u_i-u_i^s)\delta P_i^s+\left(P_i^s-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)\delta u_i\right]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[(u_i-u_i^s)\delta P_i^s+(\bar{P}_i-P_i^s)\delta u_i^s\right.$$

$$\left.+\left(P_i^s-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)\delta u_i\right]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(P_i^s-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)\delta u_i\right.$$

$$\left.\left.+(u_i-\bar{u}\ )\delta P_i^s\right]ds\right\}=0\qquad(5.285)$$

其中在交界面S_{ab}上$P_i^a\delta u_i^a$为相消项。

根据变分法基本引理，得

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}=0 \qquad (V_a) \quad (5.286)$$

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.287)$$

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.288)$$

$$u_i-u_i^a=0 \qquad (S_1),(S_a) \quad (5.289)$$

$$P_i^a-\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j=0$$

$$(S_1),(S_2),(S_a) \quad (5.290)$$

$$\bar{P}_i-P_i^a=0 \qquad (S_1) \quad (5.291)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.292)$$

由上述分析可知，泛函（5.284）式的变分条件正是塑性形变理论的四类基本方程和交界条件，故泛函（5.284）式实现驻值问题的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。证毕。

2．势能型有限元修正变分原理Ⅰ

若在元素内部位移、应变、应力函数均为独立变量函数；在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.284)实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

3．势能型边界元变分原理Ⅰ

若在元素内部位移、应变、应力函数满足应力应变（5.286）式、应变位移（5.287）式及平衡方程（5.288）式；在元素边界上，位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.293）式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}\left[(u_i-u_i^a)\delta P_i^a+\left(P_i^a-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)\delta u_i\right]ds\right.$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\left[(u_i-u_i^a)\delta P_i^a+(\bar{P}_i-P_i^a)\delta u_i^a\right.$$

$$\left.+\left(P_i^a-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)\delta u_i\right]ds$$

$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}\left[(u_i-\bar{u}_i)\delta P_i^a+\left(P_i^a-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)\delta u_i\right]ds\right\}=0$$

(5.293)

4. 势能型加权余数（广义伽略金）方程 I

(1) 若在元素内部位移、应变、应力函数均为独立变量函数；在元素边界上，独立构造位移与应力函数为边界函数时，则满足变分方程 (5.285) 式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

(2) 若待解函数在元素边界上满足交界条件 (5.289)、(5.290) 式，在边界S_1与S_2上满足边界条件 (5.291)、(5.292) 式时，则满足变分方程 (5.294) 式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\delta\varepsilon_{ij}\right.\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij}$$

$$\left.\left.-\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right)\delta u_i\right]dv\right\}=0$$

(5.294)

5.4.3 势能型修正变分原理III

基于广义变分原理的泛函（4.273）式，但采用不同于上节的分片构造待解函数类，从而形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

（1）若在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；

（2）在元素边界上，位移函数为独立构造的边界函数时，则使下面泛函（5.295）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\begin{aligned}M_{da-3}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{&\iiint_{V_a}\Big[\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\Big(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)\\&-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)-\bar{F}_iu_i\Big]\mathrm{d}v\\&+\iint_{S_a}\sigma_{ij}l_j(u_i-u_i^s)\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_iu_i^s\mathrm{d}s\Big\}\end{aligned}\tag{5.295}$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242)式。

证明：在驻值条件下，由泛函（5.295）式得

$$\begin{aligned}\delta M_{da-3}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{&\iiint_{V_a}\Big[-\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)\delta\varepsilon_{ij}\\&-\frac{1}{2}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\delta\sigma_{ij}\\&-\Big(\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)_{,j}+\bar{F}_i\Big)\delta u_i\Big]\mathrm{d}v\\&-\iint_{S_a\cap S_1}[(u_i-u_i^s)\delta\sigma_{ij}l_j+(\bar{P}_i-\sigma_{ij}l_j)\delta u_i^s]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}[(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j]ds\Bigg\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Bigg\{\iint_{S_{ab}}[(u_i^a-u_i^s)\delta(\sigma_{ij}l_j)^a]ds$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(u_i^b-u_i^s)\delta(\sigma_{ij}l_j)^b]ds$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b]\delta u_i^s ds\Bigg\}=0$$

(5.296)

根据变分法基本引理，得

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}=0 \qquad (V_a) \quad (5.297)$$

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.298)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.299)$$

$$u_i^a-u_i^s=0 \qquad (S_1),(S_{ab}) \quad (5.300)$$

$$u_i^b-u_i^s=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.301)$$

$$(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.302)$$

$$\bar{P}_i-\sigma_{ij}l_j=0 \qquad (S_1) \quad (5.303)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.304)$$

由上述分析可知，泛函（5.295）式的变分条件正是塑性形变理论的四类基本方程及其交界条件，故泛函（5.295)式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。证毕。

2．势能型有限元修正变分原理Ⅱ

若在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.295)

式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

3. **势能型边界元变分原理Ⅲ**

若在元素内部待解函数满足应力应变关系式（5.297)式、应变位移关系式（5.298）式及平衡方程（5.299）式；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.305)式的位移、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint\limits_{S_a\cap S_1}[(u_i-u_i^a)\delta\sigma_{ij}l_j+(\bar{P}_i-\sigma_{ij}l_j)\delta u_i^a]ds\right.$$

$$\left.+\iint\limits_{S_a\cap S_2}[(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j]ds\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_n}\left\{\iint\limits_{S_{ab}}[(u_i^a-u_i^a)\delta(\sigma_{ij}l_j)^a\right.$$

$$+(u_i^b-u_i^a)\delta(\sigma_{ij}l_j)^b+((\sigma_{ij}l_j)^a$$

$$\left.+(\sigma_{ij}l_j)^b)\delta u_i^a]ds\right\}=0 \qquad (5.305)$$

4. **势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅱ**

若在元素内部位移、应变、应力函数为独立的变量函数；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.296）式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

5.4.4 势能型修正变分原理IV

基于广义变分原理的泛函（4.280）式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. **变分问题**

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数满足下列条件：

(1) 在元素内部应变、位移函数为独立变量函数；

(2) 在元素边界上，位移函数为独立构造的边界函数时，则使下面泛函（5.306）式实现驻值条件的应变、位移函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$M_{da-4}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(A(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_i u_i\right)\right.\right.$$
$$\left.-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right]\mathrm{d}v$$
$$\left.-\iint_{S_a}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j(u_i-u_i^s)\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i u_i^s\mathrm{d}s\right\} \tag{5.306}$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242)式。

证明：在驻值条件下，由泛函（5.306）式得

$$\delta M_{da-4}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\right.\right.$$
$$\left.-\left(\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right)\delta u_i\right]\mathrm{d}v$$
$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[(u_i-u_i^s)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\right.$$
$$\left.+\left(\bar{P}_i-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\delta u_i^s\right]\mathrm{d}s$$
$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(u_i-\bar{u}_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\right]\mathrm{d}s\right\}$$
$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[(u_i^a-u_i^s)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^a\right.\right.$$

$$+(u_i^b-u_i^a)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^b-\left(\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^a+\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^b\right)\delta u_i^a\ \Big]\mathrm{d}s\Big\}=0 \tag{5.307}$$

根据变分法基本引理，得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \tag{5.308}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \tag{5.309}$$

$$u_i^a-u_i^a=0 \qquad (S_1),(S_{ab}) \tag{5.310}$$

$$u_i^b-u_i^a=0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.311}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^a+\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^b=0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.312}$$

$$\bar{P}_i-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j=0 \qquad (S_1) \tag{5.313}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \tag{5.314}$$

由上述分析可知，泛函（5.306）式的变分条件和一般约束条件（应力应变关系式）正是塑性形变理论的四类基本方程及交界条件，故泛函（5.306）式实现驻值条件的应变、位移函数为塑性形变理论问题的近似解。证毕。

2．势能型有限元修正变分原理Ⅳ

若在元素内部位移、应变函数为独立变量函数；在元素的边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.306）式实现驻值条件的位移、应变函数为塑性形变理论问题的近似解。

3．势能型边界元变分原理Ⅳ

若在元素内部待解函数满足应变位移方程（5.308)式、平衡方程（5.309)式；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.315)式的位移、应变函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint\limits_{S_a\cap S_1}\left[(u_i-u_i^a)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)+\left(\overline{P}_i-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\delta u_i^a\right]ds\right.$$

$$\left.+\iint\limits_{S_a\cap S_2}\left[(u_i-\overline{u}_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\right]ds\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint\limits_{S_{ab}}\left[(u_i^a-u_i^s)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^a\right.\right.$$

$$\left.\left.+(u_i^b-u_i^s)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^b+((\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b)\delta u_i^s\right]ds\right\}$$

$$=0 \qquad (5.315)$$

4. 势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅳ

(1) 若在元素内部位移、应变函数为独立变量函数；在元素边界上，位移函数为独立构造的边界函数，则满足变分方程(5.307)式的位移、应变函数为塑性形变理论问题的近似解。

(2) 若待解函数在元素交界面上满足交界条件（5.310～5.312）式，在边界S_1上满足（5.310）、(5.313）式，在边界S_2上满足（5.314）式，则满足变分方程（5.316）式的位移、应变函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{V_a}\left[-\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+F_i\right)\delta u_i\right]dv\right\}=0 \qquad (5.316)$$

5.4.5 势能型修正变分原理Ⅴ

基于广义变分原理的泛函（4.287）式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数具备下列条件：

(1) 在元素内部应变、位移函数满足应变位移 (5.308)式；

(2) 在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，

则使下面泛函 (5.317) 式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$M_{da-5}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}[A(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_i u_i]dv\right.$$

$$-\iint_{S_a}\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j(u_i-u_i^s)\right]ds$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i u_i^s ds\right\} \qquad (5.317)$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242)式。

证明：在驻值条件下，由泛函 (5.317) 式得

$$\delta M_{da-5}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\delta\varepsilon_{ij}\right.\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\right)_{,j}+\bar{F}_i\right)\delta u_i\Bigg]dv$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[(u_i-u_i^s)\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right.$$

$$\left.+\left(\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)\delta u_i^s\right]ds$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(u_i-\bar{u}_i)\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right]ds\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[(u_i^a-u_i^*)\delta\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)^a\right]ds\right.\\
&+\iint_{S_{ab}}\left[(u_i^b-u_i^*)\delta\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)^b\right]ds\\
&\left.-\iint_{S_{ab}}\left[\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)^a+\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)^b\right]\delta u_i^*\,ds\right\}\\
&=0 \qquad (5.318)
\end{aligned}
$$

其中考虑到变分约束条件（5.308）式。

根据变分法基本引理，得

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}=0 \qquad (V_a) \quad (5.319)$$

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.320)$$

$$\left.\begin{aligned}&u_i^a-u_i^*=0 &&(S_1),(S_{ab})\\ &u_i^b-u_i^*=0 &&(S_{ab})\end{aligned}\right\} \quad (5.321)$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)^a+\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.322)$$

$$\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j=0 \qquad (S_1) \quad (5.323)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.324)$$

由上述可知，泛函（5.317）式的变分条件和变分约束条件正是塑性形变理论问题的四类基本方程及交界条件，故在变分约束条件下，使泛函（5.317）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

2. 势能型有限元修正变分原理V

若位移、应变函数在元素内部满足应变位移（5.308)式；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数，则使泛函（5.317）

式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

3．势能型边界元变分原理V

若在元素内部待解函数满足应变位移关系式（5.308)式、应力应变（5.319)式、平衡方程（5.320）式；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.326)式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}\left[(u_i-u_i^s)\delta\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)\right.\right.$$

$$\left.+\left(\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)\delta u_i^s\right]ds$$

$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}\left[(u_i-\bar{u}_i)\delta\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)\right]ds\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[(u_i^a-u_i^s)\delta\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)^a\right]ds\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}\left[(u_i^b-u_i^s)\delta\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)^b\right]ds$$

$$\left.-\iint_{S_{ab}}\left[\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)^a+\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)^b\right]\delta u_i^s ds\right\}$$

$$=0 \tag{5.325}$$

4．势能型加权余数（广义伽略金）方程V

(1) 若在元素内部位移、应变函数满足应变位移（5.308）式；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.318）式的应变、应力、位移函数为塑性形变理论问题的近似解。

(2) 若待解函数在元素边界上满足交界条件（5.321～

5.322）式，在边界S_1与S_2上满足边界条件（5.321）、（5.323）、（5.324）式，则满足下面变分方程（5.326）式的应变、位移、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\delta\varepsilon_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right)\delta u_i\right]dv\right\}=0 \quad (5.326)$$

5.4.6 势能型修正变分原理VI

基于广义变分原理的泛函（4.288）式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数具备下列条件：

（1）在元素内部待解函数满足平衡方程

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+F_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.327)$$

（2）在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则使下面泛函（5.328）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$M_{da-6}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv\right]\right.$$

$$-\iint_{S_a}\left[P_i^s-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right]u_i ds$$

$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}P_i^s\bar{u}_i ds\right\} \qquad (5.328)$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242) 式。

证明：在驻值条件下，利用变分约束条件 (5.327)，由泛函 (5.328) 式得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{da-6} = \sum_{a=1}^{N} \Bigg\{ & \iiint_{V_a} \Bigg[-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij} \\
& - \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\delta\varepsilon_{ij} \Bigg] \mathrm{d}v \\
& - \iint_{S_a \cap S_1} \left[\bar{P}_i - \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) l_j\right] \delta u_i \mathrm{d}s \\
& - \iint_{S_a \cap S_2} \Bigg[\left(P_i^a - \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) l_j\right)\delta u_i \\
& + (u_i - \bar{u}_i)\delta P_i^a \Bigg] \mathrm{d}s \Bigg\} \\
& - \sum_{S_{ab}=1}^{S_0} \Bigg\{ \iint_{S_{ab}} \left[P_i^a - \left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) l_j\right)^a\right] \delta u_i^a \mathrm{d}s \\
& + \iint_{S_{ab}} \left[P_i^b - \left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) l_j\right)^b\right] \delta u_i^b \mathrm{d}s \\
& + \iint_{S_{ab}} \left[(u_i^a - u_i^b)\delta P_i^a \mathrm{d}s\right] \Bigg\} = 0
\end{aligned}
\qquad (5.329)
$$

根据变分法基本引理，得

$$\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i} = 0 \qquad (V_a) \quad (5.330)$$

$$\sigma_{ij} - \frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0 \qquad (V_a) \quad (5.331)$$

$$u_i^a - u_i^b = 0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.332)$$

$$P_i^s-\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)^a=0 \quad (S_b),(S_2) \quad (5.333)$$

$$P_i^s-\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)^b=0 \quad (S_{ab}) \quad (5.334)$$

$$\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j=0 \quad (S_1) \quad (5.335)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \quad (S_2) \quad (5.336)$$

由上述分析可知，泛函（5.328)式的变分条件和变分约束条件正是塑性形变理论的四类基本方程及交界条件，故在变分约束条件下，使泛函(5.328)实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。证毕。

2．势能型有限元修正变分原理Ⅵ

若在元素内部应力函数满足平衡方程（5.327）式；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.328)式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

3．势能型边界元变分原理Ⅵ

若在元素内部待解函数满足平衡方程（5.327)式、应变位移（5.330）式、应力位移（5.331）式，在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.337）式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}\left[\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right]\delta u_i ds\right.$$
$$+\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(P_i^s-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)\delta u_i\right.$$
$$\left.\left.+(u_i-\bar{u}_i)\delta P_i^s\right]ds\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[P_i^a-\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}l_j+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^a\right]\delta u_i^a ds\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}\left[P_i^b-\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}l_j+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^b\right]\delta u_i^b ds$$

$$\left.+\iint_{S_{ab}}[(u_i^a-u_i^b)\delta P_i^a ds\right\}=0 \qquad (5.337)$$

4．势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅵ

（1）若在元素内部应力函数满足平衡方程（5.327）式，在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.329）式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

（2）若待解函数在元素交界面上满足交界条件（5.332～5.334）式，在边界S_1和S_2上满足边界条件（5.335）、（5.336）式时，则满足变分方程（5.338）式的应变、应力、位移函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\delta\varepsilon_{ij}\right]dv\right\}=0 \qquad (5.338)$$

5.4.7 余能型修正变分原理Ⅰ

基于古典变分原理的泛函（3.48）式，对固体系统进行几何剖分，采用分片构造待解函数，当在元素内构造的待解函数不满足交界条件（5.272）式(或(5.273)、(5.274）式）时，为了保证合力的连续性条件成立，采用拉氏乘子法将变分约束条件(5.272)式导入泛函（3.48）式中，在泛函中增加了修正项，即

$$\iint_{S_{ab}} \lambda_i^s((\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b)\mathrm{d}s \tag{5.339}$$

从而形成了余能型修正变分原理Ⅰ的泛函。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数时，当构造的待解函数具备下列条件：

(1) 在元素内部满足平衡方程 (1.31) 式；

(2) 在边界S_1上满足边界条件 (1.39) 式；

(3) 在元素交界面S_{ab}上合力连续性条件 (5.272) 式不必满足时，

则使下面泛函 (5.340) 式实现驻值条件的位移、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$M_{ab-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}[B(\sigma_{ij})]\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\iint_{S_{ab}}\lambda_i^s[(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b]\mathrm{d}s \tag{5.340}$$

其中$B(\sigma_{ij})$为(1.51)式；λ_i^s为交界面S_{ab}上的拉氏乘子。

证明：在驻值条件下，考虑到变分约束条件 (1.31) 式，由泛函 (5.340) 式得

$$\delta M_{ab-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}(\bar{u}_i-u_i)\delta\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}[((\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b)\delta\lambda_i^s\right.$$

$$+(\lambda_i^s-u_i^a)\delta(\sigma_{ij}l_j)^a+(\lambda_i^s-u_i^b)\delta(\sigma_{ij}l_j)^b]\mathrm{d}s\Big\}=0$$

(5.341)

根据变分法基本引理，得

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)=0 \qquad (V_a) \quad (5.342)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.343)$$

$$\lambda_i^s-u_i^a=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.344)$$

$$\lambda_i^s-u_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.345)$$

$$(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.346)$$

由上述分析可知，泛函（5.340）式的变分条件、变分约束条件和一般约束条件（应力应变关系式）正是塑性形变理论的四类基本方程及交界条件，故在变分约束条件下，使泛函（5.340)式实现驻值条件的应力、位移函数为塑性形变理论问题的近似解。证毕。

2．余能型有限元修正变分原理Ⅰ

（1）若应力函数在元素内部满足平衡方程（1.31）式，边界上满足力的边界条件(1.39)式，在元素边界上引入独立参变量λ_i^s，则使泛函（5.340）式实现驻值条件的应力、位移、λ_i^s为塑性形变理论问题的近似解。

（2）若应力函数在元素内部满足平衡方程（1.31）式，在边界上满足力的边界条件（1.39）式，在元素交界面上，令

$$\lambda_i^s=u_i^s$$

即在元素交界面上独立构造应力函数为边界函数时，则使泛函（5.340）式实现驻值条件的应力、位移函数为塑性形变理论问题的近似解。

5.4.8 余能型修正变分原理II

基于广义变分原理的泛函（4.317）式，采用分片构造待解函

数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；

（2）在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，

则使下面泛函（5.347）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{db-2}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Big[-B(\sigma_{ij})+\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\\
&+u_i\Big(\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)_{,j}+\bar{F}_i\Big)\Big]dv\\
&-\iint_{S_a}u_i^s\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-P_i^s\Big)ds-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_iP_i^s ds\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{5.347}
$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242)式；$B(\sigma_{ij})$为(4.243)式。

证明：在驻值条件下，由泛函（5.347）式得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{db-2}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Big[\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\Big)\delta\sigma_{ij}\\
&+\Big(\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)_{,j}+\bar{F}_i\Big)\delta u_i+\Big(\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\\
&\cdot\Big(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\Big)\delta\varepsilon_{ij}\Big]dv\\
&-\iint_{S_a}\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-P_i^s\Big)\delta u_i^s+(u_i^s-u_i)\delta\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\Big)\Big]ds
\end{aligned}
$$

$$
-\iint_{S_a \cap S_1}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j-\bar{P}_i\right)\delta u_i^s+(u_i^s-u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j\right)\right]ds
$$

$$
-\iint_{S_a \cap S_2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j-P_i^s\right)\delta u_i^s+(u_i^s-u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j\right)\right.
$$

$$
\left.\left.+(\bar{u}_i-u_i^s)\delta P_i^s\right]ds\right\}=0 \tag{5.348}
$$

其中在元素交界面S_{ab}上$u_i^s\delta P_i^s$为相消项。

根据变分法基本引理，得

$$
\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=0 \qquad (V_a) \tag{5.349}
$$

$$
\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \tag{5.350}
$$

$$
\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}\right)=0 \qquad (V_a)
$$

利用(5.349)式，上式可变为

$$
\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \tag{5.351}
$$

$$
u_i^s-u_i=0 \qquad (S_1),(S_2),(S_a) \tag{5.352}
$$

$$
\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j-P_i^s=0 \qquad (S_2),(S_a) \tag{5.353}
$$

$$
\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{5.354}
$$

$$
\bar{u}_i-u_i^s=0 \qquad (S_2) \tag{5.355}
$$

由上述分析可知，泛函（5.347）式的变分条件正是塑性形变理论的四类基本方程和交界条件，故泛函（5.347）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论的近似解。证毕。

2. 余能型有限元修正变分原理Ⅱ

若在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元

素的边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数，则使泛函(5.347)式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

3. 余能型边界元变分原理 I

若在元素内部待解函数满足应力应变(5.349)式、平衡方程(5.350)式、应变位移(5.351)式；在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.356)式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right)\delta u_i^s+(u_i^s-u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\right]ds\right.$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-P_i^s\right)\delta u_i^s+(u_i^s-u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\right.$$

$$\left.+(\bar{u}_i-u_i^s)\delta P_i^s\right]ds$$

$$\left.+\iint_{S_a}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-P_i^s\right)\delta u_i^s+(u_i^s-u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\right]ds\right\}=0$$

(5.356)

4. 余能型加权余数（广义伽略金）方程 I

(1) 若在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.348)式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

(2) 若待解函数在元素交界面上满足交界条件(5.352)、(5.353)式，在边界S_1与S_2上满足条件(5.352~5.355)式时，则满足下面变分方程(5.357)式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\right)\delta\sigma_{ij}+\left(\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right)\delta u_i\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right)\delta\varepsilon_{ij}\right]dv\right\}=0$$

(5.357)

5.4.9 余能型修正变分原理III

基于广义变分原理的泛函（4.317）式，采用不同于上节的分片构造的待解函数类，从而形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；

（2）在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，

则使下面泛函（5.358）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$M_{db-3}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-B(\sigma_{ij})+\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\right.\right.$$

$$\left.+u_i\left(\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right)\right]dv$$

$$\left.-\iint_{S_a}u_i\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-P_i^s\right)ds-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_iP_i^s ds\right\}$$

(5.358)

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242)式；$B(\sigma_{ij})$为(4.243)式。

证明：在驻值条件下，由泛函(5.358)式得

$$\delta M_{ab-3}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Big[\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\Big)\delta\sigma_{ij}$$

$$+\Big(\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)_{,j}+\bar{F}_i\Big)\delta u_i+\Big(\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\Big(\frac{1}{2}u_{i,j}$$

$$+\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\Big)\delta\varepsilon_{ij}\Big]dv$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i\Big)\delta u_i ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-P_i^s\Big)\delta u_i+(\bar{u}_i-u_i)\delta P_i^s\Big]ds\Bigg\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Bigg\{\iint_{S_{ab}}\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\Big)^a-P_i^s\Big]\delta u_i^a ds$$

$$+\iint_{S_{ab}}\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\Big)^b-P_i^s\Big]\delta u_i^b ds$$

$$-\iint_{S_{ab}}[(u_i^a-u_i^b)\delta P_i^s]ds\Bigg\}=0 \tag{5.359}$$

根据变分法基本引理，得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=0 \qquad (V_a) \tag{5.360}$$

$$\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \tag{5.361}$$

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\Big(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)=0 \qquad (V_a)$$

利用 (5.360) 式，上式可变为

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \tag{5.362}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j\right)^a - P_i^s = 0 \qquad (S_2),(S_{ab}) \quad (5.363)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j\right)^b - P_i^s = 0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.364)$$

$$u_i^a - u_i^b = 0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.365)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j - \bar{P}_i = 0 \qquad (S_1) \quad (5.366)$$

$$\bar{u}_i - u_i = 0 \qquad (S_2) \quad (5.367)$$

由上述分析可知，泛函（5.358）式的变分条件正是塑性形变理论的四类基本方程及交界条件，故使泛函（5.358)式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。证毕。

2. 余能型有限元修正变分原理Ⅱ

若在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.358)式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

3. 余能型边界元变分原理Ⅱ

若在元素内部待解函数满足应力应变关系式（5.360）式、平衡方程（5.361）式、应变位移（5.362）式；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.367)式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a \cap S_1}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j\right) - P_i\right]\delta u_i \mathrm{d}s\right.$$

$$\left. + \iint_{S_a \cap S_2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j - P_i^s\right)\delta u_i + (\bar{u}_i - u_i)\delta P_i^s\right]\mathrm{d}s\right\}$$

$$+ \sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[\left(\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j\right)^a - P_i^s\right)\delta u_i^a\right.\right.$$

$$+\left(\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j\right)^b - P_i^s\right)\delta u_i^b - (u_i^a - u_i^b)\delta P_i^s\Big]\mathrm{d}s\Big\} = 0$$

(5.367)

4. 余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅱ

若在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.359)式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

5.4.10 余能型修正变分原理Ⅳ

基于广义变分原理的泛函（4.328）式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

(1) 在元素内部位移、应力函数为独立的变量函数；

(2) 在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，

则使下面泛函（5.369）式实现驻值条件的位移、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$M_{db-4} = \sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}[B(\sigma_{ij}) + u_i(\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i)]\mathrm{d}v - \iint_{S_a} u_i(\sigma_{ij}l_j - P_i^s)\mathrm{d}s - \iint_{S_a \cap S} \bar{u}_i P_i^s \mathrm{d}s\Big\}$$

(5.369)

其中$B(\sigma_{ij})$为(4.243)式。

证明： 在驻值条件下，由泛函（5.369）式得

$$\delta M_{db-4}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$\left.+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta u_i\right]dv$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i ds$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}[(\sigma_{ij}l_j-P_i^s)\delta u_i+(\bar{u}_i-u_i)\delta P_i^s]ds\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^a-P_i^s]\delta u_i^a ds\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^b-P_i^s]\delta u_i^b ds$$

$$\left.-\iint_{S_{ab}}(u_i^a-u_i^b)\delta P_i^s ds\right\}=0 \tag{5.370}$$

根据变分法基本引理，得

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \tag{5.371}$$

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \tag{5.372}$$

$$(\sigma_{ij}l_j)^a-P_i^s=0 \qquad (S_2),(S_{ab}) \tag{5.373}$$

$$(\sigma_{ij}l_j)^b-P_i^s=0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.374}$$

$$u_i^a-u_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.375}$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{5.376}$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \tag{5.377}$$

由上述分析可知，泛函（5.369）式的变分条件和一般约束条件（应力应变关系）正是塑性形变理论的四类基本方程及交界条件，故泛函（5.369）式实现驻值条件的位移、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。证毕。

2．余能型有限元修正变分原理Ⅳ

若在元素内部位移、应力函数为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则使泛函（5.369)式实现驻值条件的位移、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

3．余能型边界元变分原理Ⅳ

若在元素内部位移、应力函数满足应力位移（5.371）式、平衡方程（5.372）式；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程（5.378）式的位移、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iint_{S_a\cap S_1}[\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i]\delta u_i \mathrm{d}s\\&+\iint_{S_a\cap S_2}[(\sigma_{ij}l_j-P_i^a)\delta u_i+(\bar{u}_i-u_i)\delta P_i^a]\mathrm{d}s\Bigg\}\\&+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Bigg\{\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^a-P_i^a]\delta u_i^a \mathrm{d}s\\&+\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^b-P_i^a]\delta u_i^b \mathrm{d}s\\&-\iint_{S_{ab}}(u_i^a-u_i^b)\delta P_i^a \mathrm{d}s\Bigg\}=0\end{aligned}\tag{5.378}$$

4．余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅳ

（1）若在元素内部位移、应力函数为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程（5.370）式的位移、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

（2）若待解函数在元素交界面上满足交界条件（5.373～5.375）式，在边界S_1与S_2上满足边界条件（5.376)、(5.377)式时，则满足变分方程（5.379）式的位移、应力函数为塑性形变

理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta u_i\right]dv\right\}=0 \qquad (5.379)$$

5.4.11 余能型修正变分原理V

基于广义变分原理的泛函（4.335）式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部位移、应力函数为独立变量函数；应变位移关系式为一般约束条件；

（2）在元素边界上用独立构造的位移边界函数表示应变函数时，

则使下面泛函实现驻值条件的位移、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$M_{db-5}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-B(\sigma_{ij})+u_i\left(\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(\dot{u}_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right)\right.\right.$$

$$\left.+\sigma_{ij}u_{ij}\right]dv-\iint_{S_a}u_i\left[\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(\dot{u}_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(\dot{u}_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^s\right]ds$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(\dot{u}_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^s ds\right\} \qquad (5.380)$$

其中$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242) 式；$B(\sigma_{ij})$为(4.243) 式。

证明： 在驻值条件下，由泛函（5.380）式可得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{db-5}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Bigg[\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\right)\delta\sigma_{ij}\\
&+\left(\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right)\delta u_i\Bigg]dv\\
&-\iint_{S_a\cap S_1}\left[\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)-\bar{P}_i\right]\delta u_i ds\\
&-\iint_{S_a\cap S_2}\Bigg[\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\\
&-\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^{s}\Bigg]\delta u_i ds\\
&-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(\bar{u}_i-u_i)\delta\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^{s}\right]ds\Bigg\}\\
&-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Bigg\{\iint_{S_{ab}}\Bigg[\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^{a}\\
&-\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^{s}\Bigg]\delta u_i^a ds\\
&+\iint_{S_{ab}}\Bigg[\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^{b}\\
&-\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^{s}\Bigg]\delta u_i^b ds
\end{aligned}
$$

$$-\iint_{S_{ab}}\left[(u_i^a-u_i^b)\delta\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(\dot{u}_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^s\right]ds\Big\}=0$$

(5.381)

根据变分法基本引理，得

$$\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=0 \qquad (V_a) \quad (5.382)$$

$$\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(\dot{u}_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.383)$$

$$\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(\dot{u}_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^a-\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(\dot{u}_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^s=0$$

(S_2),(S_{ab})(5.384)

$$\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(\dot{u}_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^b-\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(\dot{u}_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^s=0$$

(S_{ab}) (5.385)

$$u_i^a-u_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.386)$$

$$\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(\dot{u}_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (5.387)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.388)$$

由上述分析可知，泛函（5.380）式的变分条件和一般约束条件（应变位移关系）正是塑性形变理论问题的四类方程。证毕。

2．余能型有限元修正变分原理V

若在元素内部位移、应力函数为独立变量函数，在元素边界上独立构造的位移函数为边界函数，并用其表示应变函数时，则

使泛函（5.380）式实现驻值条件的位移，应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

3. 余能型边界元变分原理V

若在元素内部位移、应力函数满足应力位移（5.382)式、平衡方程（5.383）式；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数，在用其表示应变函数时，则满足边界变分方程（5.389)式的位移、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iint_{S_a\cap S_1}\Big[\Big(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\Big)-\overline{P}_i\Big]\delta u_i\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_a\cap S_2}\Big[\Big(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\Big)-\Big(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\Big)^s\Big]\delta u_i\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_a\cap S_2}\Big[(\overline{u}_i-u_i)\delta\Big(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\Big)^s\mathrm{d}s\Big]\\
&+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}\Big[\Big(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\Big)^a\\
&-\Big(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\Big)^s\Big]\delta u_i^a\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_{ab}}\Big[\Big(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\Big)^b-\Big(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\Big)^s\Big]\delta u_i^b\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_{ab}}\Big[(u_i^a-u_i^b)\delta\Big(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\Big)^s\Big]\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (5.389)
\end{aligned}
$$

4. 余能型加权余数（广义伽略金）方程V

(1) 若在元素内部位移、应力函数为独立变量函数；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数，在用其表示应变函数时，则满足变分方程（5.381）式的位移、应力函数为塑性形变理

论问题的近似解。

(2) 若待解函数在元素交界面上满足交界条件 (5.384～5.386) 式，在边界上满足边界条件 (5.387)、(5.388) 式时，则满足变分方程 (5.390) 式的位移、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}\right)\delta\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right)\delta u_i\right]dv\right\}=0 \qquad (5.390)$$

5.4.12 余能型修正变分原理VI

基于广义变分原理的泛函 (4.341) 式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数具备下列条件：

(1) 在元素内部满足平衡方程

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (5.391)$$

(2) 在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数用其表示应力函数时，

则使下面泛函实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$M_{ab-6}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}[-B(\sigma_{ij})+\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}]dv\right.$$

$$-\iint_{S_a}u_i\left[\sigma_{ij}l_j-\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)^s\right]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)^s \mathrm{d}s\Big\}\tag{5.392}$$

其中$B(\sigma_{ij})$为(4.243)式；$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242) 式。

证明： 在驻值条件下，考虑到变分约束条件 (5.391) 式，由泛函 (5.392) 式得

$$\begin{aligned}\delta M_{ab-6}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{&\iiint_{V_a}\Big[\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}\Big)\delta\sigma_{ij}\\&+\Big(\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\Big(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\Big)\delta\varepsilon_{ij}\Big]\mathrm{d}v\\&-\iint_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}l_j)-\bar{P}_k]\delta u_i\mathrm{d}s\\&-\iint_{S_a\cap S_2}\Big[(\sigma_{ij}l_j)-\Big(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\Big)^s\Big]\delta u_i\mathrm{d}s\\&-\iint_{S_a\cap S_2}\Big[(\bar{u}_i-u_i)\delta\Big(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\Big)^s\Big]\mathrm{d}s\Big\}\\&-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}\Big[\Big((\sigma_{ij}l_j)^a-\Big(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\Big)^s\Big)\delta u_i^a\\&+\Big((\sigma_{ij}l_j)^b-\Big(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\Big)^s\Big)\delta u_i^b\\&-(u_i^a-u_i^b)\delta\Big(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\Big)^s\Big]\mathrm{d}s\Big\}=0\end{aligned}\tag{5.393}$$

根据变分法基本引理，得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=0 \qquad (V_a)\tag{5.394}$$

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}\right)=0$$

利用（5.394）式，上式可变为

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.395)$$

$$u_i^a-u_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.396)$$

$$(\sigma_{ij}l_j)^a-\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^c=0 \qquad (S_2),(S_{ab}) \quad (5.397)$$

$$(\sigma_{ij}l_j)^b-\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^e=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.398)$$

$$\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (5.399)$$

$$\overline{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.400)$$

由上述分析可知，泛函（5.392）式的变分条件和变分约束条件（平衡方程）正是塑性形变理论的四类基本方程及交界条件，故在变分约束条件下，使泛函（5.392）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。证毕。

2．余能型有限元修正变分原理Ⅵ

若在元素内部应力函数满足平衡方程（5.391）式；在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数，并用其表示应力函数时，则使泛函（5.392）式实现驻值条件的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

3．余能型边界元变分原理Ⅵ

若在元素内部待解函数满足平衡方程（5.391）式、应变位移方程（5.395）式、应力应变（5.394）式；在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数，并用其表示应力函数时，则满足边界变分方程（5.401）式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题

的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}[\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i]\delta u_i ds-\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left((\sigma_{ij}l_j)-\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^s\right)\delta u_i+(\bar{u}_i-u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^s\right]ds\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[\left((\sigma_{ij}l_j)^a-\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^s\right)\delta u_i^a+\left((\sigma_{ij}l_j)^b-\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^s\right)\delta u_i^b-(u_i^a-u_i^b)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)^s\right]ds\right\}=0 \quad (5.401)$$

4. 余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅵ

(1) 若在元素内部应力函数满足平衡方程（5.391）式；在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数，并用应变函数表示应力函数时，则满足变分方程（5.393）式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

(2) 若待解函数在元素交界面上满足交界条件（5.396～5.398）式，在边界上满足边界条件（5.399）、(5.400）式，则满足变分方程（5.402）式的位移、应变、应力函数塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\right)\delta\sigma_{ij}+\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right)\delta\varepsilon_{ij}\right]dv\right\}=0 \quad (5.402)$$

§5.5 塑性流动理论的修正变分原理

基于古典与广义变分原理的泛函，采用分片构造待解函数，在元素交界面S_{ab}上，要求待解函数满足交界条件（或称为连续性条件）。对塑性流动理论问题而言，待解函数应满足的交界条件为

（1）位移连续性条件

$$du_i^a - du_i^b = 0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.403)$$

（2）合力连续性条件

$$(d\sigma_{ij}l_j)^a + (d\sigma_{ij}l_j)^b = 0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.404)$$

在满足应力应变关系时，上式亦可写为

$$\left(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a + \left(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^b = 0 \quad (S_{ab}) \quad (5.405)$$

或写为

$$\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}l_j + \frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a + \frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}l_j + \frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^b = 0$$

$$(S_{ab}) \quad (5.406)$$

在离散分析过程中，采用分片构造待解函数的基础上，解决塑性流动理论问题时，待解函数在满足塑性流动理论的四类基本方程的同时，还必须满足交界条件(5.403)、(5.404)式(或(5.403)与(5.405)式，或(5.403)与(5.406)式)。

5.5.1 势能型修正变分原理Ⅰ

基于古典变分原理的泛函(3.51)式，对固体系统进行几何剖分，采用分片构造待解函数，当在元素内部构造的待解函数不满足位移连续条件(5.403)式时，为了保证位移连续性条件成立，采用拉氏乘子法将变分约束条件(5.403)式导入泛函(3.51)式中，在

泛函中增加了修正项，即

$$\iint_{S_{ab}} \lambda_i^s (du_i^a - du_i^b) ds \tag{5.407}$$

于是形成了势能型塑性流动理论的修正变分原理 I 的泛函。

1．变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数具备下列条件：

（1）在元素内部满足应变与位移(1.64)式；

（2）在边界S_2上，满足边界条件(1.70)式；

（3）在元素交界面S_{ab}上，位移连续性条件(5.403)式不必满足时，

则使下面泛函(5.408)式实现驻值条件的位移增量、应变增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$M_{pa-1} = \sum_{a=1}^{M} \left\{ \iiint_{V_a} [A(\varepsilon_{ij})] dv - \iint_{S_a \cap S_1} d\bar{P}_i du_i ds \right\} - \sum_{S_{ab}=1}^{S_0} \iint_{S_{ab}} \lambda_i^s (du_i^a - du_i^b) ds \tag{5.408}$$

其中$A(d\varepsilon_{ij})$为(1.75)式；λ_i^s为交界面S_{ab}上的拉氏乘子。

证明： 在驻值条件下，由泛函(5.408)式可得

$$\delta M_{pa-1} = \sum_{a=1}^{M} \left\{ \iiint_{V_a} - \left[\left(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial (d\varepsilon_{ij})} \right)_{,j} \delta du_i \right] dv - \iint_{S_a \cap S_1} \left[\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial (d\varepsilon_{ij})} l_j - d\bar{P}_i \right] \delta(du_i) ds \right\}$$

$$- \sum_{S_{ab}}^{S_0} \left\{ \iint_{S_{ab}} \left[\lambda_i^s - \left(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial (d\varepsilon_{ij})} l_j \right)^a \right] \delta (du_i)^a ds \right.$$

$$-\iint_{S_{ab}}\left[\lambda_i^a+\left(\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^b\right]\delta(\mathrm{d}u_i)^b\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(\mathrm{d}u_i^a-\mathrm{d}v_i^b)\delta\lambda_i^a]\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (5.409)$$

根据变分法基本引理，得

$$\left(\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V_a) \quad (5.410)$$

$$\mathrm{d}u_i^a-\mathrm{d}u_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.411)$$

$$\lambda_i^a-\left(\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.412)$$

$$\lambda_i^a+\left(\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.413)$$

$$\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (5.414)$$

由上述分析可知，泛函(5.408)式的变分条件、变分约束条件和一般约束条件正是塑性流动理论的四类基本方程及交界条件。因此，在变分约束条件下，使泛函(5.408)式实现驻值条件的位移增量、应变增量为塑性流动理论问题的近似解。证毕。

2．势能型有限元修正变分原理I

(1) 若待解函数在元素内部满足应变位移(1.64)式，在边界上满足位移边界条件(1.70)式；在元素交界面上引入独立参变量λ_i^a时，则使泛函(5.408)式实现驻值条件的位移增量、应变增量、λ_i^a为塑性流动理论问题的近似解。

(2) 若待解函数在元素内部满足应变位移(1.64)式，在边界上满足位移边界条件(1.70)式；在元素的交界面上，令

$$\lambda_i^a=\left(\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a \qquad (5.415)$$

即在元素交界面上独立构造应变增量，并用其表示应力增量时，使

泛函(5.408)式实现驻值条件的位移增量、应变增量为塑性流动理论问题的近似解。

5.5.2 势能型修正变分原理II

基于广义变分原理的泛函(4.377)式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

(1) 位移、应变、应力增量为独立变量函数；

(2) 在元素边界上，位移、应力增量为独立构造的边界函数时，

则使下面泛函实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$M_{pa-2}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Bigg[\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\Bigg]\mathrm{d}v-\iint_{s_a}\mathrm{d}P_i^s(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}u_i^s)\mathrm{d}s-\iint_{s_a\cap s_1}\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i^s\mathrm{d}s\Bigg\} \tag{5.416}$$

其中$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$为(4.355)式。

证明：在驻值条件下，由泛函(5.416)式得

$$\delta M_{pa-2}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Bigg[-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$$

$$-\frac{1}{2}\left(d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}\right)\delta(d\sigma_{ij})$$

$$-\frac{1}{2}\left(d\delta_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\delta(du_i)\Big]dv$$

$$-\iint_{S_a}\Big[(du_i-du_i^a)\delta(dP_i^a)+\Big(dP_i^a-\frac{1}{2}\Big(d\sigma_{ij}$$

$$+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\Big)l_j\Big)\delta(du_i)\Big]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\Big[(du_i-du_i^a)\delta(dP_i^a)+(d\overline{P}_i-dP_i^a)\delta(du_i^a)$$

$$+\Big(dP_i^a-\frac{1}{2}\Big(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\Big)l_j\Big)\delta(du_i)\Big]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\Big[\Big(dP_i^a-\frac{1}{2}\Big(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\Big)l_j\Big)\delta(du_i)$$

$$+(du_i-d\overline{u}_i)\delta(dP_i^a)\Big]ds\Big\}=0 \tag{5.417}$$

其中在交界面S_{ab}上$dP_i^a\delta(du_i^a)$为相消项。

根据变分法基本引理，得

$$d\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}=0 \qquad (V_a) \tag{5.418}$$

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0 \qquad (V_a) \tag{5.419}$$

$$\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V_a) \tag{5.420}$$

$$du_i-du_i^a=0 \qquad (S_1),(S_a) \tag{5.421}$$

$$dP_i^a-\left(\frac{1}{2}d\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j=0$$

$$(S_1),(S_2),(S_a) \tag{5.422}$$

$$d\overline{P}_i-P_i^a=0 \qquad (S_1) \tag{5.423}$$

$$du_i - d\bar{u}_i = 0 \qquad (S_2) \qquad (5.424)$$

由上述可知，泛函(5.416)式的变分条件正是塑性流动理论的四类基本方程及其交界条件，故使泛函(5.416)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理 Ⅱ

若在元素内部位移、应变、应力增量为独立变量函数；在元素边界上位移、应力增量为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.416)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

3. 势能型边界元变分原理 Ⅱ

若在元素内部位移、应变、应力增量满足应力应变增量(5.418)式、应变位移增量(5.419)式及平衡方程(5.420)式；在元素边界上位移、应力增量为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.425)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iint_{S_a}\Bigg[(du_i - du_i^s)\delta(dP_i^s)\\
&+\left(dP_i^s - \frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)\delta(du_i)\Bigg]ds\\
&+\iint_{S_a\cap S_1}\Bigg[(du_i - du_i^s)\delta(dP_i^s)+(d\bar{P}_i - dP_i^s)\delta(du_i^s)\\
&+\left(dP_i^s - \frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)\delta(du_i)\Bigg]ds\\
&+\iint_{S_a\cap S_2}\Bigg[(du_i - d\bar{u}_i)\delta(dP_i^s)\\
&+\left(dP_i^s - \frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)\delta(du_i)\Bigg]ds\Bigg\}=0\end{aligned}$$

(5.425)

4. 势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅱ

（1）若位移、应变、应力增量为独立变量函数；在元素边界上独立构造位移、应力增量为边界函数时，则满足变分方程(5.417)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

（2）若位移、应变、应力增量在元素交界面上满足交界条件(5.421)、(5.422)式，在边界S_1上满足条件(5.421～5.423)式，在边界S_2上满足条件(5.422)和(5.424)式时，则满足变分方程(5.426)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)\delta(d\varepsilon_{ij})\right.\right.$$
$$-\frac{1}{2}\left(d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}\right)\delta(d\sigma_{ij})$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\delta(du_i)\right]dv\right\}=0 \tag{5.426}$$

5.5.3 势能型修正变分原理Ⅲ

基于广义变分原理的泛函(4.377)式，采用与上节不同的分片构造待解函数，可形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部位移、应变、应力增量为独立变量函数；

（2）在元素边界上位移增量为独立构造的边界函数时，

则使下面泛函实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动

理论问题的近似解。

$$M_{pa-3}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\right]\mathrm{d}v-\iint_{S_a}\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}u_i^s)\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_1}\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i^s\mathrm{d}s\right\} \quad (5.427)$$

其中$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$为(4.355)式。

证明： 在驻值条件下，由泛函(5.427)式可得

$$\delta M_{va-3}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{,ji}\right)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\delta(\mathrm{d}u_i)\right]\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_1}[(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}u_i^s)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)+(\mathrm{d}\bar{P}_i-\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)\delta(\mathrm{d}u_i^s)]\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_2}[(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i)\cdot\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)]\mathrm{d}s\right\}-\sum_{S_{ab}}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}[(\mathrm{d}u_i^a-\mathrm{d}u_i^s)\cdot\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^a]\mathrm{d}s+\iint_{S_{ab}}[(\mathrm{d}u_i^b-\mathrm{d}u_i^s)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^b]\mathrm{d}s-\iint_{S_{ab}}[(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^a+(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^b]\delta(\mathrm{d}u_i^s)]\mathrm{d}s\right\}=0 \quad (5.428)$$

根据变分法基本引理，得

$$d\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}=0 \qquad (V_a) \quad (5.429)$$

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.430)$$

$$\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V_a) \quad (5.431)$$

$$du_i^a-du_i^s=0 \quad (S_1),(S_{ab}) \quad (5.432)$$

$$du_i^b-du_i^s=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.433)$$

$$(d\sigma_{ij}l_j)^a+(d\sigma_{ij}l_j)^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.434)$$

$$d\bar{P}_i-d\sigma_{ij}l_j=0 \qquad (S_1) \quad (5.435)$$

$$du_i-d\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.436)$$

由上述分析可知，泛函(5.427)式的变分条件正是塑性流动理论的四类基本方程及交界条件，故使泛函(5.427)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。证毕。

2．势能型有限元修正变分原理Ⅱ

若在元素内部位移、应变、应力增量为独立变量函数；在元素边界上位移增量为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.427)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

3．势能型边界元变分原理Ⅱ

若在元素内部待解函数满足应力应变增量(5.429)式、应变位移增量(5.430)式、平衡方程(5.431)式；在元素的边界上位移增量为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.437)式的位移、应变、应力增量函数为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_1}\left[(du_i-du_i^s)\delta(d\sigma_{ij}l_j)\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+(\mathrm{d}\bar{P}_i-\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)\delta(\mathrm{d}u_i^s)]\mathrm{d}s \\
&+\iint_{S_a\cap S_2}[(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s\} \\
&+\sum_{S_{ab}}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}[(\mathrm{d}u_i^a-\mathrm{d}u_i^s)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^a]\mathrm{d}s\right. \\
&+\iint_{S_{ab}}[(\mathrm{d}u_i^b-\mathrm{d}u_i^s)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^b]\mathrm{d}s \\
&\left.-\iint_{S_{ab}}[(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^a+(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^b]\delta(\mathrm{d}u_i^s)]\mathrm{d}s\right\}=0
\end{aligned}
$$

(5.437)

4．势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅰ

若在元素内部位移、应变、应力增量为独立变量函数；在元素边界上位移增量为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.428)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

5.5.4 势能型修正变分原理Ⅳ

基于广义变分原理的泛函(4.384)式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1．变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数满足下列条件：

(1) 在元素内部应变、位移增量为独立构造的变量函数；

(2) 在元素边界上位移增量为独立构造的边界函数时，

则使下面泛函(5.438)式实现驻值条件的应变、位移增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$M_{pa-4}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[A\left(d\varepsilon_{ij}\right)-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\left(d\varepsilon_{ij}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}\right)\right]dv-\iint_{S_a}\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j(du_i$$

$$\left.-du_i^s)ds-\iint_{S_a\cap S_1}d\bar{P}_i du_i^s ds\right\} \qquad (5.438)$$

其中$A(d\varepsilon_{ij})$为(4.355)式。

证明： 在驻值条件下，由泛函(5.438)式可得

$$\delta M_{pa-4}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\left(d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}\right)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)\right.\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\delta(du_i)\right]dv$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[(du_i-du_i^s)\,\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)\right.$$

$$\left.+\left(d\bar{P}_i-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)\delta(du_i^s)\right]ds$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(du_i-d\bar{u}_i)\,\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)\right]ds\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[(du_i^a-du_i^s)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a\right.\right.$$

$$+(du_i^b-du_i^s)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^b$$

$$\left.\left.-\left(\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a+\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^b\right)\delta(du_i^s)\right]ds\right\}$$

$$=0 \qquad (5.439)$$

根据变分法基本引理，得

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}d\,u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.440)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V_a) \quad (5.441)$$

$$du_i^a-du_i^s=0 \qquad (S_1),(S_{as}) \quad (5.442)$$

$$du_i^b-du_i^s=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.443)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a+\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^b=0 \quad (S_{ab}) \quad (5.444)$$

$$d\bar{P}_i-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j=0 \qquad (S_1) \quad (5.445)$$

$$du_i-d\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.446)$$

由上述分析可知，泛函(5.438)式的变分条件和一般约束条件（应力应变增量关系）正是塑性流动理论的全部基本方程，故泛函(5.438)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。证毕。

2．势能型有限元修正变分原理Ⅳ

若在元素内部应变、位移增量为独立变量函数；在元素边界上位移增量为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.438)式实现驻值条件的位移、应变增量为塑性流动理论问题的近似解。

3．势能型边界元变分原理Ⅳ

若在元素内部待解函数满足应变位移增量(5.440)式、平衡方程(5.441)式；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.447)式的位移、应变增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}\left[(du_i-du_i^s)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)\right.\right.$$
$$\left.+\left(d\,\bar{P}_i-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)\delta(d\,u_i^s)\right]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}\left[(du_i-du_i^a)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)\right]ds\Big\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}\Big[(du_i^a-du_i^s)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a$$

$$+(du_i^b-du_i^s)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^b-\Big(\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a$$

$$+\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^b\Big)\delta(d\,u_i^s)\Big]ds\Big\}=0 \qquad (5.447)$$

4．势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅳ

(1) 若在元素内部位移、应变增量为独立构造的边界函数；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.439)式实现驻值条件位移、应变增量为塑性流动理论问题的近似解。

(2) 若待解函数在元素交界面上满足交界条件(5.442～5.444)式，在边界S_1上满足条件(5.442)与(5.445)式，在边界S_2上满足边界条件(5.446)式，则满足变分方程(5.448)式的位移、应变增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[-\left(d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}\right)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\delta(du_i)\Big]d\,v=0 \qquad (5.448)$$

5.5.5 势能型修正变分原理Ⅴ

基于广义变分原理的泛函(4.391)式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1．变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之

和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

（1）在元素内部应变、位移增量满足应变位移增量(5.440)式；

（2）在元素边界上位移增量为独立构造的边界函数时，则使下面泛函(5.449)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$M_{pa-5}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}[A(d\varepsilon_{ij})]d v\right.$$

$$-\iint_{S_a}\left[\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j(du_i-du_i^s)\right]ds$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_1}d\bar{P}_i du_i^s\, ds\right\} \tag{5.449}$$

其中$A(d\varepsilon_{ij})$为用$d\varepsilon_{ij}$表示的(4.355)式。

证明：在驻值条件下，由泛函(5.449)式得

$$\delta M_{pa-5}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)\delta(d\varepsilon_{ij})\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\delta(du_i)\right]dv$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[(du_i-du_i^s)\delta\left(\frac{1}{2}d\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right.$$

$$\left.+\left(d\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)\delta(d u_i^s)\right]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(du_i-d\bar{u}_i)\delta\left(\frac{1}{2}d\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]ds\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{s_{ab}=1}^{s_0}\Bigg\{\iint_{s_{ab}}\Bigg[(\mathrm{d}u_i^a-\mathrm{d}u_i^s)\delta\bigg(\bigg(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\bigg)l_j\bigg)^a\Bigg]\mathrm{d}s\\
&+\iint_{s_{ab}}\Bigg[(\mathrm{d}u_i^b-\mathrm{d}u_i^s)\delta\bigg(\bigg(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\bigg)l_j\bigg)^b\Bigg]\mathrm{d}s\\
&-\iint_{s_{ab}}\Bigg[\bigg(\bigg(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\bigg)l_j\bigg)^a\\
&+\bigg(\bigg(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\bigg)l_j\bigg)^b\Bigg]\delta(\mathrm{d}u_i^s)\mathrm{d}s\Bigg\}=0
\end{aligned}
\tag{5.450}
$$

其中要考虑变分约束条件(5.440)式。

根据变分法基本引理，得

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}=0 \qquad (V_a) \tag{5.451}$$

$$\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V_a) \tag{5.452}$$

$$\mathrm{d}u_i^a-\mathrm{d}u_i^s=0 \qquad (S_1),(S_{ab}) \tag{5.453}$$

$$\mathrm{d}u_i^b-\mathrm{d}u_i^s=0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.454}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]^a+\left[\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]^b=0 \qquad (S_{ab}) \tag{5.455}$$

$$\mathrm{d}\bar{P}_i-\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j=0 \qquad (S_1) \tag{5.456}$$

$$\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \tag{5.457}$$

由上述分析可知，泛函(5.449)式的变分条件和变分约束条件正是塑性流动理论问题的近似解，故在变分约束条件下使泛函(5.449)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理

论问题的近似解。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理V

若在元素内部位移、应变增量满足应变位移增量(5.440)式；在元素边界上位移增量为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.449)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

3. 势能型边界元变分原理V

若在元素内部待解函数满足应变位移增量(5.440)式、应力应变增量(5.451)式、平衡方程(5.452)式；在元素边界上位移增量为独立构造的边界函数时，则满足下面边界变分方程(5.458)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}\left[(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}u_i^a)\delta\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right.\right.$$

$$\left.+\left(\mathrm{d}\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)\delta(\mathrm{d}u_i^a)\right]\mathrm{d}s$$

$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}\left[(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}u_i^a)\delta\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]\mathrm{d}s\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=0}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[(\mathrm{d}u_i^a-\mathrm{d}u_i^s)\delta\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)^a\right]\mathrm{d}s\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}\left[(\mathrm{d}u_i^b-\mathrm{d}u_i^s)\delta\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)^b\right]\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_{ab}}\left[\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)^a+\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)^b\right]\delta(\mathrm{d}u_i^s)\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (5.458)$$

4. 势能型加权余数（广义伽略金）方程V

(1) 若在元素内部位移、应变增量满足应变位移增量

(5.440)式，在元素边界上位移增量为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.450)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

(2) 若待解函数在元素边界上满足交界条件(5.453～5.455)式，在边界S_1上满足(5.453)与(5.456)式，在边界S_2上满足(5.457)式，则满足变分方程(5.459)式的应变、应力、位移增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\delta(\mathrm{d}u_i)\right]\mathrm{d}v\right\}=0 \tag{5.459}$$

5.5.6 势能型修正变分原理VI

基于广义变分原理的泛函(4.402)式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数具备下列条件：

(1) 在元素内部待解函数满足平衡方程

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \tag{5.460}$$

(2) 在元素边界上应力增量为独立构造的边界函数时，则使下面泛函(5.461)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$M_{pa-6}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\right]\mathrm{d}v\right.$$

$$-\iint_{S_a}\left[dP_i^s-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]du_i ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2} dP_i^s d\bar{u}_i\, ds\Big\} \qquad (5.461)$$

其中$A(d\varepsilon_{ij})$为用$d\varepsilon_{ij}$表示的(4.355)式。

证明：在驻值条件下，利用变分约束条 件(5.460)式，由泛函(5.461)式可得

$$\delta M_{pa-6}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\left(d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{ij}-\frac{1}{2}du_{j,i}\right)\delta(d\sigma_{ij})\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}-\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij}(du_i))}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)\delta(d\varepsilon_{ij})\right]dv$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[dP_i-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]\delta(du_i)ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(dP_i^s-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)\delta(du_i)\right.$$

$$\left.+(du_i-d\bar{u}_i)\delta(dP_i^s)\right]ds\Big\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}\left[dP_i^s-\left(\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)^a\right]\delta(du_i)^a ds$$

$$+\iint_{S_{ab}}\left[dP_i^s-\left(\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)^b\right]\delta(du_i)^b ds$$

$$-\iint_{S_{ab}}[du_i^a-du_i^b)\delta(dP_i^s)]ds\Big\}=0 \qquad (5.462)$$

根据变分法基本引理，得

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.463)$$

$$d\sigma_{ij}-\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij}(du_i))}{\partial(d\varepsilon_{ij})}=0 \qquad (V_a) \quad (5.464)$$

$$du_i^a-du_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.465)$$

$$dP_i^a-\left[\left(\frac{1}{2}d\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]^a=0$$

$$(S_2),(S_{ab}) \quad (5.466)$$

$$dP_i^b-\left[\left(\frac{1}{2}d\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]^b=0 \quad (S_{ab}) \quad (5.467)$$

$$d\bar{P}_i-\left(\frac{1}{2}d\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j=0 \qquad (S_1) \quad (5.468)$$

$$du_i-d\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.469)$$

由上述分析可知，泛函(5.461)式的变分条件和变分约束条件正是塑性流动理论的四类基本方程及交界条件，故在变分约束条件下使泛函(5.461)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。证毕。

2．势能型有限元修正变分原理Ⅵ

若在元素内部待解函数满足平衡方程(5.460)式；在元素边界上应力增量为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.461)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

3．势能型边界元变分原理Ⅵ

若在元素内部待解函数满足平衡方程(5.460)式、应变位移增量关系(5.463)式、应力位移增量关系(5.464)式；在元素边界上应力增量为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.470)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}\left[d\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]\delta(du_i)ds\right.$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(dP_i^s-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)\delta(du_i)\right.$$

$$\left.\left.+(du_i-d\bar{u}_i)\delta(dP_i^s)\right]ds\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[dP_i^s-\left(\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)^a\right]\delta(du_i)^a ds\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}\left[dP_i^s-\left(\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)^b\right]\delta(du_i)^b ds$$

$$\left.-\iint_{S_{ab}}[(du_i^a-du_i^b)\delta(dP_i^s)]ds\right\}=0 \qquad (5.470)$$

4．势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅵ

（1）若在元素内部待解函数满足平衡方程(5.460)式；在元素边界上应力增量为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.462)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

（2）若待解函数在元素交界面上满足交界条件(5.465～5.467)式，在边界S_1上满足边界条件(5.468)式，在边界S_2上满足条件(5.466)、(5.469)两式时，则满足变分方程(5.471)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\left(d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}\right)\delta(d\sigma_{ij})\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}-\frac{\partial A(d\,\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)\delta(d\varepsilon_{ij})\right]dv \qquad (5.471)$$

5.5.7 余能型修正变分原理 I

基于古典变分原理的泛函(3.52)式，对固体系统进行几何剖分，采用分片构造待解函数，当在元素内部构造的待解函数不满足交界条件(5.404)式(或(5.405)式，或(5.406)式)时，为了保证合力的连续性条件成立，采用拉氏乘子法，将变分约束条件(5.404)式导入泛函(3.52)式中，在泛函中增加了修正项，即

$$\iint_{S_{ab}} \lambda_i^s[(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^a+(\mathrm{d}\,\sigma_{ij}l_j)^b]\mathrm{d}s \qquad (5.472)$$

从而形成了余能型修正变分原理 I 的泛函。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数具备下列条件：

(1) 在元素内部满足平衡方程(1.63)式；

(2) 在边界S_1上满足边界条件(1.69)式；

(3) 在元素边界上合力连续性条件(5.404)式不必满足时，则使下面泛函(5.473)式实现驻值条件的位移、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$M_{pb-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}[B(\mathrm{d}\sigma_{ij})]\mathrm{d}\,v-\iint_{S_a\cap S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\iint_{S_{ab}}\lambda_i^s[(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b]\mathrm{d}s \qquad (5.473)$$

其中$B(\mathrm{d}\sigma_{ij})$为(1.76)式；λ_i^s为交界面S_{ab}上的拉氏乘子。

证明： 在驻值条件下，考虑到变分约束条件(1.63)式，由泛函(5.473)式得

$$\delta M_{pb-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}u_{i,j}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathrm{d}u_{j,i}\right)\right]\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[((\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^a+(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^b)\delta\lambda_i^s\right.\right.$$

$$+(\lambda_i^s-\mathrm{d}u_i^a)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^a$$

$$\left.\left.+(\lambda_i^s-\mathrm{d}u_i^b)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^b\right]\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (5.474)$$

根据变分法基本引理，得

$$\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}-\frac{1}{2}(\mathrm{d}u_{i,j}+\mathrm{d}u_{j,i})=0 \qquad (V_a) \qquad (5.475)$$

$$\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i=0 \qquad (S_2) \qquad (5.476)$$

$$\lambda_i^s-\mathrm{d}u_i^a=0 \qquad (S_{ab}) \qquad (5.477)$$

$$\lambda_i^s-\mathrm{d}u_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \qquad (5.478)$$

$$(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^a+(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^b=0 \qquad (S_{ab}) \qquad (5.479)$$

由上述可知，泛函(5.473)式的变分条件、变分约束条件(平衡方程与力的边界条件）和一般约束条件（应力应变增量关系）正是塑性流动理论的四类基本方程及交界条件，故在变分约束条件下，使泛函(5.473)式实现驻值条件的应力、位移增量为塑性流动理论问题的近似解。证毕。

2. 余能型有限元修正变分原理 I

（1）若应力函数在元素内部满足平衡方程(1.63)式，在边界上满足力的边界条件(1.69)式，在元素边界上导入独立参变量λ_i^s，则使泛函(5.473)式实现驻值条件的应力、位移增量与乘子λ_i^s

为塑性流动理论问题的近似解。

(2) 若应力函数在元素内部满足平衡方程(1.63)式,在边界上满足力的边界条件(1.69)式；在元素交界面上，令

$$\lambda_i^a = \mathrm{d}u_i^a$$

即在元素交界面上独立构造应力函数为边界函数时，则使泛函(5.473)式实现驻值条件的应力、位移增量为塑性流动理论问题的近似解。

5.5.8 余能型修正变分原理 II

基于广义变分原理的泛函(4.434)式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和,并采用分片构造待解函数,当构造的待解函数满足下列条件:

(1) 在元素内部位移、应变、应力函数为独立变量函数;

(2) 在元素边界上位移、应力增量为独立构造的边界函数时,

则使泛函 (5.485)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$M_{p5-2}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-B(\mathrm{d}\sigma_{ij})+\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}+\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}(\mathrm{d}u_i)\right]\mathrm{d}v-\iint_{S_a}\mathrm{d}\,u_i^a\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}P_i^a\right)\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}P_i^a\mathrm{d}s\right\} \qquad (5.485)$$

其中$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$为用$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$表示的(4.355)式；$B(\mathrm{d}\sigma_{ij})$ 为用$\mathrm{d}\sigma_{ij}$表示的(4.356)式。

证明： 在驻值条件下，由泛函(5.485)式得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{pb-2}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Bigg[&\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}\right)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})\\
&+\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\delta(\mathrm{d}u_i)+(\mathrm{d}\sigma_{ij}\\
&-\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\mathrm{d}u_{k,l})\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\Bigg]\mathrm{d}v\\
&-\iint_{S_a}\Bigg[\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}P_i^a\right)\delta(\mathrm{d}u_i^a)\\
&+(\mathrm{d}u_i^a-\mathrm{d}u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)\Bigg]\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_a\cap S_1}\Bigg[\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}\overline{P}_i\right)\delta(\mathrm{d}u_i^a)\\
&+(\mathrm{d}u_i^a-\mathrm{d}u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)\Bigg]\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_a\cap S_2}\Bigg[\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}P_i^a\right)\delta(\mathrm{d}u_i^a)+(\mathrm{d}u_i^a\\
&-\mathrm{d}u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)+(\mathrm{d}\overline{u}_i-\mathrm{d}u_i^a)\delta(\mathrm{d}P_i^a)\Bigg]\mathrm{d}s\Bigg\}\\
=0&
\end{aligned}
\qquad(5.486)
$$

其中在元素交界面上$\mathrm{d}u_i^a\delta(\mathrm{d}P_i^a)$为相消项。

根据变分法基本引理，得

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}=0 \qquad (V_a) \qquad (5.487)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V_a) \qquad (5.488)$$

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{k,l}+\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{l,k}\right)=0$$

利用(5.487)式，上式变为

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.489)$$

$$du_i^a-du_i=0 \qquad (S_1),(S_2),(S_a) \quad (5.490)$$

$$\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j-dP_i^a=0 \qquad (S_2),(S_a) \quad (5.491)$$

$$\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j-d\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (5.492)$$

$$d\bar{u}_i-du_i^a=0 \qquad (S_2) \quad (5.493)$$

由上述分析可知，泛函(5 485)式的变分条件正是塑性流动理论的四类基本方程及交界条件，故使泛函(5.485)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。证毕。

2．余能型有限元修正变分原理Ⅰ

若在元素内部位移、应变、应力增量为独立变量函数；在元素的边界上位移、应力增量为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.485)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

3．余能型边界元变分原理Ⅰ

若在元素内部待解函数满足应力应变增量(5.487)式、平衡方程(5.488)式、应变位移增量(5.489)式；在元素边界上位移、应力增量为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.494)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j-dP_i^a\right)\delta(du_i^a)\right.\right.$$

$$\left.+(du_i^a-du_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)\right]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j-d\bar{P}_i\right)\delta(du_i^a)\right.$$

$$
+(\mathrm{d}u_i^s-\mathrm{d}u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)\Big]\mathrm{d}s
$$

$$
+\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}P_i^s\right)\delta(\mathrm{d}u_i^s)\right.
$$

$$
+(\mathrm{d}u_i^s-\mathrm{d}u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_i\right)
$$

$$
\left.+(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i^s)\delta(\mathrm{d}P_i^s)\right]\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (5.494)
$$

4．余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅰ

（1）若在元素内部位移、应变、应力增量为独立变量函数；在元素边界上位移、应力增量为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.486)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

（2）若待解函数在元素交界面上满足交界条件(5.490)、(5.491)式，在边界S_1上满足条件(5.490)与(5.492)式，在边界S_2上满足条件(5.490)、(5.491)、(5.493)式时，则满足泛函(5.495)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$
\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})+\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\delta(\mathrm{d}u_i)\right.\right.
$$

$$
+\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}\right.\right.
$$

$$
\left.\left.\left.\left.+\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)\right)\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\right]\mathrm{d}v\right\}=0 \qquad (5.495)
$$

5.5.9 余能型修正变分原理III

基于广义变分原理的泛函(4.434)式，采用不同于上节的分片构造的待解函数类，从而形成下面各类修正变分原理。

1．变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之

和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

(1) 在元素内部位移、应变、应力增量为独立变量函数；

(2) 在元素边界上应力增量为独立构造的边界函数时，

则使下面泛函(5.496)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{pb-s}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Big[-B(\mathrm{d}\sigma_{ij})+\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\\
&+\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}(\mathrm{d}u_i)\Big]\mathrm{d}v\\
&-\iint_{S_a}\mathrm{d}u_i\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}P_i^s\right)\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}P_i^s\mathrm{d}s\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{5.496}
$$

其中$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$为用$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$表示的(4.355)式；$B(\mathrm{d}\sigma_{ij})$为用$\mathrm{d}\sigma_{ij}$表示的(4.356)式。

证明：在驻值条件下，由泛函(5.496)式可得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{pb-s}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Big[\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})\\
&+\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\delta(\mathrm{d}u_i)+\Big(\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\\
&\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}+\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)\Big)\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\Big]\mathrm{d}v\\
&-\iint_{S_a\cap S_1}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}P_i\right)\delta(\mathrm{d}u_i)\right]\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_a\cap S_2}\Big[\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}P_i^s\right)\delta(\mathrm{d}u_i)\\
&+(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i)\delta(\mathrm{d}P_i^s)\Big]\mathrm{d}s\Bigg\}\\
&-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Bigg\{\iint_{S_{ab}}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a-\mathrm{d}P_i^s\right]\delta(\mathrm{d}u_i)^a\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$+\iint_{S_{ab}}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^b-\mathrm{d}P_i^s\right]\delta(\mathrm{d}u_i)^b\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_{ab}}[(\mathrm{d}u_i^a-\mathrm{d}u_i^b)\delta(\mathrm{d}P_i^s)]\mathrm{d}s\Bigg\}=0 \qquad (5.497)$$

根据变分法基本引理，得

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}=0 \qquad (V_a) \quad (5.498)$$

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}+\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)=0$$

利用(5.498)式，上式可变为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(\mathrm{d}u_{i,j}+\mathrm{d}u_{j,i})=0 \qquad (V_a) \quad (5.499)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V_a) \quad (5.500)$$

$$\mathrm{d}u_i^a-\mathrm{d}u_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.501)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a-\mathrm{d}P_i^s=0 \qquad (S_2),(S_{ab}) \quad (5.502)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^b-\mathrm{d}P_i^s=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.503)$$

$$\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}P_i=0 \qquad (S_1) \quad (5.504)$$

$$\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.505)$$

由上述分析可知，泛函(5.496)式的变分条件正是塑性流动理论的四类基本方程及交界条件，故使泛函(5.496)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。证毕。

2. 余能型有限元修正变分原理Ⅱ

若在元素内部位移、应变、应力增量均为独立变量函数，在元素边界上应力增量为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.496)

式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

3．余能型边界元变分原理Ⅱ

若在元素内部待解函数满足应力应变增量(5.498)式、应变位移增量(5.499)式、平衡方程(5.500)式；在元素边界上应力增量为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.506)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}\left[\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i\right]\delta(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s\right.\\
&+\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}P_i^s\right)\delta(\mathrm{d}u_i)\right.\\
&\left.\left.+(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i)\delta(\mathrm{d}P_i^s)\right]\mathrm{d}s\right\}\\
&+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[\left(\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a-\mathrm{d}P_i^s\right)\delta(\mathrm{d}u_i)^a\right.\right.\\
&+\left(\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^b-\mathrm{d}P_i^s\right)\delta(\mathrm{d}u_i)^b\\
&\left.\left.+(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i)\delta(\mathrm{d}P_i^s)\right]\mathrm{d}s\right\}=0
\end{aligned}
\tag{5.506}
$$

4．余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅱ

若在元素内部位移、应变、应力增量为独立变量函数；在元素边界上应力增量为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.497)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

5.5.10 余能型修正变分原理Ⅳ

基于广义变分原理的泛函(4.445)式，采用分片构造待解函

数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

(1) 在元素内部位移、应力增量为独立变量函数；

(2) 在元素边界上应力增量为独立构造的边界函数时，

则使下面泛函(5.507)式实现驻值条件的位移、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{pb-4}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{&\iiint_{V_a}\Big[B(\mathrm{d}\sigma_{ij})+\mathrm{d}u_i(\mathrm{d}\sigma_{ij,j})\Big]\mathrm{d}v\\
&-\oint_{S_a}\mathrm{d}u_i(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}P_i^s)\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_a\cap S_1}\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}P_i^s\mathrm{d}s\Big\}
\end{aligned}
\qquad (5.507)
$$

其中$B(\mathrm{d}\sigma_{ij})$为用$\mathrm{d}\sigma_{ij}$表示的(4.356)式。

证明： 在驻值条件下，由泛函(5.507)式可得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{pb-4}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{&\iiint_{V_a}\Big[\Big(\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\Big)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})\\
&+(\mathrm{d}\sigma_{ij,j})\delta(\mathrm{d}u_i)\Big]\mathrm{d}v\\
&-\iint_{S_a\cap S_1}[\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i]\delta(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_a\cap S_2}[(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}P_i^s)\delta(\mathrm{d}u_i)\\
&+(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i)\delta(\mathrm{d}P_i^s)]\mathrm{d}s\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
-\sum_{S_{ab}=1}^{S_n}\left\{\iint_{S_{ab}}[(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^a-\mathrm{d}P_i^s]\delta(\mathrm{d}u_i)^a\mathrm{d}s\right.
$$

$$
+\iint_{S_{ab}}[(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^b-\mathrm{d}P_i^s]\delta(\mathrm{d}u_i)^b\mathrm{d}s
$$

$$
\left.-\iint_{S_{ab}}[(\mathrm{d}u_i^a-\mathrm{d}u_i^b)\delta(\mathrm{d}P_i^s)\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (5.508)
$$

根据变分法基本引理，得

$$
\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.509)
$$

$$
\mathrm{d}\sigma_{ij,j}=0 \qquad (V_a) \quad (5.510)
$$

$$
(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^a-\mathrm{d}P_i^s=0 \qquad (S_2),(S_{ab}) \quad (5.511)
$$

$$
(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^b-\mathrm{d}P_i^s=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.512)
$$

$$
\mathrm{d}u_i^a-\mathrm{d}u_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.513)
$$

$$
\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (5.514)
$$

$$
\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.515)
$$

由上述分析可知，泛函(5.507)式的变分条件和一般约束条件(应力应变增量关系)正是塑性流动理论的四类基本方程及交界条件，故泛函(5.507)式实现驻值条件的位移、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。证毕。

2. 余能型有限元修正变分原理Ⅳ

若在元素内部位移、应力增量为独立变量函数；在元素边界上应力增量为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.507)式实现驻值条件的位移、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

3. 余能型边界元变分原理Ⅳ

若在元素内部位移、应力增量满足应力位移增量(5.509)式、平衡方程(5.510)式；在元素边界上应力增量为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.516)式的位移、应力增量为塑

性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint\limits_{S_a\cap S_1}[\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i]\delta(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s\right.$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_2}[(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}P_i^s)\delta(\mathrm{d}u_i)$$

$$\left.+(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i)\delta(\mathrm{d}P_i^s)]\mathrm{d}s\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint\limits_{S_{ab}}[(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^a-\mathrm{d}P_i^s]\sigma(\mathrm{d}u_i)^a\,\mathrm{d}s\right.$$

$$+\iint\limits_{S_{ab}}[(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^b-\mathrm{d}P_i^s]\delta(\mathrm{d}u_i)^b\,\mathrm{d}s$$

$$\left.-\iint\limits_{S_{ab}}[(\mathrm{d}u_i^a-\mathrm{d}u_i^b)\delta(\mathrm{d}P_i^s)\,\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (5.516)$$

4. 余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅳ

(1) 若在元素内部位移、应力增量为独立构造的变量函数；在元素边界上应力增量为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.508)式的位移、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

(2) 若待解函数在元素交界面上满足交界条件(5.511～5.513)式，在边界S_1上满足条件(5.514)式，在边界S_2上满足条件(5.511)与(5.515)式时，则满足变分方程(5.517)式的位移、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{V_a}\left[\left(\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\mathrm{d}\sigma_{ij})_{,j}\delta(\mathrm{d}u_i)\right]\mathrm{d}v\right\}=0 \qquad (5.517)$$

5.5.11 余能型修正变分原理V

基于广义变分原理的泛函(4.446)式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

(1) 在元素内部位移、应变增量满足应变位移增量(5.499)式；

(2) 在元素边界上应变增量为独立构造的边界函数时，则使下面泛函(5.518)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$M_{pb-5}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-B(\mathrm{d}\sigma_{ij})+\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}+\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}+\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)+\mathrm{d}u_i\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\right]\mathrm{d}v-\iint_{S_a}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\right]\mathrm{d}u_i\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\mathrm{d}s\right\} \tag{5.518}$$

其中$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$为用$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$表示的(4.355)式；$B(\mathrm{d}\sigma_{ij})$为用$\mathrm{d}\sigma_{ij}$表示的(4.356)式。

证明： 在驻值条件下，利用变分约束条件(5.499)式，由泛函(5.518)式可得

$$\delta M_{pb-5}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}\right)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})\right.\right.$$

$$+\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\delta(du_i)\Big]dv$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j-d\bar{P}_i\right)\delta(du_i)\right]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)-\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\right]\delta(du_i)ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(d\bar{u}_i-du_i)\,\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\right]ds\Bigg\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a-\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\right]\delta(du_i)^a ds\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^b-\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\right]\delta(du_i)^b ds$$

$$\left.-\iint_{S_{ab}}[(du_i)^a-(du_i)^b]\,\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s ds\right\}=0$$

$$(5.519)$$

根据变分法基本引理，得

$$\frac{1}{2}d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{\partial B}{\partial(d\sigma_{ij})}=0$$

利用变分约束条件上式可变为

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(d\sigma_{ij})}=0 \qquad (V_a) \quad (5.520)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V_a) \quad (5.521)$$

$$du_i^a-du_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.522)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a-\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s=0$$

$$(S_2),(S_{ab}) \quad (5.523)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^b-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.524)$$

$$\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (5.525)$$

$$\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.526)$$

由上述分析可知，泛函(5.518)式的变分条件和变分约束条件正是塑性流动理论的四类基本方程及交界条件，故在变分约束条件下，使泛函(5.518)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

2．余能型有限元修正变分原理V

若在元素内部应变、位移增量满足应变位移增量(5.499)式；在元素边界上应变增量为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.518)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

3．余能型边界元变分原理V

若在元素内部待解函数满足应变位移增量(5.499)式、应力应变增量(5.520)式、平衡方程(5.521)式；在元素边界上应变增量为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.527)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}\left[\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i\right]\delta(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s\right.$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a\right]\delta(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s$$

$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}[(\mathrm{d}\bar{u}_i)-(\mathrm{d}u_i)]\,\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a\mathrm{d}s\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^a-\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\right]\delta(du_i)^a ds\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^b-\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\right]\delta(du_i)^b ds$$

$$\left.-\iint_{S_{ab}}[(du_i)^a-(du_i)^b]\,\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s ds\right\}=0 \quad (5.527)$$

4. 余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅴ

若在元素内部应变、位移增量满足应变位移增量(5.499)式；在元素边界上应变增量为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.519)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

5.5.12 余能型修正变分原理Ⅵ

基于广义变分原理的泛函(4.458)式，采用分片构造待解函数，可以形成以下各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并分片构造待解函数，当构造的待解函数具备下列条件：

（1）在元素内部满足平衡方程(5.521)式；

（2）在元素边界上应变增量为独立构造的边界函数，并用其表示应力增量时，

则使下面泛函(5.528)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$M_{pb-6}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_V[-B(d\sigma_{ij})+d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}]dv\right.$$

$$-\iint_{S_a}du_i\left[d\,\sigma_{ij}l_j-\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\right]ds$$

$$
-\iint_{S_a\cap S_2} \mathrm{d}\bar{u}_i\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s \mathrm{d}s\Bigg\} \tag{5.528}
$$

其中$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$为用$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$表示的(4.355)式；$B(\mathrm{d}\sigma_{ij})$为用 $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ 表示的(4.356)式。

证明：在驻值条件下，利用变分约束条件(5.521)式，由泛函(5.528)式可得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{pb-6} = \sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Bigg[\left(\mathrm{d}\,\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}\right)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}) \\
&+\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}+\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)\right) \\
&\cdot\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\Bigg]\mathrm{d}v \\
&-\iint_{S_a\cap S_1}[(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i)\delta(\mathrm{d}u_i)]\mathrm{d}s \\
&-\iint_{S_a\cap S_2}\Bigg[\left(\mathrm{d}\,\sigma_{ij}l_j-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\right)\delta(\mathrm{d}u_i) \\
&+(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\,\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\Bigg]\mathrm{d}s\Bigg\} \\
&-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Bigg\{\iint_{S_{ab}}\left[(\mathrm{d}\,\sigma_{ij}l_j)^a-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\right] \\
&\cdot\delta(\mathrm{d}u_i)^a\mathrm{d}s \\
&+\iint_{S_{ab}}\left[(\mathrm{d}\,\sigma_{ij}l_j)^b-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\right]\delta(\mathrm{d}u_i)^b\mathrm{d}s \\
&-\iint_{S_{ab}}[(\mathrm{d}u_i)^a-(\mathrm{d}u_i)^b]\,\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\mathrm{d}s\Bigg\}=0
\end{aligned} \tag{5.529}
$$

根据变分法基本引理，得

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(d\sigma_{ij})}=0 \qquad (V_a) \quad (5.530)$$

$$d\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial(d\varepsilon_{ij})\partial(d\varepsilon_{kl})}\left(\frac{1}{2}du_{i,j}+\frac{1}{2}du_{j,i}\right)=0 \qquad (V_a)$$

利用(5.530)式，上式变为

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.531)$$

$$du_i^a-du_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.532)$$

$$(d\sigma_{ij}l_j)^a-\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s=0 \qquad (S_2),(S_{ab}) \quad (5.533)$$

$$(d\sigma_{ij}l_j)^b-\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.534)$$

$$d\sigma_{ij}l_j-d\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (5.535)$$

$$d\bar{u}_i-du_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.536)$$

由上述分析可知，泛函(5.528)式的变分条件和变分约束条件正是塑性流动理论的四类基本方程及交界条件，故在变分约束条件下，使泛函(5.528)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

2. 余能型有限元修正变分原理Ⅵ

若在元素内部待解函数满足平衡方程(5.499)式；在元素边界上应变增量为独立构造的边界函数，并用其表示应力函数，则使泛函(5.528)式实现驻值条件的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

3. 余能型边界元变分原理Ⅵ

在元素内部若待解函数满足平衡方程(5.499)、应力应变增量(5.530)式、应变位移增量(5.531)式；在元素边界上应变增量为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.537)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$
\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}[(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)-\mathrm{d}\bar{P}_i]\delta(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s\right.
$$

$$
+\iint_{S_a\cap S_2}\left[\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\right)\delta(\mathrm{d}u_i)\right.
$$

$$
\left.\left.+(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i)\,\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\right]\mathrm{d}s\right\}
$$

$$
+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^a-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\right]\delta(\mathrm{d}u_i)^a\mathrm{d}s\right.
$$

$$
+\iint_{S_{ab}}\left[(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)^a-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\right]\delta(\mathrm{d}u_i)^b\mathrm{d}s
$$

$$
\left.-\iint_{S_{ab}}[(\mathrm{d}u_i)^a-(\mathrm{d}u_i)^b]\,\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)^s\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (5.537)
$$

4．余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅶ

(1) 在元素内部待解函数满足平衡方程(5.499)式，在元素边界上应变增量为独立构造的边界函数，并用其表示应力增量，则满足变分方程(5.529)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

(2) 待解函数在元素交界面上满足交界条件(5.532～5.534)式，在边界S_1上满足边界条件(5.535)式，在边界S_2上满足条件(5.533)与(5.536)式时，则满足变分方程(5.538)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$
\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(\mathrm{d}\,\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}\right)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})\right.\right.
$$

$$
+\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}+\frac{1}{2}\mathrm{d}\,u_{j,i}\right)\right)
$$

$$
\left.\left.\cdot\,\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\right]\mathrm{d}v\right\}=0 \qquad (5.538)
$$

§5.6 蠕变理论的修正变分原理

在离散分析过程中，基于古典变分原理的泛函，或广义变分原理的泛函的基础上，采用分片构造待解函数去解决稳定蠕变流动理论问题时，待解函数在满足稳定蠕变流动理论的四类基本方程的同时，还必须满足交界条件（或称为连续性条件）。

所谓交界条件，即为待解函数在元素交界面S_{ab}上应满足的条件，其条件为

（1）位移速度连续性条件

$$(\dot{u}_i)^a-(\dot{u}_i)^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.539)$$

（2）合力连续性条件

$$(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.540)$$

或表示为应变速度，即

$$(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^a+(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.541)$$

或为

$$\left[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j\right]^a+\left[\frac{1}{1+\mu}(\sigma+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j\right]^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.542)$$

这里利用$\dot{\varepsilon}_{ii}=\dot{u}_{i,i}=0$及略去弹性变形这两个假定条件。

5.6.1 势能型修正变分原理Ⅰ

基于古典变分原理的泛函(3.57)式，采用分片构造待解函数，当在元素内部构造的待解函数不满足位移连续性条件(5.539)式时，为了保证位移连续性条件成立，采用拉氏乘子法将变分约

束条件(5.539)式导入泛函(3.57)式中，在泛函中增加了修正项，即

$$\iint_{S_{ab}} \lambda_i^s[(\dot{u}_i)^a-(\dot{u}_i)^b]\mathrm{d}s \qquad (5.543)$$

于是形成了下面修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数具备下列条件：

(1) 应变速度与位移速度满足 (1.93) 式；

(2) 在边界S_2上满足位移边界条件(1.99) 式；

(3) 在元素交界面S_{ab}上，位移速度连续性条件(5.539)式不必满足；

(4) 满足不可压缩条件 (1.100) 式时，

则使下面泛函 (5.544) 式实现驻值条件的位移速度、应变速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$M_{ca-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}[A(\dot{\varepsilon}_{ij})-\bar{F}_i\dot{u}_i]\mathrm{d}v\right.$$
$$\left.-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i\mathrm{d}s\right\}-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\iint_{S_{ab}}\lambda_i^s(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b)\mathrm{d}s \quad (5.544)$$

其中$A(\dot{\varepsilon}_{ij})$为(1.101)式；$\lambda_i^s$为交界面$S_{ab}$上的拉氏乘子。

证明： 在驻值条件下，考虑到变分约束条件(1.93)式、一般约束条件(1.94)式和不可压缩条件(1.100)式，由泛函(5.544)式可得

$$\delta M_{ca-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}-\left[\left(\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\delta\dot{u}_i\mathrm{d}v\right.$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left(\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right)\delta\dot{u}_i\mathrm{d}s\Bigg\}$$

$$-\sum_{S_{ab}-1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[\left(\lambda_i^s-\left(\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}l_j\right)^a\right)\delta\dot{u}_i^a\right.\right.$$

$$+\left(\lambda_i^s-\left(\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}l_j\right)^b\right)\delta\dot{u}_i^b$$

$$\left.\left.+(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b)\delta\lambda_i^s\right]\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (5.545)$$

由于$\delta\dot{u}_i^a$，$\delta\dot{u}_i^b$，$\delta\lambda_i$相互无关且为任意函数，根据变分法基本引理得

$$\left(\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i=\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0$$

$$(V_a) \quad (5.546)$$

式中$\dot{\varepsilon}_{ii}=\dot{u}_{i,i}=0$，并略去弹性变形

$$\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.547)$$

$$\lambda_i^s-\left(\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}l_j\right)^a=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.548)$$

$$\lambda_i^s-\left(\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}l_j\right)^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.549)$$

$$\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (5.550)$$

由上述可知，泛函(5.544)式的变分条件为平衡方程、交界条件和力的边界条件；再考虑到待解函数已预先满足了应变速度与位移速度关系式、应力与应变速度关系式及不可压缩条件。由此可知，待解函数已满足应满足的稳定蠕变流动理论的全部方程与条件。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理Ⅰ

(1) 若待解函数在元素内部满足应变速度与位移速度(1.93)式，在边界上满足位移边界条件(1.99)式；在元素交界面

上引入独立参变量λ_i^s时，则使泛函(5.544)式实现驻值条件的应变速度、位移速度、λ_i^s为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

(2) 若待解函数在元素内部满足应变速度与位移速度(1.93)式，在边界上满足位移边界条件(1.99)式；在元素的交界面上，令

$$\lambda_i^s=\left(\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}l_j\right)^s \qquad (5.551)$$

即在元素交界面上独立构造应变速度，并用其表示应力，则使泛函(5.544)式实现驻值条件的应变速度与位移速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

5.6.2 势能型修正变分原理II

基于广义变分原理的泛函(4.491)式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数满足下列条件：

(1) 在元素内部应力、应变速度、位移速度为独立变量函数；

(2) 在元素边界上，位移速度与应力函数为独立构造的边界函数；

(3) 不可压缩条件时，

则使泛函(5.552)式实现驻值条件的应力函数、应变速度、位移速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$M_{ca-2}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{V_a}\left[\frac{1}{1+\mu}(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})\dot{\varepsilon}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\right.\right.$$

$$
-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})
$$

$$
\cdot\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right)\Big]dv
$$

$$
-\iint_{S_a} P_i^s(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)ds-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i^s ds\Big\} \qquad (5.552)
$$

证明：在驻值条件下，由泛函(5.552)式得

$$
\delta M_{oa-2}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[-\frac{1}{1+\mu}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right)\delta\sigma'_{ij}
$$

$$
+\left(\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i\right)\delta\dot{u}_i
$$

$$
-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})\delta\dot{e}_{ij}
$$

$$
-\frac{1}{1+\mu}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right)\mu^2 2g(H)\delta\dot{e}_{ij}\Big]dv
$$

$$
-\iint_{S_a}\Big[(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)\delta P_i^s
$$

$$
+\left(P_i^s-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})l_j\right)\delta\dot{u}_i\Big]ds
$$

$$
-\iint_{S_a\cap S_1}\Big[(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)\delta P_i^s+(\bar{P}_i-P_i^s)\delta u_i^s
$$

$$
+\left(P_k^s-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})l_j\right)\delta\dot{u}_k\Big]ds
$$

$$
-\iint_{S_a\cap S_2}\Big[(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)\delta P_i^s+\Big(P_i^s-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}
$$

$$
+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})l_j\Big)\delta\dot{u}_i\Big]ds\Big\}=0 \qquad (5.553)
$$

其中在元素交界面S_{ab}上$P_i^s\delta u_i^s$为相消项。

由于$\delta\sigma'_{ij}$，$\delta\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\delta\dot{u}_i$相互无关且为任意函数，根据变分法基本引理得

$$\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}=0 \qquad (V) \qquad (5.554)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0 \qquad (V) \qquad (5.555)$$

$$\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V) \qquad (5.556)$$

$$\dot{u}_i-\dot{u}_i^s=0 \qquad (S_{ab}) \qquad (5.557)$$

$$P_i^s-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j=0 \qquad (S_{ab}) \qquad (5.558)$$

$$\bar{P}_i-P_i^s=0 \qquad (S_1) \qquad (5.559)$$

$$P_i^s-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j=0 \qquad (S_1) \qquad (5.560)$$

$$\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i=0 \qquad (S_2) \qquad (5.561)$$

由上述可知，泛函(5.552)式的变分条件正是稳定蠕变流动理论的基本方程及交界条件。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理 I

在满足不可压缩条件下，若$\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$，$\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\dot{u}_i$在元素内部为独立变量函数、应力函数及位移速度，在元素边界上为独立构造的边界函数时，使泛函(5.552)式实现驻值条件的$\sigma'_{ij}(\sigma_{ij})$，$\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\dot{u}_i$为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

3. 势能型边界元变分原理 I

在满足不可压缩条件下，若在元素内部应力函数、应变速度、位移速度满足应力应变速度(5.554)式，应变速度位移速度(5.555)式、平衡方程(5.556)式；在元素边界上位移速度与应力函数为独立构造的边界函数时，则满足下面边界变分方程(5.562)式的位移速度、应变速度、应力函数为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iint_{S_a}&\Big[(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)\delta P_i^s\\
&+\Big(P_i^s-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j\Big)\delta\dot{u}_i\Big]\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_a\cap S_1}\Big[(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)\delta P_i^s+(\overline{P}_i-P_i^s)\delta\dot{u}_i^s\\
&+\Big(P_i^s-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j\Big)\delta\dot{u}_i\Big]\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_a\cap S_2}\Big[(\dot{u}_i-\overline{\dot{u}}_i)\delta P_i^s\\
&+\Big(P_i^s-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j\Big)\delta\dot{u}_i\Big]\mathrm{d}s\Bigg\}=0
\end{aligned}
\tag{5.562}
$$

4. 势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅱ

在满足不可压缩条件下，若应力函数、应变速度、位移速度为独立变量函数；在元素边界上独立构造位移速度、应力函数为边界函数时，则满足变分方程(5.553)式的应力函数、应变速度、位移速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

5.6.3 势能型修正变分原理III

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，基于广义变分原理的泛函(4.491)式，采用分片构造待解函数，但在元素边界上位移速度为独立构造的边界函数，于是得下面各类变分原理。

1. 势能型有限元修正变分原理Ⅰ

在不可压缩条件下，当应力函数、应变速度、位移速度为独立变量函数；在元素边界上位移速度为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.563)式实现驻值条件的应力函数、应变速度、位移

速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$M_{ca-3}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Big[\Big(\frac{1}{1+\mu}2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\Big)$$

$$-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})\Big(\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}$$

$$-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\Big)\Big]dv-\iint_{S_a}\sigma_{ij}l_j(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)ds-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i^s ds\Bigg\}$$

(5.563)

2. 势能型加权余数（广义伽略金）方程 I

在满足不可压缩条件下，当$\dot{u}_i$，$\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\sigma'_{kj}(\sigma_{ij})$为独立变量函数；在元素边界上位移速度为独立构造的边界函数时，则满足下面变分方程(5.564) 式的位移速度、应变速度、应力函数为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V}\Big[-\frac{1}{1+\mu}\Big(\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\Big)\delta\sigma'_{ij}$$

$$-\Big(\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i\Big)\delta\dot{u}_i$$

$$-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})\,\delta\dot{\varepsilon}_{ij}\Big]dv$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}[(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)\delta\sigma_{ij}l_j$$

$$+(\bar{P}_i-\sigma_{ij}l_j)\delta\dot{u}_i^s]ds$$

$$-\iint_{S_2\cap S_2}[(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)\delta(\sigma_{ij}l_j)]ds\Bigg\}$$

$$-\sum_{S_{ab}}^{S_0}\Bigg\{\iint_{S_{cb}}[(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^s)\delta(\sigma_{ij}l_j)^a]ds$$

$$+\iint\limits_{S_{ab}}[(\dot{u}_i^b-\dot{u}_i^a)\delta(\sigma_{ij}l_j)^b]ds$$

$$-\iint\limits_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b]\delta(\dot{u}_i^a)ds\Big\}=0 \qquad (5.564)$$

3. 势能型边界元变分原理Ⅱ

在满足不可压缩条件下，在元素内部当位移速度、应变速度和应力函数满足方程(5.554～5.556)式；在元素边界上位移速度为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.565)式的位移速度、应变速度和应力函数为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iint\limits_{S_a\cap S_1}[(\dot{u}_i-\dot{u}_i^a)\delta\sigma_{ij}l_j+(P_i-\sigma_{ij}l_j)\delta\dot{u}_i^a]ds$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_2}[(\dot{u}_i-\overline{\dot{u}_i})\delta(\sigma_{ij}l_j)]ds\Big\}$$

$$+\sum_{S_{ab}}^{S_0}\Big\{\iint\limits_{S_{ab}}[(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i)\delta(\sigma_{ij}l_j)^a]ds$$

$$+\iint\limits_{S_{ab}}[(\dot{u}_i^b-\dot{u}_i^a)\delta(\sigma_{ij}l_j)^b]ds$$

$$-\iint\limits_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b]\delta\dot{u}_i^a ds\Big\}=0 \qquad (5.563)$$

上述变分原理的证明与前节相似，故在此从略。

5.6.4 势能型修正变分原理Ⅳ

基于广义变分原理的泛函(4.500)式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数具有：

(1) 在元素内部应变速度与位移速度为独立变量函数；

(2) 在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数；

(3) 满足不可压缩条件时，

则使泛函(5.566)式实现驻值条件的位移速度、应变速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{ca-4}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Big[\frac{1}{1+\mu}2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-\overline{F}_i\dot{u}_i\\
&-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}\Big(\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\Big)\Big]\mathrm{d}v\\
&-\iint_{S_a}2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j(\dot{u}_i-\dot{u}_i^a)\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_a\cap S_1}\overline{P}_i\dot{u}_i^a\,\mathrm{d}s\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{5.566}
$$

证明： 在驻值条件下，由泛函(5.566)式得

$$
\begin{aligned}
\delta M_{ca-4}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Big[-\Big(\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\Big)\delta(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})\\
&-((2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+F_i)\,\delta\dot{u}_i\Big]\mathrm{d}v\\
&-\iint_{S_a\cap S_1}\Big[(\dot{u}_i-\dot{u}_i^a)\delta(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)\\
&+(\overline{P}_i-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)\delta\,\dot{u}_i^a\Big]\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_a\cap S_2}[(\dot{u}_i-\overline{\dot{u}_i})\delta(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)]\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$-\sum_{S_{ab}}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}[(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^s)\delta(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^a\right.$$

$$+(\dot{u}_i^b-\dot{u}_i^s)\delta(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^b$$

$$\left.-((2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^a+(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^b)\delta\dot{u}_i^s]\mathrm{d}s\right\}=0$$

(5.567)

由于$\delta\dot{u}_i$，$\delta\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\delta\dot{u}_i^s$为相互无关且为任意函数，根据变分法基本引理得

$$\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.568)$$

$$(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\overline{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.569)$$

$$\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^s=0 \qquad (S_1),(S_{ab}) \quad (5.570)$$

$$\dot{u}_i^b-\dot{u}_i^s=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.571)$$

$$(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^a+(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.572)$$

$$\overline{P}_i-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j=0 \qquad (S_1) \quad (5.573)$$

$$\dot{u}_i-\overline{\dot{u}}_i=0 \qquad (S_2) \quad (5.574)$$

由上述可知，泛函(5.566)式的变分条件、一般约束条件(应力函数与应变速度的关系式）及不可压缩条件正是稳定蠕变流动理论的全部方程及条件。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理Ⅳ

在满足不可压缩条件下，若在元素内部应变速度与位移速度为独立变量函数；在元素边界上位移速度为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.566)式实现驻值条件的应变速度、位移速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

3. 势能型边界元变分原理Ⅳ

在满足不可压缩条件下，若在元素内部待解函数满足方程(5.554)式、(5.568)、(5.569)式；在元素边界上位移速度为独立

构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.575) 式的应变速度、位移速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}[(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)\right.$$
$$+(\overline{P}_i-2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)\delta\dot{u}_i^s]\mathrm{d}s$$
$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}[(\dot{u}_i-\overline{\dot{u}_i})\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)]\mathrm{d}s\right\}$$
$$+\sum_{S_{ab}}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}[(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^s)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)^a]\mathrm{d}s\right.$$
$$+(\dot{u}_i^b-\dot{u}_i^s)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)^b$$
$$\left.-((2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)^a+(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)^b)\delta u_i^s]\mathrm{d}s\right\}=0$$

(5.575)

4. 势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅳ

在满足不可压缩条件下，在元素内部当应变速度、位移速度为独立变量函数，在元素边界上应变速度为连续函数，而位移速度为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.567) 式的应变速度、位移速度为稳定蠕变理论问题的近似解。

5.6.5 势能型修正变分原理V

基于广义变分原理的泛函(4.507)式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当构造的待解函数具备下列条件：

(1) 在元素内部，应变速度与位移速度满足(5.555)式；

(2) 在元素边界上，位移速度为独立构造的边界函数；

(3) 满足不可压缩条件时，

则使泛函(5.576)式实现驻值条件的应变速度、位移速度、应力函数为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$M_{ca-5}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{1}{1+\mu}(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})\dot{\varepsilon}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\right]dv\right.$$

$$-\iint_{S_a}\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)ds$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i^s ds\right\} \tag{5.576}$$

证明：由于泛函(5.576)式的变分问题是一个条件变分问题，利用拉氏乘子法，求得拉氏乘子为

$$\lambda_{ij}=-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}) \tag{5.577}$$

于是得到

$$\delta M_{ca-5}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\left(\frac{1}{1+\mu}\right)(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})\delta\dot{\varepsilon}_{ij}\right.\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i\right)\delta\dot{u}_i\right]dv$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)\delta\left(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}\right)l_j\right.$$

$$\left.+\left(\bar{P}_i-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j\right)\delta\dot{u}_i^s\right]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)\delta\left(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}\Big)l_j\Big]ds\Big\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}\Big[(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^s)\delta\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}l_j$$

$$+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}l_j\Big)^a\Big]ds$$

$$+\iint_{S_{ab}}\Big[(\dot{u}_i^b-\dot{u}_i^s)\ \delta\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}l_j$$

$$+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}l_j\Big)^b\Big]ds$$

$$-\iint_{S_{ab}}\Big[\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}l_j+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}l_j\Big)^a$$

$$+\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}l_j+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}l_j\Big)^b\Big]\delta\dot{u}_i^s ds\Big\}=0$$

$$(5.578)$$

根据确定拉氏乘子的原则与变分法基本引理得

$$\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij}=0 \qquad (V_a) \quad (5.579)$$

$$\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\overline{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.580)$$

$$\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^s=0 \qquad (S_{ab}),(S_1) \quad (5.581)$$

$$\dot{u}_i^b-\dot{u}_i^s=0 \qquad (5.582)$$

$$\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}l_j+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}l_j\Big)^a$$

$$=\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}l_j+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}l_j\Big)^b \qquad (5.583)$$

$$p_i-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})l_j=0 \qquad (S_1) \quad (5.584)$$

$$\dot{u}_i-\overline{\dot{u}_i}=0 \tag{5.585}$$

由上述可知，泛函(5.576)式的变分条件、变分约束条件和不可压缩条件正是稳定蠕变流动理论问题应满足的全部方程及条件。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理V

在满足不可压缩条件下，若在元素内部位移速度与应变速度满足(5.555)式；在元素边界上位移速度为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.576)式实现驻值条件的位移速度、应变速度和应力函数为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

3. 势能型边界元变分原理V

在满足不可压缩条件下，若在元素内部待解函数满足(5.554～5.556)式；在元素边界上独立构造位移速度为边界函数时，则满足边界变分方程(5.586)式的位移速度、应变速度、应力函数为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}\left[(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)\delta\left(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}\right)l_j\right.\right.$$

$$\left.+\left(\overline{P}_i-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j\right)\delta\dot{u}_i^s\right]ds$$

$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}\left[(\dot{u}_i-\overline{\dot{u}}_i)\delta\left(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}l_j+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j\right)\right]ds\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^s)\,\delta\left(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}l_j+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j\right)^a\right.\right.$$

$$\left.+(\dot{u}_i^b-\dot{u}_i^s)\delta\left(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}l_j+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j\right)^b\right]ds$$

$$-\iint_{S_{ab}}\left[\left(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}l_j+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j\right)^a\right.$$

$$+\left(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}l_j+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j\right)^b\Big]\delta\dot{u}_i^a ds\Big\}=0$$

(5.586)

4. 势能型加权余数（广义伽略金）方程V

在满足不可压缩条件下，若在元素内部位移速度与应变速度满足(5.555) 式；在元素边界上位移速度为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.578) 式的位移速度、应变速度、应力函数为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

5.6.6 余能型修正变分原理 I

基于古典变分原理的泛函(3.64)式，对固体系统进行几何剖分，采用分片构造待解函数，当在元素内部构造的待解函数不满足交界条件(5.540)式（或(5.541)式）时，为了保证合力连续性条件成立，采用拉氏乘子法，将变分约束条件(5.540) 式导入泛函(3.64) 式中，在泛函中增加了修正项，即

$$\iint_{S_{ab}}\lambda_i^a((\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b)ds \tag{5.587}$$

由此形成了余能型修正变分原理 I 的泛函。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数具备下列条件：

(1) 在元素内部，应力函数满足平衡方程(1.92) 式；

(2) 在边界上，满足力的边界条件(1.98)式；

(3) 在元素边界上合力连续性条件(5.540)式不必满足；

(4) 满足不可压缩条件时，

则使泛函(5.588) 式实现驻值条件的位移速度、应力函数为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$M_{cb-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}B(\sigma_{ij})\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_2}\overline{\dot{u}}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\iint_{S_{ab}}\lambda_i^s[(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b]\mathrm{d}s \qquad (5.588)$$

式中$B(\sigma_{ij})$为(1.102)式；λ_i^s为交界面S_{ab}上的拉氏乘子。

证明：在驻值条件下，考虑到泛函(5.588)式具有的变分约束条件(1.92)式，由泛函(5.588)式得

$$\delta M_{cb-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial(\sigma_{ij})}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right]\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}(\overline{\dot{u}}_i-\dot{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}((\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b)\delta\lambda_i^s\mathrm{d}s\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(\lambda_i^s-\dot{u}_i^a)\delta(\sigma_{ij}l_j)^a$$

$$\left.+(\lambda_i^s-\dot{u}_i^b)\delta(\sigma_{ij}l_j)^b]\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (5.589)$$

根据确定拉氏乘子的原则与变分法基本引理得

$$\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0 \qquad (V_a) \qquad (5.590)$$

$$\overline{\dot{u}}_i-\dot{u}_i=0 \qquad (S_2) \qquad (5.591)$$

$$\lambda_i^s-\dot{u}_i^a=0 \qquad (S_{ab}) \qquad (5.592)$$

$$\lambda_i^s-\dot{u}_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \qquad (5.593)$$

$$(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b=0 \qquad (S_{ab}) \qquad (5.594)$$

由上述可知，泛函(5.588)式的变分条件、变分约束条件(平衡方程与力的边界条件）和一般约束条件（应力应变速度关系）

正是待解函数应满足的稳定蠕变流动理论的全部方程及条件。证毕。

2. 余能型有限元修正变分原理Ⅰ

(1) 在满足不可压缩条件下，若在元素内部应力函数满足平衡方程(1.92)式；在边界上满足力的边界条件(1.98)式；在元素交界面上导入独立参变量λ_i^r，则使泛函(5.588)式实现驻值条件的位移速度与应力函数为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

(2) 在满足不可压缩条件时，应力函数满足平衡方程(1.92)式和力的边界条件(1.98)式；在元素交界面上，令

$$\lambda_i^r = u_i^r$$

即构造的应力函数为独立的边界函数时，则使泛函(5.588)式实现驻值条件的位移速度、应力函数为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

5.6.7 余能型修正变分原理III

基于广义变分原理的广义泛函(4.550)式，采用分片构造待解函数，可以形成各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数具有下列条件：

(1) 在元素内部应力函数、应变速度、位移速度为独立变量函数；

(2) 在元素边界上位移速度、应力函数均为独立构造的边界函数；

(3) 满足不可压缩条件时，

则使泛函(5.595)式实现驻值条件的应力函数、应变速度、位移速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$M_{cb-2}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V}\left[\frac{1}{m}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}-\frac{1}{m(1+m)}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\sigma'_{ij}\right.\right.$$

$$\left.+\dot{u}_i((2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i)\right]dv$$

$$+\iint_{S_a}\dot{u}_i^s(P_i^s-2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)ds$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{\dot{u}}_iP_i^s ds\right\} \tag{5.595}$$

证明：在驻值条件下，由泛函(5.595)式得

$$\delta G_{cb-2}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{1}{m}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\delta\sigma'_{ij}\right.\right.$$

$$+\left(\frac{1}{m}\sigma'_{ij}-\mu(2g(H))u_{i,j}\right)\delta\dot{e}_{ij}$$

$$\left.+((2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i)\delta\dot{u}_i\right]dv$$

$$+\iint_{S_a}[(P_i^s-2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)\delta\dot{u}_i^s$$

$$+(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)]ds+\iint_{S_a\cap S_1}[(\bar{P}_i$$

$$-2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)\delta\dot{u}_i^s+(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}[(P_i^s-2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)\delta\dot{u}_i^s$$

$$\left.+(\dot{u}_i^s-\bar{\dot{u}}_i)\delta P_i^s+(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)]ds\right\}$$

$$=0 \tag{5.596}$$

式中在元素交界面上$\dot{u}_i^s\delta P_i^s$为相消项。

由于$\delta\dot{u}_i$，$\delta\dot{e}_{ij}$，$\delta\sigma'_{ij}$，δP_i^a，$\delta\dot{u}_i^a$为相互无关且为任意函数，根据变分法基本引理得

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0 \qquad (V_a) \quad (5.597)$$

$$\frac{1}{m}\sigma'_{ij}-\mu(2g(H)\dot{u}_{i,j})=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\dot{u}_{i,j}\right)$$

$$=\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.598)$$

$$(2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\overline{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.599)$$

$$\dot{u}_i-\dot{u}_i=0 \qquad (S_1),(S_2),(S_{ab}) \quad (5.600)$$

$$P_i^a-2g(H)\dot{e}_{ij}l_j=0 \qquad (S_2),(S_{ab}) \quad (5.601)$$

$$\overline{P}_i-2g(H)\dot{e}_{ij}l_j=0 \qquad (S_1) \quad (5.602)$$

$$\dot{u}_i^a-\overline{\dot{u}_i}=0 \qquad (S_2) \quad (5.603)$$

由上述分析可知，泛函(5.595)式的变分条件正是稳定蠕变流动理论的全部方程及条件。证毕。

2. 余能型有限元修正变分原理I

在满足不可压缩条件下，若在元素内部应力函数、应变速度、位移速度为独立变量函数；在元素边界上应力函数与位移速度为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.595)式实现驻值条件的位移速度、应变速度、应力函数为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

3. 余能型边界元变分原理I

在满足不可压缩条件下，若在元素内部待解函数满足方程(5.597～5.599)式；在元素边界上应力函数与位移速度为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.604)式的应力函数、位移速度、应变速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}[(P_i^a-2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)\delta\dot{u}_i^a\right.$$

$$+(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)]ds$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_1}[(\overline{P}_i-2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)\delta\dot{u}_i+(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)]ds$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_2}[(P_i^s-2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)\delta\dot{u}_i^s+(\dot{u}_i^s-\overline{\dot{u}_i})\delta P_i^s$$

$$+(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)]ds\Big\}=0 \tag{5.604}$$

4. 余能型加权余数（广义伽略金）方程 I

在满足不可压缩条件下，若在元素内部应力函数、应变速度、位移速度为独立变量函数；在元素边界上应力函数与位移速度为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.596)式的应力函数、应变速度、位移速度为稳定蠕变理论问题的近似解。

5.6.8 余能型修正变分原理III

基于广义变分原理的泛函(4.550)式，但不同于上节的分片构造的待解函数类，于是形成下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数具备下列条件：

(1) 在元素内部应力函数、应变速度、位移速度为独立变量函数；

(2) 在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数；

(3) 满足不可压缩条件时，

则使泛函(5.605)式实现驻值条件的应力函数、应变速度、位移速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$M_{cb-3}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{V_a}\left[\frac{1}{m}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}-\frac{1}{m(1+m)}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\sigma'_{ij}\right.\right.$$

$$+\dot{u}_i((2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i)\Big]dv$$

$$+\iint_{S_a}\dot{u}_i(P_i^s-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\overline{\dot{u}_i}P_i^s ds\Big\} \tag{5.605}$$

证明：在驻值条件下，由泛函(5.605)式得

$$\delta M_{cb-s}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[\frac{1}{m}\Big(\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\,\sigma'_{ij}\Big)\delta\sigma'_{ij}$$

$$+\Big(\frac{1}{m}\sigma'_{ij}-\mu(2g(H))\,u_{i,j}\Big)\,\delta\dot{\varepsilon}_{ij}$$

$$+((2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i)\delta\dot{u}_i\Big]dv$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[(\bar{P}_i-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)\delta\dot{u}_i]\,ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}[(P_i^s-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)\delta\dot{u}_i$$

$$+(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)\delta P_i^s]ds\Big\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}[(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^a-P_i^s]\delta\dot{u}_i^a ds$$

$$-\iint_{S_{ab}}[(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^b-P_i^s]\delta\dot{u}_i^b ds$$

$$-\iint_{S_{ab}}[(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b)\delta P_i^s]\,ds\Big\}=0 \tag{5.606}$$

由于$\delta\dot{u}_i$，$\delta\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\delta\sigma'_{ij}$，$\delta P_i^s$为相互无关且为任意函数，根据

变分法基本引理得

$$\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0 \qquad (V_a) \quad (5.607)$$

$$\frac{1}{m}(\sigma'_{ij}-\mu(2g(H)\dot{u}_{i,j})=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\dot{u}_{i,j}\right)$$

$$=\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.608)$$

其中

$$\mu=\frac{1}{m},\ f(T)g(H)=1$$

$$(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i=\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (5.609)$$

式中略去弹性变形及$\dot{\varepsilon}_{ii}=\dot{u}_{i,i}=0$。

$$(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^a-P_i^s=0 \qquad (S_2),(S_{ab}) \quad (5.610)$$

$$(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^b-P_i^s=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.611)$$

$$\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.612)$$

$$\bar{P}_i-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j=0 \qquad (S_1) \quad (5.613)$$

$$\dot{u}_i-\overline{\dot{u}_i}=0 \qquad (S_2) \quad (5.614)$$

由上述可知，泛函(5.605)式的变分条件正是稳定蠕变流动理论的全部方程及条件。证毕。

2. 余能型有限元修正变分原理Ⅱ

在满足不可压缩条件下，若在元素内部位移速度、应变速度、应力函数为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.605)式实现驻值条件的位移速度、应变速度、应力函数为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

3. 余能型边界元变分原理Ⅱ

在满足不可压缩条件下，若在元素内部待解函数满足(5.607～5.609)式；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.615)式的位移速度、应变速度、应力函数为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}[(\bar{P}_i-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)\delta\dot{u}_i]ds\right.$$

$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}[(P_i^a-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)\delta\dot{u}_i+(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)\delta P_i^a]ds\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}[(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^a-P_i^s]\delta\dot{u}_i^a ds\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^b-P_i^s]\delta\dot{u}_i^b ds$$

$$\left.+\iint_{S_{ab}}[(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b)\delta P_i^s]\,ds\right\}=0 \qquad (5.615)$$

4．余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅱ

在满足不可压缩条件下，若在元素内部位移速度、应变速度、应力速度为独立变量函数，在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.606)式的位移速度、应变速度、应力函数为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

5.6.9　余能型修正变分原理IV

基于广义变分原理的泛函(4.557)式，采用分片构造待解函数，可以形成各类修正变分原理。

1．变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数具备下列条件：

(1) 应力函数与应变速度(5.607)式为一般约束条件条；

(2) 在元素边界上，应力函数为独立构造的边界函数；

(3) 满足不可压缩条件时，

则使泛函(5.617)式实现驻值条件的应力函数、位移速度为稳定

蠕变流动理论问题的近似解。

$$M_{cb-4}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{1}{1+m}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\sigma'_{ij}\right.\right.$$

$$\left.+\dot{u}_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\right]dv-\iint_{S_a}(\sigma_{ij}l_j-P_i^s)\dot{u}_i ds$$

$$\left.-\iint_{S_2}\overline{\dot{u}_i}P_i^s ds\right\} \tag{5.617}$$

证明：泛函(5.617)式的驻值条件为

$$\delta M_{cb-4}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right)\delta\sigma'_{ij}\right.\right.$$

$$\left.+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\ \delta\dot{u}_i\right]dv-\iint_{S_a\cap}\left[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta\dot{u}_i\right]ds$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(\sigma_{ij}l_j-P_i^s)\delta\dot{u}_i+(\bar{\dot{u}}-\dot{u}_i)\delta P_i^s\right]ds\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[(\sigma_{ij}l_j)^a-P_i^s\right]\delta\dot{u}_i^a ds\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}\left[(\sigma_{ij}l_j)^b-P_i^s\right]\delta\dot{u}_i^b ds$$

$$\left.-\iint_{S_{ab}}\left[(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b)\delta P_i^s\right]ds\right\}=0 \tag{5.618}$$

由于$\delta\dot{u}_i$，$\delta\sigma'_{ij}$，δP_i^s相互无关且为任意函数，根据变分法基本引理得

$$\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0 \qquad (V_a) \tag{5.619}$$

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \qquad (5.620)$$

$$(\sigma_{ij}l_j)^a-P_i^s=0 \qquad (S_{ab}),(S_2) \qquad (5.621)$$

$$(\sigma_{ij}l_j)^b-P_i^s=0 \qquad (S_{ab}) \qquad (5.622)$$

$$\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \qquad (5.623)$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \qquad (5.624)$$

$$\bar{\dot{u}}_i-\dot{u}_i=0 \qquad (S_2) \qquad (5.625)$$

由上述可知，泛函(5.617)式的变分条件与一般约束条件正是待解函数满足的稳定蠕变流动理论的全部方程及条件。证毕。

2．余能型有限元修正变分原理Ⅳ

在不可压缩条件下，若在元素内部位移速度、应力函数为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.617)式实现驻值条件的应力函数、位移速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

3．余能型边界元变分原理Ⅳ

在不可压缩条件下，若在元素内部待解函数满足(5.607～5.609)式；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足下面变分方程(5.626)式的应力函数、位移速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S\cap S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta\dot{u}_i]ds\right.$$

$$\left.+\iint_{S_1\cap S_2}[(\sigma_{ij}l_j-P_i^s)\delta\dot{u}_i+(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)\,\delta P_i^s]\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^a-P_i^s]\delta\dot{u}_i^a ds\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^b-P_i^s]\delta\dot{u}_i^b ds$$

$$-\iint_{S_{ab}}[(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b)\delta P_i^a]ds\Big\}=0 \qquad (5.626)$$

4. 余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅳ

在满足不可压缩条件下，若在元素内部应力函数、位移速度为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.618)式的应力函数、位移函数为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

5.6.10 余能型修正变分原理Ⅴ

基于广义变分原理的泛函(4.567)式，采用分片构造待解函数，可以建立各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数具备下列条件：

(1) 在元素内部应力函数满足平衡方程(5.599)式；

(2) 在元素边界上应变速度为独立构造的边界函数，并用其表示应力函数；

(3) 满足不可压缩条件时，

则使下面泛函(5.627)式实现驻值条件的应力函数、应变速度、位移速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$M_{cb-5}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[\frac{1}{m}\sigma'_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{m(1+m)}\Big(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big)\sigma'_{ij}\Big]dv$$

$$-\iint_{S_a}\dot{u}_i[\sigma_{ij}l_j-(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^s]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{\dot{u}}(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^s\,ds\Big\} \qquad (5.627)$$

证明： 由于泛函(5.627)式具有变分约束条件(5.599)式，利用拉氏乘子法，确定拉氏乘子为 $\lambda_i=\dot{u}_i$，然后求得泛函(5.627)式的驻值条件为

$$\begin{aligned}
\delta M_{cb-5}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint\limits_{V_a}\Big[\frac{1}{m}\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big)\delta\sigma'_{ij}\\
&+\Big(\frac{1}{m}\sigma'_{ij}-2\mu g(H)\dot{u}_{i,j}\Big)\delta\dot{e}_{ij}\Big]\mathrm{d}v\\
&-\iint\limits_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta\dot{u}_i\mathrm{d}s\\
&-\iint\limits_{S_a\cap S_2}[(\sigma_{ij}l_j-(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)^s)\delta\dot{u}_i\\
&+(\bar{\dot{u}}_i-\dot{u}_i)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)^s]\,\mathrm{d}s\Bigg\}\\
&-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Bigg\{\iint\limits_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^a-(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)^s]\delta\dot{u}_i^a\mathrm{d}s\\
&+\iint\limits_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^b-(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)^s]\delta\dot{u}_i^b\mathrm{d}s\\
&-\iint\limits_{S_{ab}}[(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b)\delta(2g(H)\,\dot{e}_{ij}l_j)^s]\mathrm{d}s\Bigg\}=0
\end{aligned}$$

(5.628)

根据确定拉氏乘子的原则及变分法基本引理可得到

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0 \qquad (V_a) \quad (5.629)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sigma'_{ij}-2\mu g(H)\dot{u}_{i,j}&=\frac{1}{m}\Big(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\dot{u}_{i,j}\Big)\\
&=\frac{1}{m}\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\Big)=0 \qquad (V_a) \quad (5.630)
\end{aligned}$$

式中

$$\mu=\frac{1}{m},\quad f(T)g(H)=1$$

$$(\sigma_{ij}l_j)^a-(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^s=0 \qquad (S_2),(S_{ab}) \qquad (5.631)$$

$$(\sigma_{ij}l_j)^b-(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^s=0 \qquad (S_{ab}) \qquad (5.632)$$

$$\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b=0 \qquad (S_{ab}) \qquad (5.633)$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \qquad (5.634)$$

$$\overline{\dot{u}_i}-\dot{u}_i=0 \qquad (S_2) \qquad (5.635)$$

由上述可知，泛函(5.627)式的变分条件和变分约束条件正是待解函数应满足稳定蠕变流动理论问题的全部方程及条件。证毕。

2. 余能型有限元修正变分原理 V

在满足不可压缩条件下，若在元素内部应力函数满足平衡方程(5.599) 式；在元素边界上应变速度为独立构造的边界函数时，则使泛函 (5.627)式实现驻值条件的应力函数、应变速度、位移速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

3. 余能型边界元变分原理 V

在满足不可压缩条件下，若在元素内部待解函数满足(5.599)式和(5.629)、(5.630) 式；在元素边界上应变速度为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.636)式的应力函数、应变速度、位移速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}l_j)-\bar{P}_i]\delta\dot{u}_i\,ds\right.$$

$$+\iint_{S_2\cap S_2}[(\sigma_{ij}l_j-(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^s)\delta\dot{u}_i$$

$$\left.+(\overline{\dot{u}_i}-\dot{u}_i)\delta(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^s\,]ds\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{S_{ab}=1}^{S_h}\left\{\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^a-(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^s]\delta\dot{u}_i^a\mathrm{d}s\right.\\
&+\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^b-(2g(H)\ \dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^s]\delta\dot{u}_i^b\mathrm{d}s\\
&\left.-\iint_{S_{ab}}[(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b)\delta(2g(H)\ \dot{\varepsilon}_{ij}l_j)^s]\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (5.636)
\end{aligned}
$$

4. 余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅴ

在满足不可压缩条件下，若应力函数满足平衡方程(5.599)式；在元素边界上应变函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.628)式的应力函数、应变速度、位移速度为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

§5.7 有限变形蠕变理论的修正变分原理

在离散分析过程中，基于古典或广义变分原理的泛函的基础上，采用分片构造待解函数解决有限变形稳定蠕变流动理论问题时，待解函数在满足有限变形稳定蠕变流动理论的基本方程同时，还必须满足交界条件（或称为连续性条件）

5.7.1 势能型修正变分原理 I

基于古典变分原理的泛函(3.73)式，采用分片构造待解函数，当在元素内部构造的待解函数不满足位移连续性条件(5.637)式时，为了保证位移连续性条件成立，采用拉氏乘子法将变分约束条件(5.637)式导入泛函(3.73)式中，在泛函中增加了修正项，即

$$\iint_{S_{ab}} \lambda_i^a [\dot{u}_i^a - \dot{u}_i^b] \, ds \tag{5.640}$$

于是形成了下面修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数具备下列条件：

(1) 应变速度与位移速度满足条件(1.105)式；

(2) 在边界上满足位移边界条件(1.111)式；

(3) 在元素边界上，位移速度连续性条件不必满足；

(4) 满足不可压缩性条件时，

则使泛函(5.641)式实现驻值条件的位移速度、应变速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$M_{nca-1} = \sum_{a=1}^{M} \left\{ \iiint_{V_a} \left[A(\dot{e}_{ij}) - F_i \dot{u}_i \right] dv - \iint_{S_a \cap S_1} \bar{P}_i \dot{u}_i ds \right\}$$

$$- \sum_{S_{ab}=1}^{S_0} \iint_{S_{ab}} \lambda_i^a [\dot{u}_i^a - \dot{u}_i^b] ds \tag{5.641}$$

其中$A(\dot{e}_{ij})$为(1.113)式。

证明：

当(1.105)、(1.111)和(1.100)式为变分约束条件时，泛函

(5.641)式的驻值条件为

$$\delta M_{nca-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}-\left[\left(\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial\dot{e}_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}\right.\right.$$

$$\left.+\bar{F}_k\right]\delta\dot{u}_k\mathrm{d}v+\iint_{S_a\cap S_1}\left[\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial\dot{e}_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right.$$

$$\left.\left.-\bar{P}_k\right]\delta\dot{u}_k\mathrm{d}s\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[\lambda_k^s-\left(\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial\dot{e}_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)^a\right]\right.$$

$$\cdot\delta u_k^a\,\mathrm{d}s+\iint_{S_{ab}}\left[\lambda_k^s+\left(\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial\dot{e}_{ij}}(\delta_{ki}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+u_{k,i})l_j\right)^b\right]\delta u_k^b\mathrm{d}s+(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b)\delta\lambda_i^s\right]\mathrm{d}s\Big\}=0\quad(5.642)$$

其中

$$\delta u_i=0$$

由于$\delta\dot{u}_i^a$，$\delta\dot{u}_i^b$，$\delta\lambda_i$相互无关且为任意函数，根据变分法基本引理得

$$\left[\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial\dot{e}_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k$$

$$=[2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})]_{,j}+\bar{F}_k$$

$$=[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})]_{,j}+\bar{F}_k=0\qquad(5.643)$$

式中$\dot{e}_{ii}=\dot{u}_{i,i}=0$，并略去弹性变形。

$$\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b=0\qquad(S_{ab})\quad(5.644)$$

$$\lambda_i^s-\left[\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial\dot{e}_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]^a=0\qquad(S_{ab})\quad(5.645)$$

$$\lambda_i^a+\left[\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial \dot{e}_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.646)$$

$$\bar{P}_i-\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial \dot{e}_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \qquad (S_1) \quad (5.647)$$

由上述可知，泛函(5.641)式的变分条件、变分约束条件、一般约束条件和不可压缩条件正是待解函数应满足的有限变形稳定蠕变流动理论问题的全部方程和条件。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理 I

(1) 满足不可压缩条件，若在元素内部应变速度与位移速度满足(1.105)式；在边界上满足位移边界条件(1.111)式；在元素边界上引入独立参变量λ_i^a时，则使泛函(5.641)式实现驻值条件的位移速度、应变速度、λ_i^a为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

(2) 满足不可压缩条件，若待解函数满足(1.105)式和(1.111)式；在元素的交界面上，令

$$\lambda_b^a=\left[\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial \dot{e}_{ij}}(\delta_{ki}+u_{ki})l_j\right]^a \qquad (5.648)$$

即在元素交界面上用独立构造的应变函数表示应力函数时，则使泛函(5.641)式实现驻值条件的位移速度、应变速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

5.7.2 势能型修正变分原理 II

基于广义变分原理的泛函(4.596)式，采用分片构造待解函数，可以建立下面各类修正变分原理。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数具备下列条件：

(1) 应力函数、应变速度、位移速度在元素内部为独立变量函数；

(2) 在元素边界上位移速度与应力函数为独立构造的边界函数；

(3) 满足不可压缩条件时，

则使泛函(5.649)式实现驻值条件的应力函数、应变速度、位移速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$M_{nca-2}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{1}{1+\mu}(2g(H)\dot{e}_{ij})\dot{e}_{ij}-\bar{F}_k\dot{u}_k\right.\right.$$

$$-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})$$

$$\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\right)\right]\mathrm{d}v-\iint_{S_a}P_k^a(\dot{u}_k-\dot{u}_k^a)\,\mathrm{d}s$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_k\dot{u}_k^a\mathrm{d}s\right\} \tag{5.649}$$

证明：泛函(5.649)式的驻值条件为

$$\delta G_{nca-2}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{1+\mu}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\right)\delta\sigma'_{ij}$$

$$-\left(\left(\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}\right.$$

$$\left.+F_k\right)\delta\dot{u}_k-\frac{1}{1+\mu}\left(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij}\right.$$

$$+\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\right)(2\mu^2g(H))\,\delta\dot{e}_{ij}\right]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a}\left[(\dot{u}_i-\dot{u}_i^s)\,\delta P_i^s+\left(P_k^s-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\mu g(H)\,\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)\delta\dot{u}_k\right]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[(\dot{u}_k-\dot{u}_k^s)\delta P_k^s+(\bar{P}_k-P_k^s)\delta\dot{u}_k\right.$$

$$+\left(P_k^s-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})\right.$$

$$\left.\cdot(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\delta\dot{u}_k\right]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\delta P_i^s+\left(P_i^s-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})\,(\delta_{ki}+u_{k,i})\,l_j\right)\delta\dot{u}_k\right]ds\right\}=0$$

(5.650)

式中在元素交界面上$P_i^s\delta\dot{u}_i^s$为相消项；$\delta u_i=0$。

由于$\delta\sigma'_{ij}$，$\delta\dot{e}_{ij}$，$\delta\dot{u}_i$，δP_k^s，$\delta\dot{u}_i^s$为相互无关且为任意函数，根据变分法基本引理得

$$\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij}=0 \qquad (V_a) \quad (5.651)$$

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}=0$$

$$(V_a) \quad (5.652)$$

$$\left[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k=0$$

$$(V_a) \quad (5.653)$$

$$\dot{u}_i-\dot{u}_i^s=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.654)$$

$$P_k^s-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0$$

$$(S_1),(S_2),(S_{ab}) \quad (5.655)$$

$$\bar{P}_k - P_k^s = 0 \qquad (S_1) \quad (5.656)$$

$$\dot{u}_k - \bar{\dot{u}}_k = 0 \qquad (S_2) \quad (5.657)$$

由上述分析可知，泛函(5.649)式的变分条件正是有限变形稳定蠕变流动理论问题的全部方程和条件。证毕。

2. 势能型有限元修正变分原理 I

满足不可压缩条件，若在元素内部应力函数、应变速度、位移速度为独立变量函数；在元素边界上应力函数、位移速度为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.649)式实现驻值条件的应力函数、位移速度、应变速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

3. 势能型边界元变分原理 I

满足不可压缩条件，若在元素内部待解函数满足(5.651～5.653)式；在元素边界上应力函数与位移速度为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.658)式的应力函数、应变速度、位移速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iint_{S_a}\Big[(\dot{u}_k-\dot{u}_k^s)\delta P_k^s+\Big(P_k^s-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})$$

$$\cdot(\delta_{ki}+u_{k,i})\,l_j\Big)\delta\,\dot{u}_k\Big]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\Big[(\dot{u}_k-\dot{u}_k^s)\delta P_k^s+(\bar{P}_k-P_k^s)\delta\dot{u}_k^s$$

$$+\Big(P_k^s-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})\,l_i\Big)\,\delta\dot{u}_k\Big]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}\Big[(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\delta P_i^s+\Big(P_k^s-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})$$

$$\cdot(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big)\delta\dot{u}_k\Big]ds\Big\}=0 \qquad (5.658)$$

4. 势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅱ

满足不可压缩条件，若在元素内部应力函数、应变速度位移速度为独立变量函数；在元素边界上应力函数与位移速度为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.650)式的应力函数、应变速度、位移速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

5.7.3 势能型修正变分原理III

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，基于广义变分原理的泛函(4.596)式，采用分片构造待解函数，但在元素边界上应力函数为连续的，位移速度为独立构造的边界函数，于是得下面各类变分原理。

1. 势能型有限元修正变分原理Ⅰ

满足不可压缩条件，若在元素内部应力函数、应变速度、位移速度为独立变量函数；在元素边界上位移速度为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.659)式实现驻值条件的应力函数、应变速度、位移速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{nca-3}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{&\iiint_{V_a}\Big[\Big(\frac{1}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij}-\bar{F}_k\dot{u}_k\Big)\\
&-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}\\
&-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\Big)\Big]\mathrm{d}v\\
&-\iint_{S_a}\sigma_{ij}l_j(\delta_{ki}+u_{k,i})(\dot{u}_i-\dot{u}_i^*)\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i^*\mathrm{d}s\Big\}
\end{aligned}
\tag{5.659}
$$

2. 势能型加权余数（广义伽略金）方程 II

满足不可压缩条件，若在元素内部应力函数、应变速度、位移速度为独立变量函数；在元素边界上位移速度为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.660)式的应力函数、应变函数、位移函数为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[-\frac{1}{1+\mu}\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\\
&-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}\Big)\delta\sigma'\\
&-\Big(\Big(\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k\Big)\delta\dot{u}_k\\
&-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})\,\delta\dot{e}_{ij}\Big]dv\\
&-\iint_{S_a\cap S_1}[(\dot{u}_k-\dot{u}_k^s)\delta(\sigma_{ij}l_j(\delta_{ki}+u_{k,i}))\\
&+(\bar{P}_k-\sigma_{ij}l_j(\delta_{ki}+u_{k,i}))\delta\dot{u}_k^s]ds\\
&-\iint_{S_a\cap S_2}[(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\delta(\sigma_{ij}l_j(\delta_{ki}+u_{k,i}))]ds\Big\}\\
&-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}[(\dot{u}_i^a-\dot{u}_k^s)\delta(\sigma_{ij}l_j(\delta_{ki}+u_{k,i}))^a\\
&+(\dot{u}_i^b-\dot{u}_i^s)\delta(\sigma_{ij}l_j(\delta_{ki}+u_{k,i}))^b\\
&-((\sigma_{ij}l_j(\delta_{ki}+u_{k,i}))^a+(\sigma_{ij}l_j(\delta_{ki}+u_{k,i}))^b)\delta\dot{u}_k^s]ds\Big\}=0
\end{aligned}
\tag{5.660}
$$

3. 势能型边界元变分原理 II

满足不可压缩条件，若在元素内部应力函数、应变速度、位移速度满足(5.651～5.653)式；在元素边界上位移速度为独立构

造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.661)式的应力函数、应变函数、位移函数为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iint_{S_a\cap S_1}\Big[(\dot{u}_k-\dot{u}_k^s)\delta(\sigma_{ij}l_j(\delta_{ki}+u_{k,i}))$$

$$+(\bar{P}_k-\sigma_{ij}l_j(\delta_{ki}+u_{k,i}))\delta\dot{u}_k^s\Big]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}\Big[(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\delta(\sigma_{ij}l_j(\delta_{ki}+u_{k,i}))\Big]ds\Bigg\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Bigg\{\iint_{S_{ab}}\Big[(\dot{u}_k^a-\dot{u}_k^s)\delta(\sigma_{ij}l_j(\delta_{ki}+u_{k,i}))^a$$

$$+(\dot{u}_k^b-\dot{u}_k^s)\delta(\sigma_{ij}l_j(\delta_{ki}+u_{k,i}))^b$$

$$-((\sigma_{ij}l_j+(\delta_{ki}+u_{k,i}))^a$$

$$+(\sigma_{ij}l_j(\delta_{ki}+u_{k,i}))^b)\,\delta\dot{u}_k^s\Big]ds\Bigg\}=0 \tag{5.661}$$

上述原理的证明与前类似，在此证明从略。

5.7.4 势能型修正变分原理Ⅳ

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成为有限个元素之和，基于广义变分原理的泛函(4.534)式，采用分片构造待解函数，在元素边界上独立构造位移速度为边界函数时，于是形成下面各类修正变分原理。

1. 势能型有限元修正变分原理Ⅳ

满足不可压缩条件，若在元素内部应变速度与位移速度为独立变量函数；在元素边界上位移速度为独立构造的边界函数时，则使下面泛函(5.662)式实现驻值条件的应变速度、位移速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$M_{nca-4}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{1}{1+\mu}(2g(H)\dot{e}_{ij})\dot{e}_{ij}-\bar{F}_k\dot{u}_k\right.\right.$$

$$-2g(H)\,\dot{e}_{ij}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\right)\right]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a}[(2g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\dot{u}_k-\dot{u}_k^s)]\mathrm{d}s$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_k\dot{u}_k^s\mathrm{d}s\right\}\qquad(5.662)$$

2. 势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅳ

满足不可压缩条件，若在元素内部应变速度、位移速度为独立变量函数；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.663)式的应变速度、位移速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\right)\right.\right.$$

$$\left.\delta(2g(H)\dot{e}_{ij})-((2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}+\bar{F}_k)\,\delta\dot{u}_k\right]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}[(\dot{u}_k-\dot{u}_k^s)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)$$

$$+(\bar{P}_k-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\delta\dot{u}_k^s]\mathrm{d}s$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}[(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij})(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]\mathrm{d}s\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}[(\dot{u}_k^a-\dot{u}_k^s)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a]\mathrm{d}s\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(\dot{u}_k^b-\dot{u}_k^*)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b]ds$$

$$-\iint_{S_{ab}}[(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a$$

$$+(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b]\delta\dot{u}_k^*ds\Big\}=0 \tag{5.663}$$

3. 势能型边界元变分原理Ⅳ

满足不可压缩条件，若在元素内部待解函数满足(5.651～5.653)式；在元素边界上位移速度为独立构造的边界函数时，则满足下面边界变分方程(5.664)式的应变速度、位移速度为有限变形蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iint_{S_a\cap S_1}[(\dot{u}_k-\dot{u}_k^*)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)$$

$$+(\bar{P}_k-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\delta\dot{u}_k^*]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}[(\dot{u}_k-\overline{\dot{u}}_k)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]ds\Big\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}\Big[(\dot{u}_k^a-\dot{u}_k^*)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a\Big]ds$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(\dot{u}_k^b-\dot{u}_k^*)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b]ds$$

$$-\iint_{S_{ab}}[(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a+(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}$$

$$+u_{k,i})l_j)^b]\delta\dot{u}_k^*ds\Big\}=0 \tag{5.664}$$

上述变分原理的证明与前述类同在此从略。

5.7.5 余能型修正变分原理 I

基于古典变分原理的泛函(3.79)式，对固体系统进行几何剖分，采用分片构造待解函数，当待解函数在元素边界上不满足交界条件(5.638)式(或(5.639)式)时，为了保证合力连续性条件成立，采用拉氏乘子法，将变分约束条件导入泛函(3.79)式中，则在泛函中增加了修正项，即

$$\iint_{S_a} \lambda_k^* \{[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]^a + [\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]^b\} ds \tag{5.665}$$

于是形成了余能型修正变分原理 I 的泛函。

1. 变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数具备下列条件：

(1) 在元素内部应力函数满足平衡方程(1.104)式；

(2) 在边界上满足力的边界条件(1.110)式；

(3) 在元素边界上合力连续性条件不必满足；

(4) 满足不可压缩条件时，

则使泛函(5.666)式实现驻值条件的应力函数、位移速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$M_{nob-1} = \sum_{a=1}^{M} \left\{ \iiint_{V_a} B(\sigma_{ij}) dv - \iint_{S_a \cap S_2} \bar{u}_k \sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}) l_j ds \right\}$$
$$- \sum_{S_{ab}=1}^{S_0} \iint_{S_{ab}} \lambda_k^* [(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a$$
$$+ (\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b] ds \tag{5.666}$$

式中 $B(\sigma_{ij})$ 为(1.114)式；λ_k^* 为交界面上的拉氏乘子。

证明：在变分约束条件(1.104) 式的条件下，由泛函(5.666)式实现驻值条件，于是得

$$\delta M_{acb-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial(\sigma_{ij})}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\right]\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\,l_j)\mathrm{d}s\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}[(\lambda_k^s-\dot{u}_k^a)\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a\right.$$

$$+(\lambda_k^s-\dot{u}_k^b)\delta(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b$$

$$-((\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a+(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b)$$

$$\left.\delta\lambda_k^s\,]\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (5.667)$$

根据确定拉氏乘子的原则与变分法基本引理得

$$\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}\dot{u}_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}=0$$

$$(5.668)$$

$$\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k=0 \qquad (S_2) \quad (5.669)$$

$$\lambda_k^s-\dot{u}_k^a=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.670)$$

$$\lambda_k^s-\dot{u}_k^b=0 \qquad (S_{ab}) \quad (5.671)$$

$$[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]^a+[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]^b=0$$

$$(S_{ab}) \quad (5.672)$$

综上所述，泛函(5.666)式的变分条件、变分约束条件(平衡方程与力的边界条件）和一般约束条件（应力应变速度关系）正是待解函数应满足的有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

2. **余能型有限元修正变分原理Ⅰ**

(1) 满足不可压缩条件，若在元素内部应力函数满足平衡方程(1.104)式；在边界上满足力的边界条件(1.110)式；在元素交界面上引入独立参变量λ_i^e，则使泛函(5.666)式实现驻值条件的位移速度与应力函数为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

(2) 满足不可压缩条件，若应力函数满足平衡方程(1.104)式、力的边界条件(1.110)式；在元素交界面上，令

$$\lambda_k^e = u_i^e$$

即构造应力函数为独立的边界函数时，则使泛函(5.666)式实现驻值条件的位移速度、应力函数为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

5.7.6 余能型修正变分原理Ⅱ

基于广义变分原理的广义泛函(4.654)式，采用分片构造待解函数，可以形成下面各类修正变分原理。

1. **变分问题**

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，并采用分片构造待解函数，当待解函数具备：

(1) 在元素内部应力函数、应变速度、位移速度为独立变量函数；

$$M_{ncb-2}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{1}{m}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}-\frac{1}{m(1+m)}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\sigma'_{ij}\right.\right.$$

$$\left.+\dot{u}_k((2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}+\bar{F}_k)\right]dv$$

$$+\iint_{S_a}\dot{u}_k^s[P_k^s-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]ds$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{\dot{u}}_k p_k^s ds\right\} \tag{5.673}$$

证明：泛函(5.673) 式的驻值条件为

$$\delta M_{ncb-2}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{1}{m}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\ \sigma'_{ij}\right)\delta\sigma'_{ij}\right.\right.$$

$$+\left(\frac{1}{m}\sigma'_{ij}-\left(\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\right)2\mu g(H)\right)\delta\dot{e}_{ij}$$

$$\left.+((2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}+\bar{F}_k)\ \delta\dot{u}_k\right]dv$$

$$+\iint_{S_a}[(P_k^s-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\delta\dot{u}_k^s$$

$$+(\dot{u}_k-\dot{u}_k^s)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[(\bar{P}_k-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\delta\dot{u}_k^s$$

$$+(\dot{u}_k-\dot{u}_k^s)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}[(P_k^s-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\delta\dot{u}_k^s$$

$$+(\dot{u}_k^s-\overline{\dot{u}_k})\delta P_k^s+(\dot{u}_k-\dot{u}_k^s)$$

$$\left.\cdot\,\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (5.674)$$

式中在元素交界面上$\dot{u}_i^s\delta P_i^s$为相消项。

由于$\delta\dot{u}_i$，$\delta\dot{e}_{ij}$，$\delta\sigma'_{ij}$，δP_k^s，$\delta\dot{u}_k^s$（$\delta u_i=0$）为相互无关且为任意函数，根据变分法基本引理得

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0 \qquad (V_a) \quad (5.675)$$

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}\dot{u}_{k,j}-\frac{1}{2}u_{k,j}\dot{u}_{k,i}=0 \qquad (V_a) \quad (5.676)$$

其中

$$\mu=\frac{1}{m},\ f(T)g(H)=1$$

$$[2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})]_{,j}+\bar{F}_k=0 \qquad (V_a) \quad (5.677)$$

$$\dot{u}_k-\dot{u}_k^s=0 \qquad (S_1),(S_2),(S_{ab}) \quad (5.678)$$

$$P_k^s-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \quad (S_2),(S_{ab}) \quad (5.679)$$

$$\bar{P}_k-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=0 \qquad (S_1) \quad (5.680)$$

$$\dot{u}_k^s-\overline{\dot{u}}_k=0 \qquad (S_2) \quad (5.681)$$

由上述分析可知，泛函(5.673)式的变分条件正是待解函数应满足的有限变形稳定蠕变流动理论问题的全部方程及条件。证毕。

2. 余能型有限元修正变分原理Ⅰ

满足不可压缩条件，若在元素内部应力函数、应变速度、位移速度为独立变量函数；在元素边界上应力函数与位移速度为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.673)式实现驻值条件的应力函数、应变速度、位移速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

3. 余能型边界元变分原理Ⅰ

满足不可压缩条件，在元素内部待解函数满足(5.675～5.677)式；在元素边界上应力函数和位移速度为独立构造的边界函数时，则满足下面边界变分方程(5.682)式的应力函数、应变速度、位移速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}[(P_k^*-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\delta\dot{u}_i^*\right.$$

$$+(\dot{u}_k-\dot{u}_k^*)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[(\bar{P}_k-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\delta\dot{u}_i^*$$

$$+(\dot{u}_k-\dot{u}_k^*)\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}[(P_k^*-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\delta\dot{u}_k^*$$

$$+(\dot{u}_k^*-\overline{\dot{u}_k})\delta P_k^*+(\dot{u}_k-\dot{u}_k^*)$$

$$\left.\cdot\delta(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)]ds\right\}=0 \qquad (5.682)$$

4. 余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅰ

满足不可压缩条件，若在元素内部应力函数、应变速度、位移速度为独立变量函数；在元素边界上应力函数与位移速度为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.674)式的应力函数、应变速度、位移速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

5.7.7 余能型修正变分原理III

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，基于广义变分原理的泛函(4.654)式，采用分片构造待解函

数，但在元素边界上位移速度为连续函数、应力函数为独立构造的边界函数时，可得下面各类变分原理。

1. 余能型有限元修正变分原理Ⅱ

满足不可压缩条件，当应力函数、应变速度、位移速度为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.683)式实现驻值条件的应力函数、应变速度、位移速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
M_{nca-3}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint\limits_{V_a}\Big[\frac{1}{m}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}-\frac{1}{m(1+m)}\Big(\frac{1}{2}f(T)\,\sigma'_{ij}\Big)\sigma'_{ij}\\
&+\dot{u}_k((2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})),_j+\bar{F}_k)\Big]dv\\
&+\iint\limits_{S_a}\dot{u}_k[P_k^*-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]ds\\
&-\iint\limits_{S_a\cap S_2}\bar{\dot{u}}_kP_k^*ds\Bigg\}
\end{aligned}
\qquad (5.683)
$$

2. 余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅱ

满足不可压缩条件，若在元素内部应力函数、应变速度、位移速度为独立变量函数，在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足下面变分方程(5.684)式的应力函数、应变速度、位移速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint\limits_{V_a}\Big[\frac{1}{m}\Big(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\Big)\delta\sigma'_{ij}\\
&+\Big(\frac{1}{m}\sigma'_{ij}-2\mu g(H)\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)\delta\dot{e}_{ij}\\
&+((2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})),_j+\bar{F}_k)\,\delta\dot{u}_k\Big]dv
\end{aligned}
$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_1}[(\bar{P}_k-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\delta\dot{u}_k]ds$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_2}[(P_k^s-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\delta\dot{u}_k$$

$$\left.+(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\delta P_k^s]\,ds\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint\limits_{S_{ab}}[P_k^s-(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a]\delta\dot{u}_k^a ds\right.$$

$$+\iint\limits_{S_{ab}}[P_k^s-(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b\,]\delta\dot{u}_k^b ds$$

$$\left.+\iint\limits_{S_{ab}}[(\dot{u}_k^a-\dot{u}_k^b)\,\delta P_k^s]ds\right\}=0 \qquad (5.684)$$

3. 余能型边界元变分原理 II

满足不可压缩条件，若在元素内部待解函数满足方程(5.675～5.677) 式；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(5.685)式的应力函数、应变速度、位移速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint\limits_{S_a\cap S_1}[\bar{P}_k-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]\delta\dot{u}_k ds\right.$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_2}[(P_k^s-2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)\delta\dot{u}_k$$

$$\left.+(\dot{u}_k-\bar{\dot{u}}_k)\delta P_k^s]ds\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint\limits_{S_{ab}}[P_i^s-(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a]\delta\dot{u}_i^a ds\right.$$

$$+\iint\limits_{S_{ab}}[P_i^a-(2g(H)\dot{e}_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\,l_j)^b]\delta\dot{u}_i^a\mathrm{d}s$$

$$+\iint\limits_{S_{ab}}[(\dot{u}_k^a-\dot{u}_k^b)\delta P_k^a]\mathrm{d}s\Bigg\}=0 \qquad (5.685)$$

上述原理的证明与前类同，在此证明从略。

5.7.8 余能型修正变分原理Ⅳ

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，基于广义变分原理的泛函(4.661)式，采用分片构造待解函数，若在元素边界上独立构造应力函数为边界函数时，可形成下面各类修正变分原理。

1. 余能型有限元修正变分原理Ⅳ

满足不可压缩条件，若在元素内部应力函数与位移速度为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则使泛函(5.686)式实现驻值条件的应力函数、位移速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$M_{mcb-4}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint\limits_{V_a}\Big[\frac{1}{1+m}\Big(\frac{1}{2}f(T_e)\sigma'_{ij}\Big)\sigma'_{ij}$$

$$+\dot{u}_k((\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}+\bar{F}_k)\Big]\mathrm{d}v$$

$$-\iint\limits_{S_a}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\,l_j-P_k^a]\dot{u}_k\mathrm{d}s$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_2}\bar{\dot{u}}_kP_k^a\,\mathrm{d}s\Bigg\} \qquad (5.686)$$

2. 余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅳ

满足不可压缩条件，若应力函数、位移速度为独立变量函

数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(5.687)式的应力函数、位移速度为有限变形稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\dot{u}_{k,j}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)\delta\sigma'_{ij}\right.\right.$$

$$\left.+((\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})),_j+\bar{F}_k)\delta\dot{u}_k\right]dv$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]\delta\dot{u}_k ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}[(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-P_k^s)\delta\dot{u}_k$$

$$\left.+(\bar{\dot{u}}_k-\dot{u}_k)\delta P_k^s]ds\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a-P_k^s]\delta\dot{u}_k^a ds\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b-P_k^s]\delta\dot{u}_k^b ds$$

$$\left.+\iint_{S_{ab}}(\dot{u}_k^a-\dot{u}_k^b)\delta P_k^s ds\right\}=0 \tag{5.687}$$

3．余能型边界元变分原理Ⅳ

满足不可压缩条件，若待解函数在元素内部满足(5.675～5.677)式，在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足下面边界变分方程(5.688)式的应力函数、位移速度为有限变形蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]\delta\dot{u}_k ds\right.$$

$$
+ \iint_{S_a \cap S_2} [(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j - P_k^s)\delta \dot{u}_k
$$

$$
+ (\bar{\dot{u}}_k - \dot{u}_k)\delta P_k^s] ds \Big\}
$$

$$
+ \sum_{S_{ab}=1}^{S_0} \Big\{ \iint_{S_{ab}} [(\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^a - P_k^s]\delta \dot{u}_k^a ds
$$

$$
+ \iint_{S_{ab}} [(\sigma_{ij}\delta_{ki}+u_{k,i})l_j)^b - P_k^s]\ \delta \dot{u}_k^b ds
$$

$$
+ \iint_{S_{ab}} [\dot{u}_k^a - \dot{u}_k^b]\delta P_k^s\ ds \Big\} = 0 \qquad (5.688)
$$

上述原理的证明与前类同，在此证明从略。

§5.8 结 论

修正变分原理是基于古典与广义变分原理的泛函的基础上，为保证待解函数在元素交界面上的连续性条件，采用拉氏乘子法导入修正项而形成的新型变分原理。

本章主要是基于三类（二类）独立变量函数的广义变分原理的泛函的基础上，建立了不同于已有的各类新型修正变分原理。

基于各种类型的修正变分原理，可以建立具有不同特点的可供选择的种种有限元与边界元新模式，为结构工程的数值分析提供理论基础。

参 考 文 献

1 钱伟长著．变分法及有限元．北京：科学出版社，1980

2 Pian T H H. Derivation of Element Stiffness Matrices) by Assumed stress Distribution, AIAA Journal, 1964, 2(7)

3 Pian T H H; Tong P. Basis of Finite Element Methods for Solid Contnua. Intenational Journal for Numerical Methods in Engineering, 1969, 1(1)

4 鹫津久一郎著．弹性和塑性力学中的变分方法；北京：科学出版社，1984

5 钱伟长著．广义变分原理．上海：知识出版社，1985

6 冯康．弹性结构的数学理论；北京：科学出版社，1981

7 胡海昌．弹性力学的变分原理及其应用；北京：科学出版社，1981

8 O. C. Zienkiewize; K. Morgam. Finte Elements and Approximation; John wiley & Sons, Ine, 1983（有中译本）

9 Jones R E. A Generalization of the Discrete-Stiffness Method of Struetural Analysis. AIAA Journal, 1964, 2(5)

10 Yamamoto Y. A Formulation of Matrix Displacement Method, Massachsetts Institute of Technology, 1966

11 Niu Xiang jun. Boundary Variational Principles of the Boundary Element Method. ICCM86—Tokyo, Japan, 1986

12 牛庠均，姚传玺．离散方法的数学原理——固体力学的离散分析．山东建筑工程学院学报，1990，5(2)

13 牛庠均．离散方程的数学原理——工程结构的离散分析．北京工业大学学报，1991，17(1)

14 牛庠均，姚传玺，蠕变理论的离散分析原理．北京工业大学学报，1991,17(2)

15 牛庠均．蠕变理论的有限变形广义变分原理．北京工业大学学报，1992，18(2)

第六章　可动边界变分原理

§6.1　概　述

6.1.1　可动边界的变分问题[1-3]

可动边界的变分问题是待解函数在可动边界上具有各种间断性的条件下，探讨能量泛函的变分问题。可动边界的变分问题具有两个特点，其一是泛函的积分域是变动的（待定的），在求泛函的变分时要考虑到泛函积分域变动的影响；为了具有广泛性，对固体系统进行几何剖分，划分成有限个元素，对每个元素而言，其边界是随着变形过程(或裂纹扩展)而变动的，因此元素的边界是可动边界，适用于对固体系统内部任意变动的界面的分析与研究；其二是在元素交界面上待解函数具有各种间断性，如待解函数本身或具有间断性(在裂纹或孔洞边界)，或为连续的函数类，或为函数本身及其一阶导数连续的函数类，或为具有更光滑的函数类。为了具有广泛性，采用分片构造待解函数，使待解函数在元素的交界面上具有不同类型的间断性。可动边界的变分原理就是基于上述两点建立起来的变分原理，许多实际问题的变分问题都是属于可动边界变分问题的范畴，如有限元法的变分原理实质上是属于可动边界的变分问题的范畴。因为元素边界是随着变形过程而变动，是可动边界；待解函数是分片构造，在元素交界面上待解函数具有各种不同的间断性。又如弹塑性体和接触问题的变分问题、裂纹扩展时能量失效量与失效率的分析与研究等等，都属于可动边界的变分问题的范畴。

所谓可动边界变分原理一般指在古典变分原理、广义变分原理，和修正变分原理的基础上，利用可动边界的变分理论建立解决实际问题的各种类型的原理。当略去边界可动性的影响时，可动边界的变分原理就退化为古典变分原理、广义变分原理，和修正变分原理。在不同条件下可以形成类型众多的可动边界变分原理。这里仅介绍具有典型性的原理，根据建立这些典型性原理的理论与方法，其它类型的原理自然可以建成。

6.1.2 可动界面的交界条件

当可动界面在固体内部时，待解函数在可动界面上应满足的条件称为界面交界条件，简称交界条件。当可动界面在固体整体边界上，由于考虑边界可动性的影响，待解函数应满足的条件称为附加边界条件。这与固定边界情况下的力的边界条件和位移边界条件是有区别的。交界条件与附加边界条件是利用可动边界的变分问题的理论，对能量泛函进行变分运算而获得的。它们是可动边界变分原理的部分变分条件。

6.1.3 坐标变换

为了分析可动边界的变分问题，下面对每个元素都取坐标变换，即

$$\xi_i = x_i + \alpha \delta x_i \tag{6.1}$$

其中 x_i 为固体元素各点的变形前坐标；ξ_i 为相应点的变形后坐标；δx_i 为坐标的改变量；α 为微小参量。当 $\alpha=0$ 时，上述变换为恒等变换。在上述变换条件下，把积分域 $V_\alpha(\xi_i)$ 变换成积分域 $V_\alpha(x_i)$（简写成 V_α）是一一对应的，变换是连续的且具有连续的偏导数，并设雅各比行列式 $J_t \neq 0$。由此，待解函数在变换(6.1)式时，可写为

$$u_i(\xi_i) = u_i(x_i) + \alpha \delta u_i \tag{6.2}$$

$$u_{i,j}(\xi_i)=u_{i,j}(x_i)+\alpha\delta u_{i,j}$$

当$\alpha=0$时，有

$$u_i(\xi_i)=u_i(x_i),\quad u_{i,j}(\xi_i),=u_{i,j}(x_i)$$

同时有

$$\delta x_i=\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha},\quad \delta u_i=\frac{\partial u_i(\xi_i)}{\partial \alpha}$$

$$\delta u_{i,j}=\frac{\delta u_{i,j}(\xi_i)}{\partial \alpha} \tag{6.3}$$

为了便于分析，现在引入其它符号，取

$$\left.\begin{aligned}\bar{\delta} u_i&=\frac{\partial u_i(x_i,\alpha)}{\partial \alpha}\\ \bar{\delta} u_{i,j}&=\frac{\partial u_{i,j}(x_i,\alpha)}{\partial \alpha}\end{aligned}\right. \tag{6.4}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{\bar{\delta}} u_i&=\frac{\partial u_i(\xi_i,\alpha)}{\partial x_j}\delta x_j=u_{i,j}\delta x_j\\ \bar{\bar{\delta}} u_{i,j}&=\frac{\partial u_{i,j}(\xi_i,\alpha)}{\partial x_k}\delta x_k=u_{i,j,k}\delta x_k\end{aligned}\right. \tag{6.5}$$

其中$\bar{\delta} u_i$和$\bar{\delta} u_{i,j}$表示坐标x_i固定时，仅由参量α的改变时而产生u_i中$u_{i,j}$的变分；而$\bar{\bar{\delta}} u_i$与$\bar{\bar{\delta}} u_{i,j}$则表示仅由于坐标$x_i$改变时产生的$u_i$和$u_{i,j}$的变分。

由此，方程(6.3)式可表示为

$$\left.\begin{aligned}\delta u_i&=\bar{\delta} u_i+\bar{\bar{\delta}} u_i=\bar{\delta} u_i+u_{i,j}\delta x_j\\ \delta u_{i,j}&=\bar{\delta} u_{i,j}+\bar{\bar{\delta}} u_{i,j}=\bar{\delta} u_{i,j}+u_{i,j,k}\delta x_k\end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

§6.2 弹性力学的可动边界变分原理

6.2.1 势能型可动边界变分原理Ⅰ

对固体系统进行离散分割，并采用分片构造待解函数时，能

量泛函的变分问题是待解函数具有间断性的可动边界的变分问题。[4~5]

1. 可动边界的变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，在可动边界的情况下，变形后固体系统的能量泛函(3.1)式变为

$$\mathscr{A}_{e\,a-1}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a(\xi_i)} A_0[\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),$$
$$u_{i,j}(\xi_i,\alpha)]\mathrm{d}v(\xi_i)$$
$$-\iint_{S_a(\xi_i)\cap S_1(\xi_i)} \bar{P}_i u_i(\xi_i,\alpha)\mathrm{d}s(\xi_i)\Big\} \quad (6.7)$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-\bar{F}_i u_i \quad (6.8)$$

(1)化变动积分域为固定积分域

利用坐标变换(6.1)式，把泛函(6.7)式用固定积分域表示，则有

$$\mathscr{A}_{e\,a-1}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a} A_0[\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),$$
$$u_{i,j}(\xi_i,\alpha)]|J|\mathrm{d}v$$
$$-\iint_{S_a\cap S_1} \bar{P}_i u_i(\xi_i,\alpha)|J_i|\mathrm{d}s\Big\} \quad (6.9)$$

其中

$$J=\frac{D(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{D(x_1,x_2,x_3)},\quad J_i=\frac{D(\xi_j,\xi_k)}{D(x_j,x_k)} \quad (6.10)$$
$$(i,j,k=1,2,3)$$

为雅各比行列式。

(2) 能量泛函的一阶变分

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零。泛函(6.9)式的一阶变分，为

$$\delta \mathscr{A}_{ea-1}(\alpha)=\frac{\partial A_{ea-1}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_\alpha}\Big[|J|\frac{\partial}{\partial \alpha}(A_0)+(A_0)\frac{\partial}{\partial \alpha}|J|\Big]_{\alpha=0}dv$$

$$-\iint_{S_\alpha\cap S_1}\Big[|J_i|\frac{\partial}{\partial \alpha}(\bar{P}_iu_i)+(\bar{P}_iu_i)\frac{\partial}{\partial \alpha}|J_i|\Big]_{\alpha=0}ds\Big\} \tag{6.11}$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(A_0)_{\alpha=0}=(A_0)_{,i}\delta x_i+(A_0)_{,u_i}\delta u_i+(A_0)_{,u_{i,j}}\delta u_{i,j}$$

$$=\sum_{i=1}^{2,3}\Big(\frac{\partial A_0}{\partial x_i}\Big)\delta x_i+\sum_{i=1}^{2,3}\Big(\frac{\partial A_0}{\partial u_i}\Big)\delta u_i$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2,3}\Big(\frac{\partial A_0}{\partial u_{i,j}}\Big)\delta u_{i,j} \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}|J|_{\alpha=0}=\frac{\partial}{\partial \alpha}\begin{vmatrix}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}\\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}\\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}\end{vmatrix}_{\alpha=0}$$

$$=\frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \delta x_3}{\partial x_3}=(\delta x_i)_{,i} \tag{6.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}|J_i|=\frac{\partial}{\partial \alpha}\begin{vmatrix}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} & \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}\\ \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} & \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k}\end{vmatrix}_{\alpha=0}=\frac{\partial}{\partial x_j}(\delta x_j)+\frac{\partial}{\partial x_k}(\delta x_k)$$

$$=(\delta x_j)_{,j\neq i} \tag{6.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\bar{P}_i u_i)=\frac{\partial}{\partial u_i}(\bar{P}_i u_i)\delta u_i+\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{P}_i u_i)\delta x_{j=i}$$

$$=\sum_{i=1}^{2,3}(\bar{P}_i u_i)_{,u_i}\delta u_i+\sum_{\substack{j=j\\ j\neq i}}^{K}(\bar{P}_i u_i)_{,j}\ {}_i\delta x_j \tag{6.15}$$

式中$\bar{P}_i$为常数，其变分为零。

将方程(6.12～6.15)式代入(6.11)式，得

$$\delta\mathscr{A}_{ea-1}=\sum_{\alpha=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_\alpha}[(A_0)_{,i}\delta x_i+(A_0)_{,u_i}\delta u_i+(A_0)_{,u_{i,j}}\delta u_{i,j}+A_0(\delta x_i)_{,i}]dv-\iint_{S_\alpha\cap S_1}[(\bar{P}_i u_i)_{,j,i}\delta x_j+(\bar{P}_i u_i)_{,u_i}\delta u_i+(\bar{P}_i u_i)(\delta x_j)_{,j=i}]ds\Big\} \tag{6.16}$$

根据方程(6.8)式，当应变、位移函数满足应变位移(1.2)式时，方程(6.16)式变为

$$\delta\mathscr{A}_{ea-1}=\sum_{\alpha=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_\alpha}[a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u_i)\delta u_{i,j}-\bar{F}_i\delta u_i+A_0(\delta x_i)_{,i}]dv-\iint_{S_\alpha\cap S_1}[(\bar{P}_i u_i)(\delta x_j)_{,j=i}+\bar{P}\delta u_i]ds\Big\} \tag{6.17}$$

利用(6.6)式和Green定理，方程(6.17)式可化为

$$\delta\mathscr{A}_{ea-1}=\sum_{\alpha=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_\alpha}-[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u_i))_{,j}+\bar{F}_i]\ \bar{\delta}u_i dv+\iint_{S_\alpha}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\ \bar{\delta}u_i+A_0 l_j\delta x_j]ds+\iint_{S_\alpha\cap S_1}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)\ \bar{\delta}u_i+P_e]ds\Big\} \tag{6.18}$$

其中

$$P_e = A_0 l_j \delta x_j - (\bar{P}_i u_i \delta x_j)_{,j=i} \qquad (6.19)$$

由上式可知，能量泛函的可动边界的变分可分为两个部分，其中一部分为待解函数本身的改变（当积分区域固定）引起的；另一部分为积分区域的变动而引起的。

(3) 与变分问题等价的微分方程及条件

在可动边界变分问题的一阶变分等于零的条件（驻值条件）下，可求得与变分问题等价的微分方程、边界条件、交界条件和附加边界条件。

基于

$$\delta \mathscr{A}_{ea-1} = 0 \qquad (6.20)$$

的条件下，如果 $\bar{\delta} u_i$ 与 δx_j 相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.18)式得

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}u_i)_{,j} + \bar{F}_i = 0 \qquad (V_a) \quad (6.21)$$

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0} = 0 \qquad (6.22)$$

$$(A_0 l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0} = 0 \qquad (6.23)$$

$$a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j - \bar{P}_i = 0 \qquad (S_1) \quad (6.24)$$

$$P_e = A_0 l_j \delta x_j - (\bar{P}_i u_i \delta x_j)_{,j\neq i} = 0 \qquad (S_1) \quad (6.25)$$

$$(S_{ab} = 1, 2, \cdots, S_0)^*$$

其中 S_{ab} 为元素 S_a 与 S_b 的交界面；S_0 为交界面的个数；$S_{ab}+0$ 与 $S_{ab}-0$ 表示由它们标出的物理量分别从 S_{ab} 的左右方趋近 S_{ab} 取极限值。

方程(6.21～6.25)就是与可动边界变分问题等价的微分方程(6.21)式、交界条件(6.22)、(6.23)式、边界条件(6.24)式和附加边界条件(6.25)式。

---

* 下文中 $S_{ab}=1, 2, \cdots, S_0$ 的条件仍存在，故从略不再注明。

如果在元素的边界上，令

$$\overline{\delta}u_i=\delta u_i-u_{i,k}\delta x_k \tag{6.26}$$

将(6.26)式代入方程(6.18)式，并令其值等于零，则有

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{A}_{ea\cdot 1}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}-[a_{ijkl}\varepsilon_{kl}u_i),_j+F_i]\overline{\delta}u_i\mathrm{d}v\\&+\iint_{S_a}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j\overline{\delta}u_i\mathrm{ds}\\&+\iint_{S_a}(A_0l_k-u_{i,k}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\delta x_k\mathrm{ds}\\&+\iint_{S_a\cap S_1}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\overline{P}_i)\delta u_i\mathrm{ds}\\&+\iint_{S_a\cap S_1}[P_e-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\overline{P}_i)u_{i,k}\delta x_k]\mathrm{ds}\Bigg\}=0\end{aligned} \tag{6.27}$$

如果$\overline{\delta}u_i$,δu_i与δx_k相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.27)式得

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u_i),_j+\overline{F}_i=0 \qquad (V_a) \tag{6.28}$$

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.29}$$

$$(A_0l_k-u_{i,k}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.30}$$

$$a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\overline{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{6.31}$$

$$P_e-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\overline{P}_i)u_{i,k}\delta x_k=0 \qquad (S_1) \tag{6.32}$$

如果δu_i与δx_k相关时，当变形后在元素边界上的待解函数为

$$u_i=R_i(\xi_i)$$

所以

$$\delta u_i=R_{i,k}\delta x_k \tag{6.33}$$

将(6.33)式代入(6.27)式得

$$\delta \mathscr{A}_{ea-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}-[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u_i)_{,j}+\bar{F}_i]\overline{\delta}u_i dv\right.$$

$$+\iint_{S_a}[A_0 l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j]\delta x_k ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[P_e+(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,k}-u_{i,k})$$

$$\left.\cdot\,\delta x_k]ds\right\}=0 \qquad (6.34)$$

由于$\overline{\delta}u_i$与δx_k相互无关且为任意函数，根据变分法基本引理，得

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u\ ))_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (6.35)$$

$$[A_0 l_k+(R_{i,k})-u_{i,k})a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j]\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.36)$$

$$P_e+(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,k}-u_{i,k})\delta x_k=0 \quad (S_1) \quad (6.37)$$

方程(6.28～6.32)，(6.35～6.37)式和(6.37)式是与可动边界变分问题等价的微分方程、边界条件、交界条件、附加边界条件。这些都是待解函数所必须满足的方程与条件。

(4) 结论

可动边界的能量泛函的变分可分为两部分，其中一部分为待解函数本身的改变（积分域固定）产生的变分；另一部分为积分域的变动而产生的变分。积分域的变动产生的能量泛函的变分是计算裂纹扩展时能量耗散的理论基础，在断裂分析中有重要意义。

交界条件是待解函数在元素交界面所应满足的条件。当这些条件不满足时，能量泛函的一阶变分不等于零，在元素交界面上导入了误差。在对连续体用有限元法作离散分析时，交界条件是保证有限元法收敛的必要条件，同时也为自适应有限元法提供了计算后验误差的估算公式。

2. 势能型有限元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足应变位移关系(1.2)式，在边界S_2上满足位移边界条件(1.8)式，及在元素交界面S_{ab}上位移函数与坐标改变量δx_j为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.38)式的位移函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\overline{\delta}\left[\iiint_{V_a} A_0 \mathrm{d}v - \iint_{S_a\cap S_1} \overline{P}_i u_i \mathrm{d}s\right] + \iint_{S_a} A_0 l_j \delta x_j \mathrm{d}s + \iint_{S_a\cap S_1} P_e \mathrm{d}s\right\}=0 \tag{6.38}$$

其中A_0为(6.8)式；P_e为(6.19)式。

3．势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅰ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足应变位移关系(1.2)式；在边界S_2上满足位移边界条件(1.8)式，及在元素交界面上位移函数与坐标的改变量δx_j为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.18)式（或(6.27)式，或(6.34)式）的位移函数为弹性力学问题的近似解。

4．势能型边界元可动边界变分原理Ⅰ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足平衡方程(1.1)、应变位移(1.2)式、应力应变(1.3)式、边界条件(1.8)式；在元素交界面S_{ab}上位移函数为连续的，则满足边界变分方程(6.39)式的位移函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}[A_0+(R_{i,n}-u_{i,n})a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j]\delta n\mathrm{d}s + \iint_{S_a\cap S_1}[P_e+(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\overline{P}_i)(R_{i,n}-u_{i,n})\delta n]\mathrm{d}s\right\}=0 \tag{6.39}$$

其中n为边界S_a的外法线方向；δn为法线方向的改变量。

上述诸原理，当略去边界可动性的影响时，它们就退化为相应的势能型古典情况的变分原理。从上所论过程证明诸原理是很方便的，故证明在此从略。

6.2.2 势能型可动边界变分原理II

对固体系统进行离散分割，当采用分片构造待解函数时，能量泛函的变分问题是待解函数具有间断性的可动边界的变分问题。

1. 可动边界的变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，在可动边界的情况下，变形后固体系统的能量泛函(4.20)式变为

$$\mathscr{A}_{ea-2}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{V_a(\xi_i)}A_0[\xi_i(\alpha),\ u_i(\xi_i,\alpha),u_{i,j}(\xi_i,\alpha),\ \varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha),\ \sigma_{ij}(\xi_i,\alpha)]\mathrm{d}v(\xi_i)$$
$$-\iint\limits_{S_a(\xi_i)\cap S_1(\xi_i)}\bar{P}_iu_i(\xi_i,\alpha)\mathrm{d}s(\xi_i)$$
$$-\iint\limits_{S_a\cap S_2}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}s\Big\}\tag{6.40}$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_iu_i$$
$$-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)$$

(1) 化变动积分域为固定积分域

利用坐标变换(6.1)式，把泛函(6.40)式用固定积分域表示，

则有

$$\mathscr{A}_{ea-2}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}A_0\Big(\xi_i(\alpha),\ u_i(\xi_i,\alpha),$$

$$u_{i,j}(\xi_i,\alpha),\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha)\Big)|J|\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_iu_i(\xi_i,\alpha)|J_i|\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}s\Big\} \qquad (6.42)$$

(2) 能量泛函的一阶变分

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零。泛函(6.42)式的一阶变分为

$$\delta\mathscr{A}_{ea-2}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[|J|\frac{\partial}{\partial\alpha}(A_0)+A_0\frac{\partial}{\partial\alpha}|J|\Big]_{\alpha=0}\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\Big[|J_i|\frac{\partial}{\partial\alpha}(\bar{P}_iu_i)+(\bar{P}_iu_i)\frac{\partial}{\partial\alpha}|J_i|\Big]_{\alpha=0}\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big[\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j(u_i-\bar{u}_i)\Big]_{\alpha=0}\mathrm{d}s\Big\}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[(A_0)_{,i}\delta x_i+(A_0)_{,u_i}\delta u_i$$

$$+(A_0)_{,u_{i,j}}\delta u_{i,j}$$

$$+(A_0)_{,\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}+(A_0)_{,\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}+A_0(\delta x_i)_{,i}\Big]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\Big[(\bar{P}_iu_i)_{,j\neq i}\delta x_j+(\bar{P}_iu_i)_{,u_i}\delta u_i$$

$$+(\bar{P}_i u_i)(\delta x_j)_{,j=i}\Big]ds$$

$$-\iint_{S_\alpha\cap S_2}\Big[(u_i-\bar{u}_i)\bar{\delta}\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j$$

$$+\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j\bar{\delta}u_i\Big]ds\Big\}$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_\alpha}\Big[-\frac{1}{2}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\bar{\delta}\sigma_{ij}$$

$$-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\bar{\delta}\varepsilon_{ij}$$

$$-\Big(\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i\Big)\bar{\delta}u_i\Big]dv$$

$$+\iint_{S_\alpha}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\bar{\delta}u_i ds+\iint_{S_\alpha}A_0 l_j\delta x_j ds$$

$$+\iint_{S_\alpha\cap S_1}\Big[\Big(\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j-\bar{P}_i\Big)\bar{\delta}u_i+P_e\Big]ds$$

$$+\iint_{S_\alpha\cap S_2}\Big[(\bar{u}_i-u_i)\bar{\delta}\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j\Big]ds\Big\}=0$$

$$(6.43)$$

其中

$$P_e=A_0 l_j\delta x_j-(\bar{P}_i u_i\delta x_j)_{,j\neq i}$$

$$=\Big[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_i u_i-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}$$

$$+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\Big]l_j\delta x_j$$

$$-(\bar{P}_i u_i \delta x_j)_{,j=i} \quad (6.44)$$

在S_2的边界上位移为给定的，因此，这是固定边界问题。

由上式可知，能量泛函的可动边界的变分分为两部分，其中一部分为待解函数本身的改变（当积分域固定）产生的变分；另一部分为积分域的变动而产生的变分。

(3) 与变分问题等价的微分方程

在可动边界变分问题的驻值条件下，可求得与可动边界的能量泛函的变分问题等价的微分方程、边界条件、交界条件和附加边界条件。

基于

$$\delta \mathscr{A}_{ea-2}=0 \quad (6.45)$$

的条件下，如果$\overline{\delta}\sigma_{ij}$, $\overline{\delta}\varepsilon_{ij}$, $\overline{\delta}u_i$与δx_j相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.43)式得

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0 \quad (V_a) \quad (6.46)$$

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \quad (V_a) \quad (6.47)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0 \quad (V_a) \quad (6.48)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (6.49)$$

$$(A_0 l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (6.50)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j-\bar{P}_i=0 \quad (S_1) \quad (6.51)$$

$$\mathbf{P}_e=\Big[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_i u_i-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})$$
$$\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}a_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\Big]l_j\delta x_j-(\bar{P}_i u_i\delta x_j)_{,j=i}=0$$
$$(S_1) \quad (6.52)$$

$$\bar{u}_i-u=0 \quad (S_2) \quad (6.53)$$

如果在元素的边界上，令

$$\overline{\delta u_i}=\delta u_i-u_{i,k}\delta x_k \tag{6.54}$$

将(6.54)式代入方程(6.43)式，则有

$$\begin{aligned}
\delta \mathscr{A}_{ea-2}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{V_a}\Big[&-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\overline{\delta}\,\varepsilon_{ij}\\
&-\frac{1}{2}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\overline{\delta}\,\sigma_{ij}\\
&-\Big(\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)_{,j}+\overline{F}_i\Big)\overline{\delta}\,u_i\Big]\mathrm{d}v\\
&+\iint\limits_{S_a}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j(\delta u_i)\mathrm{d}s\\
&+\iint\limits_{S_a}\Big[A_0 l_k-u_{i,k}\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j\Big]\delta x_k\mathrm{d}s\\
&+\iint\limits_{S_a\cap S_1}\Big[\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j-\overline{P}_i\Big]\delta u_i\mathrm{d}s\\
&+\iint\limits_{S_a\cap S_1}\Big[P_e-\Big(\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j\\
&-\overline{P}_i\Big)u_{i,k}\delta x_k\Big]\mathrm{d}s\\
&+\iint\limits_{S_a\cap S_2}\Big[(\overline{u}_i-u_i)\overline{\delta}\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\\
&+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j\Big]\mathrm{d}s\Big\}=0
\end{aligned} \tag{6.55}$$

如果$\overline{\delta}\,\sigma_{ij}$，$\overline{\delta}\,\varepsilon_{ij}$，$\overline{\delta}\,u_i$，$\delta u_i$与$\delta x_k$相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.55)式得

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0 \qquad (V_a) \quad (6.56)$$

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (6.57)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (6.58)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j \Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.59)$$

$$\left[A_0 l_k-u_{i,k}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.60)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (6.61)$$

$$P_e-\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j-\bar{P}_i\right]u_{i,k}\delta x_k=0 \qquad (S_1) \quad (6.62)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (6.63)$$

如果δu_i与δx_k相关，那么变形后元素边界上的待解函数为

$$u_i=R_i(\xi_i)$$

所以

$$\delta u_i=R_{i,k}\delta x_k \qquad (6.64)$$

将(6.64)式代入(6.55)式，则得

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{A}_{ea-2}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Bigg[&-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\,\bar{\delta}\,\varepsilon_{ij}\\&-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\bar{\delta}\,\sigma_{ij}\\&-\left(\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i\right)\bar{\delta}\,u_i\Bigg]\mathrm{d}v\end{aligned}$$

$$+\iint_{S_a}\left[A_0 l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]\delta x_k ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\left[P_a+(R_{i,k}-u_{i,k})\left(\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\right.\right.$$

$$\left.\left.-\bar{P}_i\right)\delta x_k\right]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}\left[(\bar{u}_i-u_i)\bar{\delta}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]ds\Big\}=0 \quad (6.65)$$

由于$\bar{\delta}\varepsilon_{ij}$，$\bar{\delta}\sigma_{ij}$，$\bar{\delta}u_i$与$\delta x_k$相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.65)式，得

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0 \qquad (V_a) \quad (6.66)$$

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (6.67)$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a)\ (6.68)$$

$$\left[A_0 l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.69)$$

$$P_a+(R_{i,k}-u_{i,k})\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j-\bar{P}_i\right]\delta x_k=0$$

$$(S_1) \quad (6.70)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (6.71)$$

在驻值条件下，由可动边界的能量泛函(6.42)式得到的变分条件(6.46～6.53)式（或为(6.56～6.63)式，或为(6.66～6.71)式）是与能量泛函的变分问题等价的微分方程(6.46～6.48)式，

交界条件(6.49)、(6.50)式（或为(6.59)、(6.60)式，或为(6.69)式)、边界条件(6.51)式与(6.53)式及附加边界条件(6.52)式(或为(6.62)式，或为(6.70)式)。

在可动边界能量泛函的驻值条件下，求得的这些微分方程、交界条件、边界条件及附加边界条件是弹性力学问题的待解函数应满足的全部条件。

2．势能型有限元可动边界变分原理 Ⅰ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当应力、应变、位移函数为独立变量函数；在元素交界面上，位移函数与坐标的改变量δx_j为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.72)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\overline{\delta}\left[\iiint_{V_a} A_0\,dv-\iint_{S_a\cap S_1} P_i u_i\,ds\right.\right.$$
$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j(u_i-\bar{u}_i)\,ds\right]$$
$$\left.+\iint_{S_a} A_0 l_j\delta x_j\,ds+\iint_{S_a\cap S_1} P_e\,ds\right\}=0 \qquad (6.72)$$

其中A_0为(6.41)式；P_e为(6.44)式。

3．势能型加权余数（广义伽略金）方程 Ⅰ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当应力、应变、位移函数为独立变量函数；在元素交界面上，位移函数与坐标改变量δx_j为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.43)式（或(6.55)式，或(6.65)式）的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

4．势能型边界元可动边界变分原理 Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，

若在元素内部待解函数满足应力应变(6.66)式、应变位移(6.67)式、平衡方程(6.68)式；在元素交界面上，位移函数与坐标改变量δx_j为连续函数时，则满足边界变分方程(6.73)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}\left[A_0+(R_{i,n}-u_{i,n})\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]\delta n \mathrm{d}s\right.$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\left[P_c+(R_{i,n}-u_{i,n})\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j-\bar{P}_i\right)\delta n\right]\mathrm{d}s$$

$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}\left[(\bar{R}_i-u_i)\bar{\delta}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]\mathrm{d}s\right\}=0 \quad (6.73)$$

其中A_0为(6.41)式；P_c为(6.44)式；n为边界S_a的外法线；δn为外法线的改变量。

当略去边界可动性的影响时，上述诸定理就退化为相应的广义变分原理，它们的证明从以上论述中很易得证，故在此证明从略。

下面，基于修正变分原理的泛函建立的各类可动边界变分原理，其证明与上面原理的论证过程类同，在此略去其论述过程，直接写出有关各类可动边界的变分原理。

6.2.3 势能型可动边界变分原理III

1. 势能型有限元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割并分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足应变位移(1.2)式，及在元素边界上独立构造应变函数为边界函数（用其表示应力函数）时，则满足变分方程(6.74)式的位移、应变函数为弹性力学问题的近似

解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\overline{\delta}\left[\iiint_{V_a}A_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s u_i\mathrm{d}s\right.\right.$$

$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s\bar{u}_i\mathrm{d}s\right]$$

$$\left.+\iint_{S_a}A_0 l_j\delta x_j\mathrm{d}s+\iint_{S_a\cap S_1}P_e\mathrm{d}s\right\}=0 \tag{6.74}$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_i u_i \tag{6.75}$$

$$P_e=A_0 l_j\delta x_j-(\bar{P}_i u_i\delta x_j)_{,j,i} \tag{6.76}$$

2. 势能型加权余数（广义伽略金）方程 Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，若在元素内部待解函数满足应变位移(1.2)式；在元素边界上独立构造应变函数为边界函数（用其表示应力函数）时，则满足变分方程(6.77)式的位移、应变函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}-\left[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i\right]\overline{\delta}u_i\mathrm{d}v\right.$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\left[P_e+(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)\overline{\delta}u_i\right]\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\right]\overline{\delta}u_i\mathrm{d}s$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(u_i-\bar{u}_i)\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_i)^s\right]\mathrm{d}s\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a\right]\overline{\delta}u_i^a\mathrm{d}s\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^b]\overline{\delta}u_i^b\,ds$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(u_i^a-u_i^b)\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a]ds$$

$$-\iint_{S_{ab}}[(A_0l_j)^a+(A_0l_j)^b]\delta x_j ds\Big\}=0 \qquad (6.77)$$

其中$\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a$可取为

$$\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a=\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,k}^a\delta x_k \quad (6.78)$$

或取为

$$\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a=[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,k}^a-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,k}^a]\delta x_k$$

$$(6.79)$$

这要由在元素边界上构造的应变函数的情况而决定。

3. 势能型边界元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割，并分片构造待解函数的基础上，若在元素内部待解函数满足应变位移（1.2）式、平衡方程(6.35)式；在元素边界上独立构造应变函数为边界函数（用其表示应力函数）时，则满足边界变分方程(6.80)式的位移、应变函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iint_{S_a\cap S_1}[P_e+(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\overline{P}_i)\overline{\delta}u_i]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^*-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j]\overline{\delta}u_j ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}[(u_i-\overline{u}_i)\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a]ds\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{S_{ab=1}}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a]\bar{\delta}u_i^a ds\right.\\
&+\iint_{S_{ab}}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^b]\bar{\delta}u_i^b ds\\
&+\iint_{S_{ab}}[(u_i^a-u_i^b)\bar{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^s]ds\\
&\left.-\iint_{S_{ab}}[(A_0l_j)^a-(A_0l_j)^b]\delta x_j ds\right\}=0
\end{aligned}
\tag{6.80}
$$

其中在元素边界上构造的应变函数的变分，亦可取（6.78）式（或(6.79)式）。

6.2.4 势能型可动边界变分原理IV

1.势能型有限元可动边界变分原理IV

在对固体系统进行离散分割并分片构造待解函数的基础上，若应力、位移、应变函数为独立变量函数，在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(6.81)式的位移、应变、应力函数为弹学性力学问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{M}\left\{\delta\left[\iiint_{V_a}A_0 dv-\iint_{S_a}P_i^s(u_i-u_i^s)ds\right.\right.\\
\left.-\iint_{S_a\cap S_1}P_iu_i^s ds\right]+\iint_{S_a}A_0l_j\delta x_j ds\\
\left.+\iint_{S_a\cap S_1}P_e ds\right\}=0
\end{aligned}
\tag{6.81}
$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})$$

$$-\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)-\bar{F}_i u_i$$

$$(6.82)$$

$$\mathbf{P}_e=A_0 l_j\delta x_j-(\bar{P}_i u_i\delta x_j)_{,j\neq i} \tag{6.83}$$

2. 势能型加权余数（广义伽略金）方程IV

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，若位移、应变应力函数为独立变量函数；在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(6.84)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\bar{\delta}\varepsilon_{ij}\right.\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\bar{\delta}\sigma_{ij}$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i\right)\bar{\delta}u_i\right]dv$$

$$-\iint_{S_a}\left[(u_i-u_i^s)\bar{\delta}P_i^s+\left(P_i^s-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\right)\bar{\delta}u_i\right]ds$$

$$+\iint_{S_a}A_0 l_j\delta x_j ds-\iint_{S_a\cap S_1}\left[(u_i-u_i^s)\bar{\delta}P_i^s\right.$$

$$\left.+(\bar{P}_i-P_i^s)\bar{\delta}u_i^s\right]ds+\iint_{S_a\cap S_1}\left[\mathbf{P}_e+\left(\frac{1}{2}(\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j-P_i^s\right)\bar{\delta}u_i\right]ds-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(u_i-\bar{u}_i)\bar{\delta}P_i^s\right.$$

$$\left.\left.+\left(P_i^s-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\right)\bar{\delta}u_i\right]ds\right\}=0 \tag{6.84}$$

其中在元素交界面S_{ab}上$P_i^s\overline{\delta}u_i^s$为相消项，在元素边界上$\overline{\delta}P_i^s$还可取为

$$\overline{\delta}P_i^s=\delta P_i^s-\left(\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\right)^a_{,k}\delta x_k \tag{6.85}$$

或取为

$$\overline{\delta}P_i^s=\left[P^s_{i,k}-\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right)^a_{,k}\right]\delta x_k \tag{6.86}$$

3．势能型边界元可动边界变分原理Ⅳ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，若在元素内部待解函数满足平衡方程(1.1)式、应变位移(1.2)式、应力应变(1.3)式；在元素边界上独立构造位移、应力函数为边界函数时，则满足变分方程(6.87)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}\left[(u_i-u_i^s)\overline{\delta}P_i^s+\left(P_i^s-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\right)\overline{\delta}u_i\right]ds\right.$$

$$-\iint_{S_a}A_0l_j\delta x_j ds+\iint_{S_a\cap S_1}\left[(u_i-u_i^s)\overline{\delta}P_i^s\right.$$

$$\left.+(\overline{P}_i-P_i^s)\overline{\delta}u_i^s\right]ds-\iint_{S_a\cap S_1}\left[P_e+\left(\frac{1}{2}(\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j-\overline{P}_i^s\right)\overline{\delta}u_i\right]ds+\iint_{S_a\cap S_2}\left[(u_i-\overline{u}_i)\overline{\delta}P_i^s\right.$$

$$\left.\left.+\left(P_i^s-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\right)\overline{\delta}u_i\right]ds\right\}=0 \tag{6.87}$$

其中在元素边界上构造的应力函数的变分亦可取(6.85)式(或(6.86)式)。

6.2.5 势能型可动边界变分原理V

1. 势能型有限元可动边界变分原理V

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当应力、位移、应变函数为独立变量函数；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(6.88)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\bar{\delta}\left[\iiint_{V_a}A_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a}\sigma_{ij}l_j(u_i-u_i^s)\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i u_i^s\,\mathrm{d}s\right]+\iint_{S_a}A_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s+\iint_{S_a\cap S_1}P_c\mathrm{d}s\right\}=0 \tag{6.88}$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})-\frac{1}{2}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)-\bar{F}_iu_i \tag{6.89}$$

$$P_c=A_0l_j\delta x_j-(\bar{P}_iu_i\delta x_j)_{,j*i} \tag{6.90}$$

2. 势能型加权余数（广义伽略金）方程V

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数基础上，当位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上，位移函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(6.91)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\,\delta\varepsilon_{ij}\right.\right.$$

$$
-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\overline{\delta}\sigma_{ij}
$$

$$
-\left(\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\overline{F}_i\right)\overline{\delta}u_i\Big]dv
$$

$$
-\iint_{S_a\cap S_1}[(u_i-u_i^s)\overline{\delta}\sigma_{ij}l_j
$$

$$
+(\overline{P}_i-\sigma_{ij}l_j)\overline{\delta}u_i^s-P_e]ds
$$

$$
-\iint_{S_a\cap S_2}(u_i-\overline{u}_i)\overline{\delta}\sigma_{ij}l_j ds\Big\}
$$

$$
-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}[(u_i^a-u_i^s)\overline{\delta}(\sigma_{ij}l_j)^a]ds
$$

$$
+\iint_{S_{ab}}[(u_i^b-u_i^s)\overline{\delta}(\sigma_{ij}l_j)^b]ds
$$

$$
-\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b]\overline{\delta}u_i^s ds
$$

$$
-\iint_{S_{ab}}[(A_0l_j)^a+(A_0l_j)^b]\delta x_j ds\Big\}=0 \qquad (6.91)
$$

其中在元素交界面上$\overline{\delta}u_i^s$还可取为

$$
\overline{\delta}u_i^s=\delta u_i^s-u_{i,k}^s\delta x_k \qquad (6.92)
$$

或取为

$$
\overline{\delta}u_i^s=(u_{i,k}^s-u_{i,k}^s)\delta x_k \qquad (6.93)
$$

3．势能型边界元可动边界变分原理Ⅴ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足平衡方程(1.1)式、应变位移(1.2)式

及应力应变(1.3)式；在元素边界上独立构造位移函数为边界函数时，则满足变分方程(6.94)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}\left[(u_i-u_i^s)\overline{\delta}\sigma_{ij}l_j+(\overline{P}_i-\sigma_{ij}l_j)\overline{\delta}u_i^s-P_e\right]ds\right.$$

$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}\left[(u_i-\overline{u}_i)\overline{\delta}\sigma_{ij}l_j\right]ds\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[(u_i^a-u_i^s)\overline{\delta}(\sigma_{ij}l_j)^a\right]ds\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}\left[(u_i^b-u_i^s)\overline{\delta}(\sigma_{ij}l_j)^b\right]ds$$

$$+\iint_{S_{ab}}\left[(\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b\right]\overline{\delta}u_i^s ds$$

$$\left.-\iint_{S_{ab}}\left[(A_0l_j)^a+(A_0l_j)^b\right]\delta x_j ds\right\}=0 \qquad (6.94)$$

其中在元素边界上构造的位移函数的变分亦可取（6.92）式（或(6.93)式）。

6.2.6 势能型可动边界变分原理VI

1. 势能型有限元可动边界变分原理Ⅵ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，若在元素内部应变、位移函数为独立变量函数；在元素边界上独立构造位移函数为边界函数时，则满足变分方程(6.95)式的位移、应变函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\overline{\delta}\left[\iiint_{V_a}A_0 dv\right.\right.$$

$$-\iint_{S_a} a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u_i-u_i^s)\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_1} P_i u_i^s \mathrm{d}s\Big]$$

$$+\iint_{S_a} A_0 l_j \delta x_j \mathrm{d}s+\iint_{S_a\cap S_1} P_e \mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (6.95)$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_i u_i-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big) \qquad (6.96)$$

$$P_e=A_0 l_j \delta x_j-(\bar{P}_i u_i \delta x_j)_{,j\neq i} \qquad (6.97)$$

2. 势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅵ

$$+(u_i^b-u_i^s)\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^b$$

$$-((a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a+(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^b)\overline{\delta}u_i^s]ds$$

$$-\iint_{S_{ab}}[(A_0l_j)^a+(A_0l_j)^b]\delta x_j ds\Big\}=0 \qquad (6.98)$$

其中在元素交界面上$\overline{\delta}u_i^s$还可取为

$$\overline{\delta}u_i^s=\delta u_i^s-u_{i,k}^a\delta x_k \qquad (6.99)$$

或取为

$$\overline{\delta}u_i^s=(u_{i,k}^s-u_{i,k}^a)\delta x_k \qquad (6.100)$$

3. 势能型边界元可动边界变分原理Ⅵ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，若在元素内部待解函数满足平衡方程(1.1)式及应变位移(1.2)式；在元素边界上位移函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(6.101)式的位移、应变函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iint_{S_a\cap S_1}[(u_i-u_i^s)\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)$$

$$+(\overline{P}_i-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\overline{\delta}u_i^s-P_e]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}[(u_i-\overline{u}_i)\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)]ds\Big\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}[(u_i^a-u_i^s)\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a$$

$$+(u_i^b-u_i^s)\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^b$$

$$-((a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a+(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^b)\overline{\delta}u_i^s]ds$$

$$-\iint\limits_{S_{ab}}[(A_0l_j)^a+(A_0l_j)^b]\delta x_j ds\Big\}=0 \qquad (6.101)$$

其中在元素边界上构造的位移函数的变分，亦可取(6.99)式（或(6.100)式)。

6.2.7　余能型可动边界变分原理Ⅰ

在对固体系统进行离散分割，并采用分片构造待解函数时，能量泛函的变分问题是待解函数具有间断性的可动边界的变分问题。

1. 可动边界的变分问题

在对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，在可动边界的情况下，变形后固体系统的能量泛函(3.13)式变为

$$\mathscr{A}_{e\cdot b-1}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{V_a(\xi_i)}B_0(\xi_i(\alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))dv(\xi_i)$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}(\alpha)l_j ds\Big\} \qquad (6.102)$$

其中

$$B_0=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}=B(\sigma_{ij}) \qquad (6.103)$$

(1) 化变动积分域为固定积分域

利用坐标变换(6.1)式，把泛函(6.102)式用固定积分域表示，则有

$$\mathscr{A}_{e\,b-1}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{V_a}B_0(\xi_i(\alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))|J|dv$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}(\alpha)l_j ds\Big\} \qquad (6.104)$$

其中边界S_2为固定边界。

（2）能量泛函的一阶变分

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零。泛函(6.104)式的一阶变分为

$$
\begin{aligned}
\delta \mathscr{A}_{be-1}(\alpha) &= \left.\frac{\partial \mathscr{A}_{eb-1}(\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \\
&= \sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[|J|\frac{\partial}{\partial \alpha}(B_0)+B_0\frac{\partial}{\partial \alpha}|J|\right]_{\alpha=0}\mathrm{d}v \right. \\
&\quad \left. -\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\}
\end{aligned}
\tag{6.105}
$$

其中边界S_2为固定边界，并有

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial \alpha}(B_0)\right|_{\alpha=0} &= (B_0)_{,i}\delta x_i+(B_0)_{,\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{2,3}\frac{\partial B_0}{\partial x_i}\delta x_i+\sum_{i,j=1}^{2,3}\frac{\partial B_0}{\partial \sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}
\end{aligned}
\tag{6.106}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial \alpha}|J| = (\delta x_i)_{,i} = \sum_{i=1}^{2,3}\frac{\partial \delta x_i}{\partial x_i}
\tag{6.107}
$$

将方程(6.106)、(6.107)式代入(6.105)式，得

$$
\begin{aligned}
\delta \mathscr{A}_{eb-1} = \sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[(B_0)_{i}\delta x_i+(B_0)_{,\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}\right.\right. \\
\left.\left.+B_0(\delta x_i)_{,i}\right]\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\,\bar{\delta}\,\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\}
\end{aligned}
\tag{6.108}
$$

由于应力函数满足平衡方程(1.1)式，则有

$$
\sum_{a=1}^{M}\iiint_{V_a}u_i\,\bar{\delta}\,\sigma_{ij,j}\mathrm{d}v=0
$$

于是方程(6.108)式变为

$$
\delta \mathscr{A}_{eb-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(\frac{\partial B_0}{\partial \sigma_{ij}}\right)\bar{\delta}\sigma_{ij}+u_i\,\bar{\delta}\sigma_{ij,j}\right]\mathrm{d}v\right.
$$

$$
+\iint_{S_a}\left[u_i\,\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j+B_0 l_j\delta x_j\right]\mathrm{d}s
$$

$$
\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\,\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\} \tag{6.109}
$$

利用(6.6)式和Green定理，方程(6.109)式变为

$$
\delta \mathscr{A}_{eb-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\bar{\delta}\sigma_{ij}\right]\mathrm{d}v\right.
$$

$$
+\iint_{S_a}(u_i\,\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j+B_0 l_j\delta x_j)\mathrm{d}s
$$

$$
\left.-\iint_{S_a\cap S_2}(\bar{u}_i-u_i)\,\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\} \tag{6.110}
$$

由上式可知，能量泛函的可动边界的变分可分为两部分，其中一部分为待解函数本身的改变（当积分域固定）引起的变分，另一部分为积分区域的变动而引起的变分。

（3）与变分问题等价的微分方程及条件

在可动边界变分问题的驻值条件下，可求得与变分问题等价的微分方程、边界条件、交界条件及附加边界条件。

基于

$$
\delta \mathscr{A}_{eb-1}=0 \tag{6.111}
$$

的条件下，如果$\bar{\delta}\sigma_{ij}$与δx_j相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.110)式得

$$
\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \tag{6.112}
$$

$$u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.113}$$

$$B_0 l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.114}$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \tag{6.115}$$

如果在元素边界上，令

$$\overline{\delta}\,\sigma_{ij}l_j=\delta\sigma_{ij}l_j-(\sigma_{ij}l_j)_{,k}\delta x_k \tag{6.116}$$

将(6.116)式代入(6.110)式，则有

$$\delta\mathscr{A}_{eb-1}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{V_a}\Big[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big]\overline{\delta}\,\sigma_{ij}\mathrm{d}v$$

$$+\iint\limits_{S_a}u_i\delta\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s+\iint\limits_{S_a}[B_0 l_k-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,k}]\delta x_k\mathrm{d}s$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_2}[(\bar{u}_i-u_i)\,\overline{\delta}\,\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\Big\}=0 \tag{6.117}$$

如果$\overline{\delta}\,\sigma_{ij}$，$\delta\sigma_{ij}l_j$，$\delta x_k$无关且为任意的函数，根据变分法基本引理，由(6.117)式，得

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \tag{6.118}$$

$$u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.119}$$

$$(B_0 l_k-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,k})\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.120}$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \tag{6.121}$$

如果$\delta\sigma_{ij}l_j$与δx_k相关，当变形后在元素边界上的待解函数为

$$\sigma_{ij}=T_i(\xi_i)$$

所以

$$\delta\sigma_{ij}=T_{i,k}\delta x_k \tag{6.122}$$

将(6.122)式代入(6.117)式，得

$$\delta \mathscr{A}_{eb-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right]\overline{\delta}\sigma_{ij}\mathrm{d}v\right.$$

$$+\iint_{S_a}[B_0 l_k+(T_{j,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})u_i]\delta x_k \mathrm{d}s$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}(\bar{u}_i-u_i)\overline{\delta}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.123)$$

由于$\overline{\delta}\sigma_{ij}$与$\delta x_k$无关且为任意函数，根据变分法基本引理，得

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (6.124)$$

$$[B_0 l_k+(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})u_i]_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.125)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (6.126)$$

方程(6.112～6.115)、(6.118～6.121)与(6.124)、(6.125)式是与可动边界变分问题等价的微分方程、边界条件、交界条件及附加边界条件。这些方程与条件是待解函数所必须满足的。

(4) 结论

可动边界的能量泛函的变分可分为两部分，其中一部分为待解函数本身的改变(积分域固定)产生的变分，另一部分为积分域的变动而产生的变分。积分域变动产生的能量泛函的变分是计算裂纹扩展时能量耗散的理论基础，在断裂分析中有重要意义。

交界条件是待解函数在元素交界面所应满足的条件。当这些条件不满足时，能量泛函的一阶变分不等于零，在元素交界处导入了误差。对连续体用有限元办法作离散分析时，交界条件是保证有限元法收敛的必要条件；同时为自适应有限元法提供了计算后验误差的估算公式。

2. 余能型有限元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足平衡方程(1.1)式；在边界S_1上满足力的边界条件及其力的附加边界条件时，则满足变分方程(6.127)式的应力、位移函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\overline{\delta}\left[\iiint_{V_a} B_0 dv - \iint_{S_a\cap S_2} \bar{u}\sigma_{ij}l_j ds\right] + \iint_{S_a} B_0 l_j \delta x_j ds\right\}=0 \qquad (6.127)$$

其中B_0为(6.103)式。

3. 余能型加权余数（广义伽略金）方程 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足平衡方程(1.1)式，在边界S_1上满足力的边界条件及其力的附加边界条件；在元素交界面上，应力函数为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.110)式(或(6.117)式，或(6.123)式)的位移、应力函数为弹性力学问题的近似解。

4. 余能型边界元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在元素内部若待解函数满足平衡方程(1.1)式、应力位移方程(6.124)式；在元素交界面上，应力函数与坐标改变量均为连续函数时，则满足边界变分方程(6.128)式的位移、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}\left[B_0+(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j)_{,n})u_i\right]\delta n ds - \iint_{S_a\cap S_2}(\bar{u}_i-u_i)\,\overline{\delta}\sigma_{ij}l_j ds\right\}=0 \qquad (6.128)$$

其中n为边界S_a的法线；δn为法线的改变量。

上述诸原理，当略去边界可动性的影响时，它们就退化为相应的古典情况的变分原理。

6.2.8 余能型可动边界变分原理II

下面在广义泛函的情况下，来论述可动边界的变分问题。

1. 可动边界的变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，在可动边界的情况下，变形后固体系统的能量泛函(4.81)式变为

$$
\begin{aligned}
\underset{eb-2}{\mathscr{A}}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{ & \iiint_{V_a(\xi_i)}[B_0(\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),\\
& u_{i,j}(\xi_i,\alpha),\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha)]dv(\xi_i)\\
& +\iint_{S_a(\xi_i)\cap S_1(\xi_i)}[\sigma_{ij}(\xi,\alpha)l_j\\
& -\bar{F}_i]u_i(\xi_i,\alpha)ds(\xi_i)+\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_jds\Big\}
\end{aligned}
\tag{6.129}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
B_0&=B-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-u_i((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i)\\
B&=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}
\end{aligned}
\tag{6.130}
$$

(1) 化变动积分域为固定积分域

利用坐标变换(6.1)式，把泛函(6.129)式用固定积分域表示，则有

$$
\begin{aligned}
\underset{eb-2}{\mathscr{A}}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}[\,B_0\,(\xi_i(\alpha),u_i,(\xi_i,\alpha),\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha),\\
\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))]\,|J|_1^1dv
\end{aligned}
$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i]|J_i|\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}u_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\Big\} \tag{6.131}$$

其中S_2为固定边界；$|J|$和$|J_i|$为雅各比行列式(6.10)式。

(2) 能量泛函的一阶变分

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零。泛函(6.131) 式的一阶变分为

$$\delta\mathscr{A}_{eb-2}(\alpha)=\frac{\partial\mathscr{A}_{eb-1}}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[|J|\frac{\partial}{\partial\alpha}(B_0)+B_0\frac{\partial}{\partial\alpha}|J|\Big]_{\alpha=0}\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\Big[|J_i|\frac{\partial}{\partial\alpha}((\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i)$$

$$+(\sigma_{ij}-\bar{P}_i)u_i\frac{\partial}{\partial\alpha}|J_i|\Big]_{\alpha=0}\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\overline{\delta}(\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s\Big\} \tag{6.132}$$

将(6.130)式代入(6.132)式中，则得

$$\delta\mathscr{A}_{eb-2}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}[(B_0)_{,i}\delta x_i+(B_0)_{,u_i}\delta u_i$$

$$+(B_0)_{,\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}+(B_0)_{,u_{i,j}}\delta u_{i,j}$$

$$+(B_0)_{,\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}+B_0(\delta x_i)_{,i}]\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[((\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i)_{,i}\delta x_i$$

$$+((\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i)_{,u_i}\delta u_i$$

$$+((\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i)_{,\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}$$

$$+((\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i)(\delta x_j)_{,j\neq i}]\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\overline{\delta}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\Big\}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}[-(\sigma_{ij}-a_{ijkl}u_{k,l})\overline{\delta}\varepsilon_{ij}$$

$$-(b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij})\overline{\delta}\sigma_{ij}$$

$$-((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i)\overline{\delta}u_i]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a}u_i\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\mathrm{d}s+\iint_{S_a}B_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\overline{\delta}u_i+P_e]\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}[(\bar{u}_i-u_i)\overline{\delta}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\Big\} \qquad (6.133)$$

其中

$$P_e=B_0l_j\delta x_j+[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i(\delta x_j)]_{,j\neq i}$$

$$=\Big[\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-u_i((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i)\Big]l_j\delta x_j$$

$$+[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i(\delta x_j)]_{,j\neq i} \qquad (6.134)$$

由(6.133)式可知，能量泛函的可动边界的变分可分为两部

分，其中一部分为待解函数本身的改变（当积分域固定）产生的变分；另一部分为积分域的变动而产生的变分。

（3）与变分问题等价的微分方程与条件

在可动边界变分问题的驻值条件下，可求得与可动边界的能量泛函的变分问题等价的微分方程、边界条件、交界条件和附加边界条件。

基于

$$\delta \mathscr{A}_{eb-2}=0 \tag{6.135}$$

的条件下，如果$\overline{\delta}\sigma_{ij}$，$\overline{\delta}\varepsilon_{ij}$，$\overline{\delta}u_i$与$\delta x_k$相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.133)式，得

$$b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij}=0 \qquad (V_a) \tag{6.136}$$

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}u_{k,l}=0 \qquad (V_a) \tag{6.137}$$

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\overline{F}_i=0 \qquad (V_a) \tag{6.138}$$

$$u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.139}$$

$$(B_0 l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.140}$$

$$(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)=0 \qquad (S_1) \tag{6.141}$$

$$P_e=B_0 l_j\delta x_j+[(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)u_i(\delta x_j)]_{,j\neq i}=0 \qquad (S_1) \tag{6.142}$$

$$\overline{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \tag{6.143}$$

如果在元素边界上，令

$$\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j=\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,k}\delta x_k \tag{6.144}$$

将(6.144)式代入方程(6.135)式，则有

$$\delta \mathscr{A}_{eb-2}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}[-(\sigma_{ij}-a_{ijkl}u_{k,l})\overline{\delta}\varepsilon_{ij}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&-(b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij})\overline{\delta}\sigma_{ij} \\
&-((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i)\overline{\delta}u_i]\mathrm{d}v \\
&-\iint_{S_a} u_i\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\mathrm{d}s \\
&+\iint_{S_a}[B_0 l_k+u_i(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,k}]\delta x_k\mathrm{d}s \\
&+\iint_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\overline{\delta}u_i+P_e]\mathrm{d}s \\
&+\iint_{S_a\cap S_2}(\bar{u}_i-u_i)\delta\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (6.145)
\end{aligned}
$$

如果在元素内部$\overline{\delta}\sigma_{ij}$，$\overline{\delta}\varepsilon_{ij}$，$\overline{\delta}u_i$以及在元素边界上$\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{ij})l_j$与$\delta x_k$相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.145)式得

$$b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij}=0 \qquad (V_a) \quad (6.146)$$

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}u_{k,l}=0 \qquad (V_a) \quad (6.147)$$

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (6.148)$$

$$u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (S_a) \quad (6.149)$$

$$\Big[B_0 l_k+u_i(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,k}\Big]_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (S_a) \quad (6.150)$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (6.151)$$

$$P_e=B_0 l_j\delta x_j-[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i(\delta x_j)]_{,j\neq i}=0$$

$$(S_1) \quad (6.152)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (6.153)$$

如果$\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)$与$\delta x_k$相关，则变形后元素边界上的待解

函数为

$$a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j=T_i$$

所以有

$$\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)=T_{i,k}\delta x_k \tag{6.154}$$

将(6.154)式代入(6.145)式，则得

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{A}_{sb-2}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{&\iiint_{V_a}[-(\sigma_{ij}-a_{ijkl}u_{k,l})\,\overline{\delta}\varepsilon_{ij}\\&-(b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij})\,\overline{\delta}\sigma_{ij}\\&-((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\overline{F}_i)\,\overline{\delta}u_i]\mathrm{d}v\\&+\iint_{S_a}[B_0l_k-(T_{i,k}-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,k})u_i]\delta x_k\mathrm{d}s\\&+\iint_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)\,\overline{\delta}u_i+P_e]\mathrm{d}s\\&+\iint_{S_a\cap S_2}[(\overline{u}_i-u_i)\,\overline{\delta}(\sigma_{ij}l_j)]\mathrm{d}s\Big\}=0\end{aligned} \tag{6.155}$$

由于在元素内部$\overline{\delta}\sigma_{ij}$，$\overline{\delta}\varepsilon_{ij}$，$\overline{\delta}u_i$及在元素边界上$\overline{\delta}u_i$与$x_k$相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.155)式，得

$$b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij}=0 \qquad (V_a) \tag{6.156}$$

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}u_{k,l}=0 \qquad (V_a) \tag{6.157}$$

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\overline{F}_i=0 \qquad (V_a) \tag{6.158}$$

$$\Big[B_0l_k-(T_{i,k}-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,k})u_i\Big]_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.159}$$

$$\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{6.160}$$

$$P_e=B_0l_j\delta x_j-((\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)u_i(\delta x_j))_{,j\ne i}=0 \qquad (S_1) \tag{6.161}$$

$$\bar{u}_i - u_i = 0 \qquad (S_2) \qquad (6.162)$$

在驻值条件下，由可动边界的能量泛函(6.131)式得到的变分条件(6.136～6.143)式（或为(6.146～6.153)式，或为(6.156～6.162)式）是与能量泛函的变分问题等价的微分方程(6.136～6.138)式、交界条件(6.139)、(6.140)式(或为(6.149)、(6.150)式，或为(6.159)式）、边界条件(6.141)式与(6.143)式及附加条件(6.142)式。

上述微分方程、交界条件、边界条件，及附加边界条件是在弹性力学问题的三类变量函数的广义泛函的基础上，利用能量泛函的驻值条件求得的，所以它们是弹性力学问题的待解函数应满足的全部条件。

2. 余能型有限元可动边界变分原理Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在元素交界面上应变函数与坐标改变量δx_j均为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.163)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的似近解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\bar{\delta}\left[\iiint_{V_a} B_0 \mathrm{d}v + \iint_{S_a\cap S_1} (\sigma_{ij}l_j - \bar{P}_i)u_i \mathrm{d}s + \iint_{S_a\cap S_2} \bar{u}_i\sigma_{ij}l_j \mathrm{d}s\right] + \oiint_{S_a} B_0 l_j \delta x_j \mathrm{d}s + \iint_{S_a\cap S_1} P_e \mathrm{d}s\right\} = 0 \qquad (6.163)$$

其中B_0为(6.130)式；P_e为(6.134)式。

3. 余能型加权余数(广义伽略金)方程Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在元素交界面上应变函数与坐标改变量δx_j均为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.133)式（或(6.145)式，或(6.155)式）的位

移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

4. 余能型边界元可动边界变分原理 II

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在元素内部待解函数满足应力应变(6.156)式、应力位移(6.157)式和平衡方程(6.158)式；在元素交界面上，坐标改变量δn为连续函数时，则满足边界变分方程(6.164)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iint_{S_a}[B_0-(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j)_{,n})u_i]\delta n\mathrm{d}s$$
$$+\iint_{S_a\cap S_1}[P_e+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\bar{\delta}u_i]\mathrm{d}s$$
$$+\iint_{S_a\cap S_2}[(\bar{u}_i-u_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j]\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (6.164)$$

其中B_0为(6.130)式；P_e为(6.134)式。

当略去边界可动性的影响时，上述各类变分原理就退化为相应情况的广义变分原理。

6.2.9 余能型可动边界变分原理III

下面在修正原理的各类泛函的基础上建立可动边界变分问题的变分原理。

1. 余能型有限元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在元素内部待解函数满足平衡方程(1.1)式；在元素边界上，独立构造位移函数为边界函数时，则满足变分方程(6.165)式的应力、位移函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\bar{\delta}\Big[\iiint_{V_a}B_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a}\sigma_{ij}l_j(u_i)^s\mathrm{d}s$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i u_i^s \mathrm{d}s\Big]+\iint\limits_{S_a}B_0 l_j\delta x_j \mathrm{d}s\Big\}=0 \tag{6.165}$$

其中

$$B_0=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \tag{6.166}$$

2．余能型加权余数(广义伽略金)方程Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在元素内部待解函数满足平衡方程(1.1)式，在元素边界上独立构造位移函数为边界函数时，则满足变分方程(6.167)式的位移、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{V_a}\Big(\frac{\partial B_0}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\bar{\delta}\sigma_{ij}\mathrm{d}v$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\bar{\delta}u_i^s-(u_i^s-u_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j]\mathrm{d}s$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_2}(\bar{u}_i-u_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\Big\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint\limits_{S_{ab}}[(u_i^s-u_i^a)\bar{\delta}(\sigma_{ij}l_j)^a$$

$$+(u_i^s-u_i^b)\bar{\delta}(\sigma_{ij}l_j)^b+((\sigma_{ij}l_j)^a+(\delta_{ij}l_j)^b)\bar{\delta}u_i^s]\mathrm{d}s$$

$$-\iint\limits_{S_{ab}}[(B_0l_j)^a+(B_0l_j)^b]\delta x_j\mathrm{d}s\Big\}=0 \tag{6.167}$$

其中$\bar{\delta}u_i^s$还可取为

$$\bar{\delta}u_i^s=\delta u_i^s-u_{i,k}^a\delta x_k \tag{6.168}$$

或取为

$$\bar{\delta}u_i^s=(R_{i,k}-u_{i,k}^a)\delta x_k \tag{6.169}$$

3．余能型边界元可动边界变分原理Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在元素内部待解函数满足平衡方程(1.1)式、应力位移方程(5.77)式；在元素边界上独立构造位移为边界函数时，则满足边界变分方程(6.170)式的应力、位移函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\bar{\delta}u_i^a+(u_i^a-u_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j]ds\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}(\bar{u}_i-u_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_jds\right\}$$

$$-\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}[(u_i^a-u_i^a)\bar{\delta}(\sigma_{ij}l_j)^a\right.$$

$$+(u_i^a-u_i^b)\bar{\delta}(\sigma_{ij}l_j)^b+((\sigma_{ij}l_j)^a+(\sigma_{ij}l_j)^b)\bar{\delta}u_i^a]ds$$

$$\left.-\iint_{S_{ab}}[(B_0l_j)^a+(B_0l_j)^b]\delta x_jds\right\}=0 \qquad (6.170)$$

其中在元素边界上构造的位移函数的变分亦可取(6.168)式（或(6.169)式）。

6.2.10 余能型可动边界变分原理IV

1. 余能型有限元可动边界变分原理IV

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上，位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(6.171)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\bar{\delta}\left[\iiint_{V_a}B_0dv+\iint_{S_a}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-P_i^a)u_i^ads\right.\right.$$

$$+\iint_{S_a \cap S_2} \bar{u}_i P_i^s \mathrm{d}s \Big] + \iint_{S_a} B_0 l_j \delta x_j \mathrm{d}s \Big\} = 0 \qquad (6.171)$$

其中

$$B_0 = -\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} - b_{ijkl}\sigma_{kl})$$

$$-u_i[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j} + \bar{F}_i] \qquad (6.172)$$

2．余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅳ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上，独立构造位移、应力函数为边界函数时，则满足变分方程(6.173）式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}[-(\varepsilon_{ij} - b_{ijkl}\sigma_{kl})\overline{\delta}\sigma_{ij}$$

$$+(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\underset{\cdots}{u_i}) - \sigma_{ij})\overline{\delta}\varepsilon_{ij}$$

$$-((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j} + \bar{F}_i)\overline{\delta}u_i]\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_a}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j - P_i^s)\overline{\delta}u_i^s + (u_i^s - u_i)\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)]\,\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a} B_0 l_j \delta x_j \mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a \cap S_1}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j - \bar{P}_i)\overline{\delta}u_i^s$$

$$+(u_i^s - u_i)\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)]\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a \cap S_2}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j - P_i^s)\overline{\delta}u_i^s + (\bar{u}_i - u_i^s)\overline{\delta}P_i^s$$

$$+(u_i^s-u_i)\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)]\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (6.173)$$

其中在交界面上$u_i^s\,\overline{\delta}\,P_i^s$为相消项；在元素边界上$\overline{\delta}\,u_i^s$项还可取为

$$\overline{\delta}\,u_i^s=\delta u_i^s-(u_{i,k}^s)\delta x_k \qquad (6.174)$$

或取为

$$\overline{\delta}\,u_i^s=(R_{i,k}-u_{i,k}^s)\delta x_k \qquad (6.175)$$

3．余能型边界元可动边界变分原理Ⅳ

在对固体系统进行散离分割与分片构造待解函数的基础上，在元素内部待解函数满足应力应变(5.83)式、应力位移(5.84)式及平衡方程(5.85)式；在元素边界上，独立构造的应力、位移函数时，则满足边界变分方程(6.176)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iint_{S_a}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-P_i^s)\overline{\delta}\,u_i^s$$

$$+(u_i^s-u_i)\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)]\mathrm{d}s+\iint_{S_a}B_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\overline{P}_i)\overline{\delta}\,u_i^s$$

$$+(u_i^s-u_i)\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)]\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-P_i^s)\overline{\delta}\,u_i^s+(\overline{u}_i-u_i^s)\overline{\delta}\,P_i^s$$

$$+(u_i^s-u_i)\overline{\delta}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)]\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (6.176)$$

其中在元素边界上构造的位移函数的变分亦可取（6.174)式(或(6.175)式)。

6.2.11 余能型可动边界变分原理V

1. 余能型有限元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割并分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(6.177)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\overline{\delta}\left[\iiint_{V_a}B_0\mathrm{d}v+\iint_{S_a}u_i(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-P_i^a)\mathrm{d}s\right.\right.$$

$$\left.\left.+\iint_{S_a\cap S_2}P_i^a\bar{u}_i\mathrm{d}s\right]+\iint_{S_a}B_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.177)$$

其中B_0为(6.172)式。

2. 余能型加权余数（广义伽略金）方程 V

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(6.178)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}[-(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})\overline{\delta}\sigma_{i,j}\right.$$

$$+(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u_i)-\sigma_{ij})\overline{\delta}\varepsilon_{ij}$$

$$\cdots$$

$$-((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i)\overline{\delta}u_i]\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)\overline{\delta}u_i]\mathrm{d}s$$

$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}-P_i^a)\overline{\delta}u_i+(\bar{u}_i-u_i)\overline{\delta}P_i^a]\mathrm{d}s\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=0}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a-P_i^s\right]\bar{\delta}u_i^a\mathrm{d}s\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}\left[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^b-P_i^s\right]\bar{\delta}u_i^b\mathrm{d}s$$

$$\left.+\iint_{S_{ab}}\left[(u_i^a-u_i^b)\overrightarrow{\delta}P_i^s+((B_0l_j)^a+(B_0l_j)^b)\delta x_j\right]\mathrm{d}s\right\}=0 \tag{6.178}$$

其中在元素交界面上$\overrightarrow{\delta}P_i^s$还可取为

$$\overrightarrow{\delta}P_i^s=\delta P_i^s-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a_{,k}\delta x_k \tag{6.179}$$

或取为

$$\overrightarrow{\delta}P_i^s=(P_{i,k}^s-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,k})^a\delta x_k \tag{6.180}$$

3. 余能型边界元可动边界变分原理Ⅴ

在对固体系统进行离散分割并分片构造待解函数的基础上，在元素内部待解函数满足应力应变(5.96)式、应力位移(5.97)式及平衡方程(5.98)式；在元素边界上，独立构造的应力函数为边界函数时，则满足边界变分方程(6.181)式的位移、应变、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a\cap S_1}\left[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)\bar{\delta}u_i\right]\mathrm{d}s\right.$$

$$\left.+\iint_{S_a\cap S_2}\left[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-P_i^s)\bar{\delta}u_i+(\bar{u}_i-u_i)\overrightarrow{\delta}P_i^s\right]\mathrm{d}s\right\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=0}^{S_0}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^a-P_i^s\right]\bar{\delta}u_i^a\mathrm{d}s\right.$$

$$+\iint_{S_{ab}}\left[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)^b-P_i^s\right]\bar{\delta}u_i^b\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(u_i^a-u_i^b)\overline{\delta}P_i^a+((B_0l_j)^a+(B_0l_j)^b)\delta x_j]ds\Big\}=0 \tag{6.181}$$

其中在元素边界上独立构造的应力函数的变分亦可取(6.179)式(或(6.180)式)。

6.2.12 余能型可动边界变分原理VI

1. 余能型有限元可动边界变分原理Ⅳ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应力函数为独立变量函数；在元素边界上，应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(6.182)式的位移、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\overline{\delta}\Big[\iiint_{V_a}B_0dv+\iint_{S_a}(\sigma_{ij}l_j-P_i^a)u_ids+\iint_{S_a\cap S_2}\overline{u}_iP_i^ads\Big]+\iint_{S_a}B_0l_j\delta x_jds\Big\}=0 \tag{6.182}$$

其中

$$B_0=-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-u_i(\sigma_{ij,j}+\overline{F}_i) \tag{6.183}$$

2. 余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅵ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应力为独立变量函数；在元素边界上，应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(6.184)式的位移、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}[(u_{i,j}-b_{ijkl}\sigma_{kl})\overline{\delta}\sigma_{ij}-(\sigma_{ij,j}+\overline{F}_i)\overline{\delta}u_i]dv$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\overline{\delta u_i}]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}[(\sigma_{ij}l_j-P_i^a)\overline{\delta u_i}$$

$$+(\bar{u}_i-u_i)\overline{\delta P_i^a}]ds\Big\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=0}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^a-P_i^a]\bar{\delta}u_i^a ds$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)^b-P_i^a]\delta u_i^b ds$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(u_i^a-u_i^b)\bar{\delta}P_i^a+((B_0l_j)^a+(B_0l_j)^b)\delta x_j ds\Big\}=0$$

(6.184)

其中在元素边界上独立构造的应力函数的变分还可写为

$$\delta P_i^a=\delta P_i^a-(\sigma_{ij}l_j)^a{}_{,k}\delta x_k \qquad (6.185)$$

或为

$$\bar{\delta}P_i^a=(P_{i,k}^a-(\sigma_{ij}l_j)^a_{,k})\delta x_k \qquad (6.186)$$

3. 余能型边界元可动边界变分原理Ⅵ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在元素内部待解函数满足应力位移(5.107)式、平衡方程(5.108)式；在元素边界上，应力函数为独立构造的边界函数时，则满足边界变分方程(6.187)式的位移、应力函数为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iint_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\bar{\delta}u_i]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}[(\sigma_{ij}l_j-P_i^a)\delta u_i+(\bar{u}_i-u_i)\delta P_i^a]ds\Big\}$$

$$+\sum_{S_{ab}=1}^{S_0}\Big\{\iint_{S_{ab}}[((\sigma_{ij}l_j)^a-P_i^a)\delta u_i^a$$

$$+((\sigma_{ij}l_j)^b-P_i^a)\delta u_i^b+(u_i^a-u_i^b)\delta P_i^a$$

$$+((B_0l_j)^a+(B_0l_j)^b)\delta x_j]ds\Big\}=0 \tag{6.187}$$

其中在元素边界上构造的应力函数P_i^a的变分亦可取(6.185)式(或(6.186)式)。

§6.3 塑性形变理论的可动边界变分原理

6.3.1 势能型可动边界变分原理Ⅰ

基于势能古典变分原理的泛函的基础上，考虑到边界可动性的影响，研究塑性形变理论的可动边界变分原理[6]。

1. 可动边界的变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，在可动边界的情况下，变形后固体系统的能量泛函(3.47)式变为

$$\mathscr{A}_{d\alpha-1}(\alpha)$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_\alpha(\xi_i)}A_0(\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),u_{i,j}(\xi_i,\alpha))dv(\xi_i)$$

$$-\iint_{S_\alpha(\xi_i)\cap S_1(\xi_i)}\bar{F}_iu_i(\xi_i,\alpha)ds(\xi_i)\Big\} \tag{6.188}$$

式中

$$A_0=A(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_iu_i \tag{6.189}$$

其中A为(1.50)式。

(1) 化变动积分域为固定积分域表示

利用坐标变换(6.1)式，把泛函(6.188)式用固定积分域表示，则有

$$\mathscr{A}_{d\alpha-1}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}A_0[\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),u_{i,j}(\xi_i,\alpha)]|J|\mathrm{d}v\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_iu_i(\xi_i,\alpha)|J_i|\mathrm{d}s\right\} \tag{6.190}$$

其中$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式(6.10)式。

(2) 能量泛函的一阶变分

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零。泛函(6.190)式的一阶变分为

$$\delta\mathscr{A}_{d\alpha-1}(\alpha)=\frac{\partial A_{d\alpha-1}}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[|J|\frac{\partial}{\partial\alpha}(A_0)+A_0\frac{\partial}{\partial\alpha}|J|\right]_{\alpha=0}\mathrm{d}v\right.$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[|J_i|\frac{\partial}{\partial\alpha}(\bar{P}_iu_i)\right.$$

$$\left.\left.+(\bar{P}_iu_i)\frac{\partial}{\partial\alpha}|J_i|\right]_{\alpha=0}\mathrm{d}s\right\}=0 \tag{6.191}$$

已知应变位移函数满足应变位移关系(1.32)式，并利用(6.6)式和Green定理，可把方程(6.191)式化为

$$\delta\mathscr{A}_{d\alpha-1}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}-\left[\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\delta u_i\mathrm{d}v\right.$$

$$+\iint_{S_a}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\delta u_i+A_0l_j\delta x_j\right]\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right)\bar{\delta}u_i+P_d\right]ds\Big\}=0 \quad (6.192)$$

其中

$$P_d=A_0l_j\delta x_j-(\bar{P}_iu_i\delta x_j)_{,j\neq i} \qquad (6.193)$$

(3) 与变分问题等价的微分方程及条件

在可动边界能量泛函的驻值条件下，可求得与变分问题等价的微分方程、边界条件、交界条件和附加边界条件。

如果$\bar{\delta}u_i$与δx_j相互无关，且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.192)式得

$$\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (6.194)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)\Bigg|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.195)$$

$$(A_0l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.196)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (6.197)$$

$$P_d=A_0l_j\delta x_j-(\bar{P}_iu_i\delta x_j)_{,j\neq i}=0 \qquad (S_1) \quad (6.198)$$

如果在元素边界上，令

$$\bar{\delta}u_i=\delta u_i-u_{i,k}\delta x_k \qquad (6.199)$$

将(6.199)式代入方程(6.192)式，则有

$$\delta\mathscr{A}_{da-1}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}-\left[\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\delta u_i dv$$

$$+\iint_{S_a}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\delta u_i ds$$

$$+\iint_{S_a}\left(A_0l_k-u_{i,k}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)\delta x_k ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right)\delta u_i \mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\left[P_d-\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right)u_{i,k}\delta x_k\right]\mathrm{d}s\Big\}=0 \tag{6.200}$$

如果$\bar{\delta}u_i$，δu_i，δx_k相互无关，且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.200)式得

$$\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \tag{6.201}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.202}$$

$$A_0 l_k-u_{i,k}\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.203}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{6.204}$$

$$P_d-\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right)u_{i,k}\delta x_k=0 \quad (S_1) \tag{6.205}$$

如果δu_i与δx_k相关，当变形后在元素边界上待解函数为

$$u_i=R_i(\xi_i)$$

所以

$$\delta u_i=R_{i,k}\delta x_k=R_{i,n}\delta_n \tag{6.206}$$

其中n为边界的外法线；δn为外法线的改变量。

将(6.206)式代入(6.200)式，得

$$\delta\mathscr{A}_{aa-1}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}-\left[\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\delta u_i \mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_a}\left[A_0 l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right]\delta x_k \mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\left[P_d+\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right)(R_{i,k}-u_{i,k})\delta x_k\right]ds\Big\}=0 \quad (6.207)$$

由于$\delta\bar{u}_i$与δx_k为任意函数，根据变分法基本引理，得

$$\left(\frac{\partial A(\varepsilon_{ij}(u_i))}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (6.208)$$

$$A_0l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (6.209)$$

$$P_d+\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right)(R_{i,k}-u_{i,k})\delta x_k=0 \qquad (S_1) \quad (6.210)$$

方程(6.194～6.198)、(6.201～6.205)、(6.208～6.210)是与变分问题等价的微分方程（6.194）式、交界条件（6.195）、(6.196)式（或(6.202)、(6.203)式，或(6.209)式)、边界条件(6.197)式及附加边界条件(6.198)式（或(6.205)式，或(6.210)式)。这些微分方程与条件是待解函数必须满足的方程与条件。

2．势能型有限元可动边界变分原理 I

对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足应变位移(1.32)式，在边界S_2上满足位移边界条件(1.40)式；在元素交界面S_{ab}上位移函数与δxj为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.211)式的位移函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\delta\left[\iiint_{V_a}A_0dv-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_iu_ids\right]+\iint_{S_a}A_0l_j\delta x_jds+\iint_{S_a\cap S_1}P_dds\right\}=0 \quad (6.211)$$

其中A_0为(6.189)式；P_d为(6.193)式。

3．势能型加权余数(广义伽略金)方程Ⅰ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足应变位移(1.32)式，在边界S_2上满足位移边界条件(1.40)式；在元素交界面上位移函数与δx_i为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.192)式（或(6.200)式，或(6.207)式）的位移函数为塑性形变理论问题的近似解。

4．势能型边界元可动边界变分原理Ⅰ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足平衡方程(1.31)式、应变位移(1.32)式、应力应变(1.34)式、边界条件(1.40)式；在元素交界面上δn为连续时，则满足边界变分方程(6.212)式的位移函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}\left[A_0+(R_{i,n}-u_{i,n})\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right]\delta n ds\right.$$
$$\left.+\iint_{S_a\cap S_1}\left[P_a+\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right)(R_{i,n}-u_{i,n})\delta n\right]ds\right\}=0 \tag{6.212}$$

当略去边界可动性的因素时，上述各类变分原理就退化为相应的势能型古典情况的变分原理。

6.3.2 势能型可动边界变分原理Ⅱ

基于塑性形变理论的广义变分原理的泛函，考虑到边界可动性的因素，研究塑性形变理论的可动边界的变分原理。

1．可动边界的变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，在可动边界的情况下，变形后固体系统的能量泛函(4.273)式变为

$$\mathscr{A}_{d\alpha-2}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a(\xi_i)} A_0(\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),u_{i,j}(\xi_i,\alpha),$$

$$\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha),\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha))\mathrm{d}v(\xi_i)$$

$$-\iint_{S_a(\xi_i)\cap S_1(\xi_i)} \bar{P}_i u_i(\xi_i,\alpha)\mathrm{d}s(\xi_i)$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2} \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}s \quad (6.213)$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)-\bar{F}_i u_i \quad (6.214)$$

边界S_2为固定边界。

(1) 化变动积分域为固定积分域表示

利用坐标变换(6.1)式，把泛函(6.213)式用固定积分域表示，则有

$$\mathscr{A}_{d\alpha-2}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a} A_0(\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),u_{i,j}(\xi_i,\alpha),$$

$$\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha),\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha))|J|\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1} \bar{P}_i u_i(\xi_i,\alpha)|J_i|\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2} \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}s\Bigg\} \quad (6.215)$$

其中$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式(6.10)式。

(2) 能量泛函的一阶变分

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零。泛函(6.215)式的一阶变分为

$$\delta \mathscr{A}_{d\alpha-2}(\alpha)=\frac{\partial A_{d\alpha-2}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[|J|\frac{\partial}{\partial \alpha}(A_0)+A_0\frac{\partial}{\partial \alpha}|J|\Big]_{\alpha=0}\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\Big[|J_i|\frac{\partial}{\partial \alpha}(\bar{P}_i u_i)+(\bar{P}_i u_i)\frac{\partial}{\partial \alpha}|J_i|\Big]_{\alpha=0}\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}(u_i-\bar{u}_i)\,\delta\Big[\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\Big)l_j\Big]\mathrm{d}s\Big\}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[-\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\Big)\bar{\delta}\varepsilon_{ij}$$

$$-\frac{1}{2}(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})\bar{\delta}\sigma_{ij}$$

$$-\Big(\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\Big)_{,j}+\bar{F}_i\Big)\bar{\delta}u_i\Big]\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_a}\Big[\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\Big)l_j(\bar{\delta}u_i)+A_0 l_j\delta x_j\Big]\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\Big[\bar{P}_i-\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\Big)l_j\Big]\bar{\delta}u_i\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}P_d\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}(u_i-\bar{u}_i)\bar{\delta}\Big[\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\Big)l_j\Big]\mathrm{d}s\Big\}=0$$

$$(6.216)$$

其中

$$P_d=A_0 l_j\delta x_j-(\bar{P}_i u_i\delta x_j)_{,j\neq i}$$

$$=\Big[\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)-\bar{F}_i u_i\Big]-(\bar{P}_i u_i \delta x_j)_{,j\neq i} \quad (6.217')$$

(3) 与变分问题等价的微分方程及条件

在可动边界能量泛函的驻值条件下，可求得与变分问题等价的微分方程、边界条件、交界条件和附加边界条件。

如果$\bar{\delta}\varepsilon_{ij}$，$\bar{\delta}\sigma_{ij}$，$\bar{\delta}u_i$与$\delta x_k$相互无关，且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.216)式得

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}=0 \qquad (V_a) \quad (6.217)$$

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (6.218)$$

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (6.219)$$

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (6.220)$$

$$(A_0 l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (6.221)$$

$$\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j=0 \qquad (S_1) \quad (6.222)$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (6.223)$$

$$P_d=A_0 l_j \delta x_j-(\bar{P}_i u_i \delta x_j)_{,j\neq i}=0 \qquad (S_1) \quad (6.224)$$

如果在元素边界上，令

$$\bar{\delta}u_i=\delta u_i-u_{i,k}\delta x_k \quad (6.225)$$

将(6.225)式代入方程(6.216)式，则有

$$\delta\mathscr{A}_{da\text{-}2}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\bar{\delta}\varepsilon_{ij}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\bar{\delta}\sigma_{ij}$$

$$-\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right)\delta u_i\Big]dv$$

$$+\iint_{S_a}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\delta u_i ds$$

$$+\iint_{S_a}\left[A_0 l_k-u_{i,k}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right]\delta x_k ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right]\delta u_i ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\left[P_d+\left(\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)\right.$$

$$\left.\cdot u_{i,k}\delta x_k\right]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}(u_i-\bar{u}_i)\bar{\delta}\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right]ds\Bigg\}=0 \tag{6.226}$$

如果$\bar{\delta}\varepsilon_{ij}$, $\bar{\delta}\sigma_{ij}$, $\bar{\delta}u_i$, δu_i与δx_k相互无关，且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.226)式得

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}=0 \qquad (V_a) \tag{6.227}$$

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \tag{6.228}$$

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \tag{6.229}$$

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.230}$$

$$A_0 l_k-u_{i,k}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.231}$$

$$\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j=0 \qquad (S_1) \tag{6.232}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \tag{6.233}$$

$$\mathrm{P}_d+\left[\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right]u_{i,k}\delta x_k=0 \qquad (S_1) \qquad (6.234)$$

如果δu_k与δx_k相关，当变形后在元素边界上待解函数为

$$u_i=R_i(\zeta_i)$$

所以

$$\delta u_i=R_{i,k}\delta x_k=R_{i,n}\delta n \qquad (6.235)$$

将(6.235)式代入(6.226)式，则有

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{A}_{da-2}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Big[-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\bar{\delta}\varepsilon_{ij}\\
&-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\bar{\delta}\sigma_{ij}\\
&-\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+F_i\right)\bar{\delta}u_i\Big]dv\\
&+\iint_{S_a}\Big[A_0l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\Big]\delta x_k ds\\
&+\iint_{S_a\cap S_1}\Big[\mathrm{P}_d-(R_{i,k}-u_{i,k})\Big(\bar{P}_i\\
&-\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j\Big)\delta x_k\Big]ds\\
&+\iint_{S_a\cap S_2}\Big[(\bar{u}_i-u_i)\bar{\delta}\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)l_j\Big]ds\Bigg\}=0
\end{aligned} \qquad (6.236)$$

由于$\bar{\delta}\varepsilon_{ij}$，$\bar{\delta}\sigma_{ij}$，$\bar{\delta}u_i$与$\delta x_k$相互无关，且为任意函数，根据变分法基本引理，得

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}=0 \qquad (V_a) \quad (6.237)$$

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{j,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (6.238)$$

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (6.239)$$

$$A_0 l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.240)$$

$$P_d-(R_{i,k}-u_{i,k})$$

$$\bar{P}_i-\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.241)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (6.242)$$

方程（6.217～6.224）式、(6.227～6.234）式、(6.238～6.242）式是与变分问题等价的微分方程(6.217～6.219)式、交界条件(6.220)、(6.221)式(或(6.230)、(6.231)式，或(6.240)式)、边界条件(6.222)、(6.223)式及附加边界条件(6.224)式(或(6.234)式，或(6.241)式)。这些微分方程与条件是可动边界变分问题的待解函数所必须满足的全部微分方程与条件。

2. 势能型有限元可动边界变分原理 Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素交界面上位移函数与δx_j为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.243)式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\bar{\delta}\left[\iiint_{V_a}A_0 dv-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i u_i ds\right.\right.$$
$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j(u_i-\bar{u}_i)ds\right]$$

$$+\iint_{S_a} A_0 l_j \delta x_j \mathrm{d}s + \iint_{S_a \cap S_1} P_d \mathrm{d}s \Big\} = 0 \tag{6.243}$$

其中A_0为(6.214)式；P_d为(6.217)式。

3. 势能型加权余数（广义伽略金）方程 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力函数为独立变量函数，在元素交界面上，位移函数与δx_j为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.216)式（或(6.226)式，或(6.236)式）的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

4. 势能型边界元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在元素内部待解函数满足应力应变(6.237)式、应变位移(6.238)式、平衡方程(6.239)式，在元素交界面上δn为连续函数时，则满足边界变分方程(6.244)式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iint_{S_a}\Big[A_0+(R_{i,n}-u_{i,n})\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)l_j\Big]\delta n\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\Big[P_d-(R_{i,n}-u_{i,n})\Big(\bar{P}_i-\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)l_j\Big)\delta n\Big]\mathrm{d}s+\iint_{S_a\cap S_2}\Big[(\bar{u}_i$$

$$-u_i)\delta\Big[\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)l_j\Big)\Big]\mathrm{d}s\Big\}=0 \tag{6.244}$$

6.3.3 势能型可动边界变分原理III

基于塑性形变理论的修正变分原理的泛函，在边界可动情况

下研究塑性形变理论的可动边界的变分原理。

1. 势能型有限元可动边界变分原理Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(6.245)式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\bar{\delta}\left[\iiint_{V_a}A_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a}P_i^s(u_i-u_i^s)\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_iu_i^s\mathrm{d}s\right]+\iint_{S_a}A_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s+\iint_{S_a\cap S_1}P_d\mathrm{d}s\right\}=0 \tag{6.245}$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)-\bar{F}_iu_i \tag{6.246}$$

$$P_d=A_0l_j\delta x_j-(\bar{P}_iu_i\delta x_j)_{,j\neq i} \tag{6.247}$$

2. 势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上位移、应力为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(6.248)式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\bar{\delta}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij}-u_{i,j}\right)\bar{\delta}\sigma_{ij}-\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right)\bar{\delta}u_i\right]\mathrm{d}v\right.$$

$$
-\iint_{S_a}\left[(u_i-u_i^s)\delta P_i^s+\left(P_i^s-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)\delta u_i\right]ds
$$

$$
+\iint_{S_a}A_0 l_j \delta x_j ds-\iint_{S_a\cap S_1}\left[(u_i-u_i^s)\delta P_i^s\right.
$$

$$
\left.+(\bar{P}_i-P_i^s)\delta u_i^s\right]ds
$$

$$
+\iint_{S_a\cap S_1}\left[P_d+\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j-\bar{P}_i\right)\delta u_i\right]ds
$$

$$
-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(u_i-\bar{u}_i)\delta P_i^s\right.
$$

$$
\left.+\left(P_i^s-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)\delta u_i\right]ds\Bigg\}=0 \tag{6.248}
$$

其中在元素交界面上$P_i^s\delta u_i^s$为相消项，在元素边界上δP_i^s还可取为

$$
\delta P_i^s=\delta P_i^s-\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)_{,k}^{a}\delta x_k \tag{6.249}
$$

或取为

$$
\delta P_i^s=\left[P_{i,k}^s-\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)_{,k}^{a}\right]\delta x_k \tag{6.250}
$$

3. 势能型边界元可动边界变分原理Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当在元素内部待解函数满足应变位移方程(4.275)式、应力应变(4.276)式、平衡方程(4.277)式；在元素边界上独立构造位移、应力为边界函数时，则满足边界变分方程(6.251)式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$
\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iint_{S_a}\left[(u_i-u_i^s)\delta P_i^s+\left(P_i^s-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right)\delta u_i\right]ds
$$

$$
-\iint_{S_a}A_0 l_j\delta x_j ds+\iint_{S_a\cap S_1}\left[(u_i-u_i^s)\delta P_i^s+(\bar{P}_i-P_i^s)\delta u_i^s\right]ds
$$

$$-\iint\limits_{s_a\cap s_1}\left[P_a+\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j-\overline{P}_i\right)\delta u_i\right]ds$$

$$+\iint\limits_{s_a\cap s_2}\left[(u_i-\overline{u}_i)\,\delta P_i^s\right.$$

$$\left.+\left(P_i^s-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_i\right)\delta u_i\right]ds\Bigg\}=0 \qquad (6.251)$$

其中在元素边界上δP_i^s还可以采用(6.249)式（或(6.250)式)。

6.3.4　余能型可动边界变分原理Ⅰ

在余能古典变分原理的泛函的基础上，在可动边界情况下研究塑性形变理论的可动边界变分原理。

1．可动边界的变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，在可动边界的情况下，变形后固体系统的能量泛函(3.10)式变为

$$\mathscr{A}_{db-1}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{V_a(\xi_i)}B_0(\xi_i(\alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))dv(\xi_i)\right.$$

$$\left.-\iint\limits_{s_a\cap s_2}\overline{u}_i\sigma_{ij}(\alpha)l_j ds\right\} \qquad (6.252)$$

式中

$$B_0=B(\sigma_{ij})$$

其中$B(\sigma_{ij})$为(1.51)式。

(1) 化变动积分域为固定积分域表示

利用坐标变换(6.1)式，可把泛函(6.252)式用固定积分域表示为

$$\mathscr{A}_{db-1}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{V_a}B_0(\xi_i(\alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))|J|dv\right.$$

$$-\iint_{S_a \cap S_2} \bar{u}_i \sigma_{ij}(\alpha) l_j ds \Bigg\} \qquad (6.253)$$

其中S_2为固定边界；$|J|$为雅各比行列式(6.10)式。

(2) 能量泛函的一阶变分

泛函实现极值的必要条件是一阶变分为零。泛函(6.253)式的一阶变分为

$$\delta \mathscr{A}_{ab-1}(\alpha) = \frac{\partial \mathscr{A}_{ab-1}(\alpha)}{\partial \alpha}\Bigg|_{\alpha=0}$$

$$= \sum_{a=1}^{M} \Bigg\{ \iiint_{V_a} \left[|J| \frac{\partial}{\partial \alpha}(B_0) + (B_0) \frac{\partial}{\partial \alpha} |J| \right]_{\alpha=0} dv$$

$$- \iint_{S_a \cap S_2} \bar{u}_i \delta\sigma_{ij} l_j ds \Bigg\}$$

$$= \sum_{a=1}^{M} \Bigg\{ \iiint_{V_a} \Big[(B_0)_{,i} \delta x_i + (B_0)_{,\sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij}$$

$$+ (B_0)(\delta x_i)_{,i} \Big] dv - \iint_{S_a \cap S_2} \bar{u}_i \delta\sigma_{ij} l_j ds \Bigg\} = 0 \qquad (6.254)$$

利用应力函数满足平衡方程(1.31)式，则有

$$\sum_{a=1}^{M} \iiint_{V_a} u_i \delta\sigma_{ij,j} dv$$

$$= \sum_{a=1}^{M} \Bigg\{ \iiint_{V_a} -u_{i,j} \delta\sigma_{ij} dv$$

$$+ \iint_{S_a} (u_i \delta\sigma_{ij} l_j) ds \Bigg\} = 0 \qquad (6.255)$$

将(6.255)与(6.254)两式相加，利用(6.6)式和Green定理，方程(6.254)式变为

$$\delta \mathscr{A}_{db-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}dv\right.$$

$$+\iint_{S_a}[u_i\delta\sigma_{ij}l_j+Bl_j\delta x_j]ds$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}(\bar{u}_i-u_i)\delta\sigma_{ij}l_jds\right\}=0 \qquad (6.256)$$

由上式分析可知，能量泛函的可动边界的变分可分为两部分，其中一部分为待解函数本身的改变（当积分域固定）产生的变分；另一部分为积分域的变动而产生的变分。

（3）与变分问题等价的微分方程及条件

在可动边界能量泛函的驻值条件下，可求得与变分问题等价的微分方程、边界条件、交界条件与附加边界条件。

如果$\bar{\delta}\sigma_{ij}$与δx_j相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.256)式得

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (6.257)$$

$$u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.258)$$

$$(Bl_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.259)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (6.260)$$

如果在元素边界上，令

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j&=\delta\sigma_{ij}l_j-(\sigma_{ij}l_j)_{,k}\delta x_k\\&=\delta\sigma_{ij}l_j-(\sigma_{ij}l_j)_{,n}\delta n\end{aligned} \qquad (6.261)$$

将(6.261)式代入(6.256)式，则有

$$\delta \mathscr{A}_{db-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right]\bar{\delta}\sigma_{ij}dv\right.$$

$$+\iint_{S_a} u_i \delta\sigma_{ij} l_j \mathrm{d}s + \iint_{S_a} [Bl_k - u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,k}]\delta x_k \mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a \cap S_2} (\bar{u}_i - u_i)\bar{\delta}\sigma_{ij} l_j \mathrm{d}s \Big\} = 0 \qquad (6.262)$$

如果$\bar{\delta}\sigma_{ij}$，$\delta\sigma_{ij}l_j$，δx_k相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.262)式得

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i} = 0 \qquad (V_a) \quad (6.263)$$

$$u_i \Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0} = 0 \qquad (6.264)$$

$$Bl_k - u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,k} \Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0} = 0 \qquad (6.265)$$

$$\bar{u}_i - u_i = 0 \qquad (S_2) \quad (6.266)$$

如果$\delta\sigma_{ij}l_j$与δx_k相关，变形后在元素边界上的待解函数为

$$\sigma_{ij} = T_i(\xi_i)$$

所以

$$\delta\sigma_{ij} = T_{i,k}\delta x_k = T_{i,n}\delta n \qquad (6.267)$$

将(6.267)式代入(6.262)式，得

$$\delta \mathscr{A}_{db-1} = \sum_{a=1}^{M} \Big\{ \iiint_{V_a} \Big[\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i} \Big] \bar{\delta}\sigma_{ij} \mathrm{d}v$$

$$+ \iint_{S_a} [Bl_k + (T_{i,k} - (\sigma_{ij}l_j)_{,k})u_i]\delta x_k \mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a \cap S_2} (\bar{u}_i - u_i)\bar{\delta}\sigma_{ij} l_j \mathrm{d}s \Big\} = 0 \qquad (6.268)$$

由于$\bar{\delta}\sigma_{ij}$与δx_k相互无关，且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.268)式得

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i} = 0 \qquad (V_a) \quad (6.269)$$

$$Bl_k+(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.270)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (6.271)$$

方程(6.257～6.260)、(6.263～6.266)与 (6.269～6.271)式是与可动边界变分问题等价的微分方程(6.257)、交界条件(6.258)、(6.259)式 (或(6.264)、(6.265)式，或(6.270)式)、边界条件(6.260)式。这些方程与条件是待解函数必须满足的。

2．余能型有限元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，若待解函数在元素内部满足平衡方程(1.31)式，在边界S_1上满足力的边界条件及力的附加边界条件时，则满足变分方程(6.272)式的应力、位移函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\delta\left[\iiint_{V_a}B_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{u}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right]+\iint_{S_a}B_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.272)$$

其中$B_0(\sigma_{ij})$为(1.51)式。

3．余能型加权余数（广义伽略金）方程 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足平衡方程(1.31)式，在边界S_1上满足力的边界条件及力的附加边界条件；在元素交界面上应力函数与δx_j为连续时，则满足泛函变分方程(6.256)式 (或(6.262)式，或(6.268)式) 的应力、位移函数为塑性形变理论问题的近似解。

4．余能型边界元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当在元素内部待解函数满足平衡方程(1.31)式、应力位移方程(6.257)式；在元素交界面上 δn 为连续函数时，则满足边界变分方程(6.273)式的应力、位移函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\left\{\iint_{S_\alpha}[B+(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j)_{,n})u_i]\delta n\mathrm{d}s\right.$$

$$\left.-\iint_{S_\alpha\cap S_2}(\bar{u}_i-u_i)\delta\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.273)$$

其中n为边界S_α的外法线；δn为外法线改变量。

6.3.5 余能型可动边界变分原理 II

在余能广义变分原理的泛函的基础上，在可动边界的情况下研究塑性形变理论的可动边界变分原理。

1. 可动边界的变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，在可动边界的情况下，变形后固体系统的能量泛函(4.317)式变为

$$\mathscr{A}_{db-2}(\alpha)=\sum_{\alpha=1}^{M}\left\{\iiint_{V_\alpha(\xi_i)}B_0(\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),\right.$$

$$\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha),\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha))\mathrm{d}v(\xi_i)$$

$$-\iint_{S_\alpha(\xi_i)\cap S_1(\xi_i)}(\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha)l_j$$

$$-\bar{P}_i)u_i(\xi_i,\alpha)\mathrm{d}s(\xi_i)$$

$$\left.-\iint_{S_\alpha\cap S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}(\alpha)l_j\mathrm{d}s\right\} \qquad (6.274)$$

其中

$$B_0=-B(\sigma_{ij})+\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+u_i\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+F_i\right] \qquad (6.275)$$

$B(\sigma_{ij})$为(1.51)式；$A(\varepsilon_{ij})$为(1.50)式。

(1)化变动积分域为固定积分域表示

利用坐标变换(6.1)式，可把泛函(6.274)式用固定积分域表

示为

$$\mathscr{A}_{db-2}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}B_0[\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha),$$

$$\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha)]|J|\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha)l_j-\bar{P}_i)u_i(\xi_i,\alpha)]|J_i|\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}(\alpha)l_j\mathrm{d}s\Bigg\} \tag{6.276}$$

其中S_2为固定边界，$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式(6.10)式。

(2) 能量泛函的一阶变分

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零。泛函(6.276) 式的一阶变分为

$$\delta\mathscr{A}_{db-2}(\alpha)=\frac{\partial\mathscr{A}_{db-2}}{\partial\alpha}\Bigg|_{\alpha=0}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Big[|J|\frac{\partial B_0}{\partial\alpha}+B_0\frac{\partial}{\partial\alpha}|J|\Big]_{\alpha=0}\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\Big[|J_i|\frac{\partial}{\partial\alpha}((\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i)$$

$$+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\frac{\partial}{\partial\alpha}|J_i|\Big]_{\alpha=0}\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u_i\delta}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\Bigg\}=0 \tag{6.277}$$

将(6.275)式代入(6.277)式，并 利 用 (6.6) 式 和 Green 定理，方程(6.277)式可变为

$$\delta\mathscr{A}_{db-2}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Big[\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\Big)\delta\sigma_{ij}$$

$$+\left(\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right)\bar{\delta} u_i$$

$$+\left(\sigma_{ij}-u_{k,i}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}\right)\right)\bar{\delta}\varepsilon_{ij}\Big]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i+P_d]\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}(\bar{u}_i-u_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a}u_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)\mathrm{d}s+\iint_{S_a}B_0 l_j\delta x_j\mathrm{d}s\Big\}=0 \tag{6.278}$$

其中

$$P_d=B_0 l_j\delta x_j-[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i(\delta x_j)_{,j\neq i}]$$

$$=\Big\{-B(\sigma_{ij})+\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+u_i\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]$$

$$-((\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i(\delta x_j)_{,j\neq i}\Big\} \tag{6.279}$$

(3) 与变分问题等价的微分方程与条件

在可动边界能量泛函的驻值条件下，可求得与变分问题等价的微分方程、边界条件、交界条件和附加边界条件。

如果在元素内部$\bar{\delta}\sigma_{ij}$，$\bar{\delta}\varepsilon_{ij}$，$\bar{\delta}u_i$，在元素边界上，$\bar{\delta}\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)$，$\bar{\delta}(u_i)$，$\bar{\delta}(\sigma_{ij}l_j)$，$\delta x_j$相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.278)式得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \sigma_{ij}}=0 \qquad (V_a) \tag{6.280}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \tag{6.281}$$

$$\sigma_{ij}-u_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}=0$$

或为

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (6.282)$$

$$u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.283)$$

$$B_0 l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.284)$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (6.285)$$

$$P_d=B_0 l_j\delta x_j-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i(\delta x_j)_{,j}=0 \qquad (S_1) \quad (6.286)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (6.287)$$

如果在元素边界上，令

$$\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)=\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)-\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)_{,k}\delta x_k \qquad (6.288)$$

将(6.288)式代入方程(6.278)式，则有

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{A}_{db\cdot 2}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Bigg[&\left(\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\right)\bar{\delta}\sigma_{ij}\\&+\left(\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right)\bar{\delta}u_i\\&+\left(\sigma_{ij}-u_{k,l}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\right)\right)\bar{\delta}\varepsilon_{ij}\Bigg]dv\\&-\iint_{S_a\cap S_1}\left[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i+P_d\right]ds\\&-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(\bar{u}_i-u_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j\right]ds\\&+\iint_{S_a}u_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)ds\end{aligned}$$

$$+\iint\limits_{S_0}\left[B_0 l_k - u_i\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j\right)_{,k}\right]\delta x_k ds\Bigg\}=0 \quad (6.289)$$

如果在元素内部，$\bar{\delta}\sigma_{ij}$，$\bar{\delta}\varepsilon_{ij}$，$\bar{\delta}u_i$，在元素边界上$\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j$，$\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j\right)$，$\bar{\delta}(du_i)$与$\delta x_k$相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.289)式得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=0 \qquad (V_a) \quad (6.290)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \quad (6.291)$$

$$\sigma_{ij}-u_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}=0 \qquad (V_a) \quad (6.292)$$

或为

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$$

$$u_i\Big|_{s_{ab}-0}^{s_{ab}+0}=0 \qquad (6.293)$$

$$B_0 l_k + u_i\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j\right)_{,k}\Bigg|_{s_{ab}-0}^{s_{ab}+0}=0 \qquad (6.924)$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (6.295)$$

$$P_d=B_0 l_j\delta x_j-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i(\delta x_j)_{,j\neq i}=0 \qquad (S_1) \quad (6.296)$$

$$\bar{u}_i-u_i=0 \qquad (S_2) \quad (6.297)$$

如果$\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_i\right)$与$\delta x_k$相关，则变形后在元素边界上的待解函数为

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j = T_i$$

所以

$$\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j\right)=T_{i,k}\delta x_k = T_{i,n}\delta n \qquad (6.298)$$

将(6.298)式代入(6.289)式，则得

$$
\begin{aligned}
\delta \mathscr{A}_{db-2} = \sum_{a=1}^{M} \Bigg\{ \iiint_{V_a} \Bigg[& \left(\varepsilon_{ij} - \frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} \right) \bar{\delta} \sigma_{ij} \\
& + \left(\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{,j} + \bar{F}_i \right) \bar{\delta} u_i \\
& + \left(\sigma_{ij} - u_{k,l} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right) \right) \bar{\delta} \varepsilon_{ij} \Bigg] \mathrm{d}v \\
& - \iint_{S_a \cap S_1} [(\sigma_{ij} l_j - \bar{P}_i) \bar{\delta} u_i + P_d] \mathrm{d}s \\
& - \iint_{S_a \cap S_2} [(\bar{u}_i - u_i) \bar{\delta} \sigma_{ij} l_j] \mathrm{d}s \\
& + \iint_{S_a} \left[B_0 l_k + \left(T_{i,k} - \left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j \right)_{,k} \right) u_i \right] \delta x_k \mathrm{d}s \Bigg\} = 0
\end{aligned}
\tag{6.299}
$$

如果在元素内部$\bar{\delta}\sigma_{ij}$，$\bar{\delta}\varepsilon_{ij}$，$\bar{\delta}u_i$，在元素边界上$\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j$，$\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)$与$\delta x_k$相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.299)式得

$$\varepsilon_{ij} - \frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \qquad (V_a) \tag{6.300}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{,j} + \bar{F}_i = 0 \qquad (V_a) \tag{6.301}$$

$$\sigma_{ij} - u_{k,l} \frac{\partial^2 A}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = 0$$

或为

$$\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i} = 0 \qquad (V_a) \tag{6.302}$$

$$\left[B_0 l_k + \left(T_{i,k} - \left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j \right)_{,k} \right) u_i \right] \Bigg|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0} = 0 \tag{6.303}$$

$$\sigma_{ij} l_j - \bar{P}_i = 0 \qquad (S_1) \tag{6.304}$$

$$P_d = B_0 l_j \delta x_j - (\sigma_{ij} l_j - \bar{P}_i) u_i (\delta x_j)_{,j} = 0 \qquad (S_1) \quad (6.305)$$

$$\bar{u}_i - u_i = 0 \qquad (S_2) \quad (6.306)$$

在驻值条件下求得能量泛函(6.276)式的变分条件为（6.280～6.287)式（或为(6.290～6.297)式，或为(6.300～6.306)式)。这些变分条件是与变分问题等价的微分方程(6.280～6.282)式、交界条件(6.283)、(6.284)式（或为(6.293)、(6.294)式，或为(6.303)式)、边界条件(6.285)、(6.287)式及附加边界条件(6.286)式。这些微分方程与条件是待解函数所必须满足的全部方程与条件。

2．余能型有限元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力函数为独立变量函数，在元素边界上用应变函数表示应力函数，且应变函数与改变量δx_j均为连续函数时，则满足变分方程(6.307)式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\delta\left[\iiint_{V_a} B_0 dv - \iint_{S_a \cap S_1} (\sigma_{ij} l_j - \bar{P}_i) u_i ds - \iint_{S_a \cap S_2} \bar{u}_i \sigma_{ij} l_j ds\right] + \iint_{S_a} B_0 l_j \delta x_j ds + \iint_{S_a \cap S_1} P_d ds\right\} = 0 \qquad (6.307)$$

其中B_0为(6.275)式，P_d为(6.279)式。

3．余能型加权余数（广义伽略金）方程 I

当对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数，及在元素边界上用应变函数表示应力函数，且应变函数与改变量δx_j均为连续函数时，则满足变分方程(6.278)式（或(6.289)式，或（6.

299)式）的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

4．余能型边界元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在元素内部位移、应变、应力函数满足方程(6.300)、(6.301)(6.302)式；在元素边界上应变函数与δn为连续函数时，则满足边界变分方程(6.308)式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}\left[B_0+\left(T_{i,n}-\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_i\right)_{,n}u_i\right]\delta n\mathrm{d}s\right.$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}l_i-\bar{P}_i)\delta\bar{u}_i+P_d]\mathrm{d}s$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}[(\bar{u}_i-u_i)\delta\sigma_{ij}l_j]\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.308)$$

6.3.6 余能型可动边界变分原理III

在修正变分原理的广义泛函的基础上，在可动边界的情况下研究塑性形变理论的可动边界变分原理。

1．余能型有限元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则满足泛函变分方程(6.309)式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\bar{\delta}\left[\iiint_{V_a}B_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a}u_i^s\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j-P_i^s\right)\mathrm{d}s\right.\right.$$

$$\left.\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_iP_i^s\mathrm{d}s\right]+\iint_{S_a}B_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.309)$$

其中B_0为(6.275)式；A为(1.50)式。

2. 余能型加权余数(广义伽略金)方程 Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上位移、应力函数为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(6.310) 式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{M}\bigg\{&\iiint_{V_a}\bigg[\left(\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\right)\bar{\delta}\sigma_{ij}+\left(\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+F_i\right)\bar{\delta}u_i \\
&+\left(\sigma_{ij}-\frac{\partial^2 A}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right)\bar{\delta}\varepsilon_{ij}\bigg]dv \\
&-\iint_{S_a}\bigg[\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-P_i^a\right)\bar{\delta}u_i^a+(u_i^a-u_i)\,\bar{\delta}\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_i\right)ds \\
&+\iint_{S_a}B_0 l_j\delta x_j ds-\iint_{S_a\cap S_1}\bigg[\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-P_i\right)\bar{\delta}u_i^a \\
&+(u_i^a-u_i)\,\bar{\delta}\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\bigg]ds-\iint_{S_a\cap S_2}\bigg[\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-P_i^a\right)\bar{\delta}u_i^a \\
&+(u_i^a-u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)+(\bar{u}_i-u_i^a)\overline{\delta P_i^a}\bigg]ds\bigg\}=0 \qquad (6.310)
\end{aligned}$$

其中B_0为(6.275)式；A为(1.50)式；B为(1.51) 式；在元素交界面上$u_i^a\overline{\delta P_i^a}$ 项为相消项；在元素边界上$\overline{\delta u_i}$项可取为

$$\bar{\delta}u_i^a=\delta u_i^a-u_{i,k}^a\delta x_k \qquad (6.311)$$

或取为

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}u_i^a&=(R_{ik}-u_{i,k}^a)\delta x_k \\
&=(R_{i,n}-u_{i,n}^a)\delta n \qquad (6.312)
\end{aligned}$$

3. 余能型边界元可动边界变分原理 Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足方程(5.349～5.351)式，在元素边界上独立构造位移、应力函数时，则满足边界变分方程(6.313)式的位移、应变、应力函数为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\left\{\iint_{S_\alpha}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j-P_i^s\right)\delta u_i^s+(u_i^s-u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)\right.\right.$$
$$\left.+B_0 l_j\delta x_j\right]ds$$
$$-\iint_{S_\alpha\cap S_1}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right)\delta u_i^s+(u_i^s-u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)\right]ds$$
$$-\iint_{S_\alpha\cap S_2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j-P_i^s\right)\delta u_i^s+(u_i^s-u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right)\right.$$
$$\left.\left.+(\bar{u}_i-u_i^s)\delta P_i^s\right]ds\right\}=0 \tag{6.313}$$

其中B_0为(6.275)式，A为(1.50)式；在元素交界面上$u_i^s\delta P_i^s$为相消项。

§6.4 塑性流动理论的可动边界变分原理

6.4.1 势能型可动边界变分原理Ⅰ

基于势能古典变分原理的泛函的基础上，在可动边界的情况下建立塑性流动理论问题的可动边界变分原理[6]。

1. 可动边界的变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，在可动边界的情况下，变形后固体系统的能量泛函(3.51)式变为

$$\mathscr{A}_{p2-1}(u)=\sum_{\alpha=1}^{M}\left\{\iiint_{V_\alpha(\xi_i)}A_0(\xi_i(\alpha),du_i(\xi_i,\alpha),\right.$$

$$d\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha))dv(\xi_i)$$

$$-\iint\limits_{S_\alpha(\xi_i)\cap S_1(\xi_i)} d\bar{P}_i du_i(\xi_i,\alpha)ds(\xi_i)\Big\} \qquad (6.314)$$

其中$A_0=A(d\varepsilon_{ij})$为(1.75)式。

(1) 化变动积分域为固定积分域

利用坐标变换(6.1)式，把泛函(6.314)式用固定积分域表示，则有

$$\mathscr{A}_{pa-1}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{V_a}A_0(\xi_i(\alpha),du_i(\xi_i,\alpha),d\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha))|J|dv$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_1} d\bar{P}_i du_i(\xi_i,\alpha)|J_i|ds\Big\} \qquad (6.315)$$

其中$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式(6.10)式。

(2) 能量泛函的一阶变分

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零。泛函(6.315)式的一阶变分为

$$\delta\mathscr{A}_{pa-1}(\alpha)=\frac{\partial A_{pa-1}(\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{V_a}\Big[|J|\frac{\partial}{\partial\alpha}(A_0)+(A_0)\frac{\partial}{\partial\alpha}|J|\Big]_{\alpha=0}dv$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_1}\Big[|J_i|\frac{\partial}{\partial\alpha}(d\bar{P}_i du_i)$$

$$+(d\bar{P}_i du_i)\frac{\partial}{\partial\alpha}|J_i|\Big]_{\alpha=0}ds\Big\}=0 \qquad (6.316)$$

利用应变增量与位移增量满足应变位移增量式(1.64)与(6.6)式及Green定理，可把(6.316)式化为

$$\delta\mathscr{A}_{pa-1}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{V_a}-\Big(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\Big)_{,j}\delta(du_i)dv$$

$$+\iint_{S_a}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)\delta(\mathrm{d}u_i)+Al_j\delta x_j\right]\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i\right)\delta(\mathrm{d}u_i)\right.$$

$$\left.\left.+\mathrm{d}P_p\right]\mathrm{d}s\right\}=0 \tag{6.317}$$

其中

$$\mathrm{d}P_p=Al_j\delta x_j-(\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i\,\delta x_j)_{,j\neq i} \tag{6.318}$$

(3) 与变分问题等价的微分方程及条件

在可动边界能量泛函的驻值条件下，可求得与变分问题等价的微分方程、边界条件、交界条件和附加边界条件。

如果$\bar{\delta}\mathrm{d}u_i$与$\delta x_k$相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.317)式得

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V_a) \tag{6.319}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.320}$$

$$(Al_j)_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.321}$$

$$\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{6.322}$$

$$\mathrm{d}P_p=Al_j\delta x_j-(\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i\,\delta x_j)_{,j\neq i}=0 \qquad (S_1) \tag{6.323}$$

如果在元素边界上，令

$$\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)=\delta(\mathrm{d}u_i)-(\mathrm{d}u_i)_{,k}\delta x_k \tag{6.324}$$

将(6.324)式代入方程(6.317)式，则有

$$\delta\mathscr{A}_{pa-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}v\right.$$

$$+\iint_{S_a}\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a}\left[Al_k-(\mathrm{d}u_i)_{,k}\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)\right]\delta x_k\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)-\mathrm{d}\bar{P}_i\right]\delta(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\left[\mathrm{d}P_p-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mathrm{d}\bar{P}_i\right)(\mathrm{d}u_i)_{,k}\delta x_k\right]\mathrm{d}s\Bigg\}=0 \qquad (6.325)$$

如果$\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)$，$\delta(\mathrm{d}u_i)$，$\delta x_k$相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.325)式得

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V_a) \quad (6.326)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.327)$$

$$Al_k-(\mathrm{d}u_i)_{,k}\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.328)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)-\mathrm{d}\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \quad (6.329)$$

$$dP_p-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i\right)(\mathrm{d}u_i)_{,k}\delta x_k=0 \qquad (S_1) \quad (6.330)$$

如果$\delta(\mathrm{d}u_i)$与δx_k相关，则变形后在元素边界上待解函数$\mathrm{d}u_i$为

$$\mathrm{d}u_i=\mathrm{d}R_i(\zeta_i)$$

所以

$$\delta(\mathrm{d}u_i)=(\mathrm{d}R_i)_{,k}\delta x_k=(\mathrm{d}R_i)_{,n}\delta n \qquad (6.331)$$

将(6.331)式代入方程(6.325)式，则得

$$\delta \mathscr{A}_{p2-1} = \sum_{a=1}^{M} \Big\{ \iiint_{V_a} -\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j} \bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}v$$

$$+ \iint_{S_a} \Big[Al_k + ((\mathrm{d}R_i)_{,k} - (\mathrm{d}u_i)_{,k})$$

$$\cdot \frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})} l_j \Big] \delta x_k \mathrm{d}s$$

$$+ \iint_{S_a \cap S_1} \Big[\mathrm{d}P_p + \left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})} l_j - \mathrm{d}P_i \right) \Big((\mathrm{d}R_i)_{,k}$$

$$- (\mathrm{d}u_i)_{,k} \Big) \delta x_k \Big] \mathrm{d}s \Big\} = 0 \qquad (6.332)$$

由于$\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)$与$\delta x_k$为任意函数，根据变分法基本引理，得

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j} = 0 \qquad (V_a) \quad (6.333)$$

$$Al_k + \Big((\mathrm{d}R_i)_{,k} - (\mathrm{d}u_i)_{,k} \Big) \left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})} l_j \right) \Bigg|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0} = 0 \qquad (6.334)$$

$$\mathrm{d}P_p + \left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})} l_j - \mathrm{d}\bar{P}_i \right) \Big((\mathrm{d}R_i)_{,k} - (\mathrm{d}u_i)_{,k} \Big) \delta x_k = 0$$

$$(S_1) \quad (6.335)$$

方程(6.319～6.323)、(6.326～6.330)与(6.333～6.335)式是与变分问题等价的微分方程(6.319)式、交界条件(6.320)、(6.321)式（或(6.327)、(6.328)式，或(6.334)式)、边界条件(6.322)式及附加边界条件(6.323)式（或(6.330)式，或(6.335)式)。这些方程与条件是待解函数所必须满足的方程与条件。

2．势能型有限元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足应力位移增量(1.64)式，在边界S_2上

满足位移边界条件(1.70)式；在元素边界上位移增量与δx_j为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.336)式的位移增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\delta\left[\iiint_{V_a} A_0 dv - \iint_{S_a\cap S_1} d\bar{P}_i du_i ds\right] + \iint_{S_a} A_0 l_j \delta x_j ds + \iint_{S_a\cap S_1} dP_p ds\right\} = 0 \qquad (6.336)$$

3. 势能型加权余数(广义伽略金)方程 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足应变位移增量(1.64)式，在边界S_2上满足位移边界条件(1.70)式，在元素边界上位移增量与δx_j为连续函数时，则满足变分方程(6.317)式（或(6.325)式，或(6.332)式）的位移增量为塑性流动理论问题的近似解。

4. 势能型边界元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，若待解函数在元素内部满足方程(1.63～1.65)式，在边界S_2上满足位移边界条件(1.70)式，在元素边界上δn为连续函数时，则满足边界变分方程(6.337)式的位移增量函数为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}\left[A_0 - \left((dR_i)_{,n} - (du_i)_{,n}\right)\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})} l_j\right]\delta n ds + \iint_{S_a\cap S_1}\left[P_p + \left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})} l_j - d\bar{P}_i\right)\left((dR_i)_{,n} - (du_i)_{,n}\right)\delta n\right] ds\right\} = 0 \qquad (6.337)$$

若略去边界可动性因素，上述各类原理就退化为相应的势能型原理。

6.4.2 势能型可动边界变分原理 II

基于势能型广义变分原理的泛函，考虑到边界可动性的因素建立塑性流动理论问题的可动边界的变分原理。

1．可动边界的变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，在可动边界的情况下，变形后固体系统的能量泛函(4.377)式变为

$$\mathscr{A}_{pa-2}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a(\xi_i)}A_0(\xi_i(\alpha),\mathrm{d}u_i(\xi_i,\alpha),\mathrm{d}u_{i,j}(\xi_i,\alpha),$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha),\mathrm{d}\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha)\mathrm{d}v(\xi_i)$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_2}\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j$$

$$\cdot(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i)\mathrm{d}s\Big\}\tag{6.338}$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\tag{6.339}$$

式中$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$为用$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$表示势能密度的(4.355)式，边界$S_2$为固定边界。

(1) 化变动积分域为固定积分域

利用坐标变换(6.1)式，把泛函(6.338)式用固定积分域表示，则有

$$\mathscr{A}_{pa-2}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}A_0(\xi_i(\alpha),\mathrm{d}u_i(\xi_i,\alpha),\mathrm{d}u_{i,j}(\xi_i,\alpha),$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha),\mathrm{d}\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))|J|\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1} \mathrm{d}\bar{P}_i \mathrm{d}u_i(\xi_i,\alpha)|J_i|\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2} \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i)\mathrm{d}s\ \Bigg\}$$

(6.340)

其中$|J|$与$|J_i|$为雅比各行列式(6.10)式。

(2) 能量泛函的一阶变分

泛函实现极值的必要条件为一阶变分 为零。泛 函(6.340)式的一阶变分为

$$\delta\mathscr{A}_{pa-2}(\alpha)=\frac{\partial\mathscr{A}_{pa-2}(\alpha)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\left[|J|\frac{\partial A_0}{\partial\alpha}+(A_0)\frac{\partial}{\partial\alpha}|J|\right]_{\alpha=0}\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\Bigg[|J_i|\frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i)$$

$$+(\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i)\frac{\partial}{\partial\alpha}|J_i|\Bigg]_{\alpha=0}\mathrm{d}s$$

$$-\bar{\delta}\iint_{S_a\cap S_2}(\mathrm{d}u-\mathrm{d}\bar{u}_i)\left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]\mathrm{d}s\Bigg\}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Bigg[-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\bar{\delta}(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$$

$$-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij})$$

$$-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)\Bigg]\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_a}\left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j(\bar{\delta}\mathrm{d}u_i)+A_0l_j\delta x_j\right]\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[\mathrm{d}\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1} dP_p ds-\iint_{S_a\cap S_2}(du_i-d\bar{u}_i)\bar{\delta}\left[\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]ds\Big\}=0 \tag{6.341}$$

其中

$$dP_p=A_0 l_j\delta x_j-(d\bar{P}_i du_i\delta x_j)_{,j\neq i} \tag{6.342}$$

A_0为(6.339)式。

(3) 与变分问题等价的微分方程及条件

在可动边界能量泛函的驻值条件下，可求得与变分问题等价的微分方程、边界条件、交界条件和附加边界条件。

如果$\bar{\delta}(d\sigma_{ij})$，$\bar{\delta}(d\varepsilon_{ij})$，$\bar{\delta}(du_i)$与$\delta x_k$相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.341)式得

$$d\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}=0 \qquad (V_a) \tag{6.343}$$

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0 \qquad (V_a) \tag{6.344}$$

$$\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V_a) \tag{6.345}$$

$$\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.346}$$

$$(A_0 l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.347}$$

$$d\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j=0 \qquad (S_1) \tag{6.348}$$

$$dP_p=0 \qquad (S_1) \tag{6.349}$$

$$du_i-d\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \tag{6.350}$$

如果在元素边界上，令

$$\bar{\delta}(du_i)=\delta(du_i)-(du_i)_{,k}\delta x_k \tag{6.351}$$

将(6.351)式代入方程(6.341)式，则得

$$
\begin{aligned}
\delta \mathscr{A}_{p\sigma-2}(\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{M} \Big\{ & \iiint_{V_\alpha} \Big[-\frac{1}{2}\Big(\mathrm{d}\sigma_{ij} - \frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\Big)\bar{\delta}(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}) \\
& - \frac{1}{2}\Big(\mathrm{d}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j} - \frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\Big)\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij}) \\
& - \frac{1}{2}\Big(\mathrm{d}\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\Big)_{,j}\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)\Big]\mathrm{d}v \\
& + \iint_{S_\alpha}\Big[\frac{1}{2}\Big(\mathrm{d}\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\Big)l_j\,\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s \\
& + \iint_{S_\alpha}\Big[A_0 l_k - (\mathrm{d}u_i)_{,k}\Big(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij} \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\Big)l_j\Big]\delta x_k \mathrm{d}s \\
& - \iint_{S_\alpha \cap S_1}\Big[\mathrm{d}\bar{P}_i - \frac{1}{2}\Big(\mathrm{d}\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\Big)l_j\Big]\delta(\mathrm{d}u_i)\,\mathrm{d}s \\
& + \iint_{S_\alpha \cap S_1}\Big[\mathrm{d}P_p + \Big(\mathrm{d}\bar{P}_i - \frac{1}{2}\Big(\mathrm{d}\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\Big)l_j\Big) \\
& \cdot (\mathrm{d}u_{i,k})\delta x_k\Big]\mathrm{d}s \\
& - \iint_{S_\alpha \cap S_2}(u_i - \bar{u}_i)\,\bar{\delta}\Big[\frac{1}{2}\Big(\mathrm{d}\sigma_{ij} + \frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\Big)l_j\Big]\mathrm{d}s\Big\} \\
= 0 \qquad & \qquad (6.352)
\end{aligned}
$$

如果$\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij})$,$\bar{\delta}(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$，$\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)$，$\delta(\mathrm{d}u_i)$与$\delta x_k$相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.351)式得

$$
\mathrm{d}\sigma_{ij} - \frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})} = 0 \qquad (V_\alpha) \quad (6.353)
$$

$$
\mathrm{d}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j} - \frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i} = 0 \qquad (V_\alpha) \quad (6.354)
$$

$$\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V_a) \qquad (6.355)$$

$$\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\Big|_{s_{ab}-0}^{s_{ab}+0}=0 \qquad (6.356)$$

$$A_0 l_k-(du_{i,k})\left(\frac{1}{2}d\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\Big|_{s_{ab}-0}^{s_{ab}+0}=0 \qquad (6.357)$$

$$d\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j=0 \qquad (S_1) \qquad (6.358)$$

$$dP_p+\left[d\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right](du_{i,k})\delta x_k=0 \qquad (S_1) \qquad (6.359)$$

$$du_i-d\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \qquad (6.360)$$

如果$\delta(du_i)$与δx_k相关，则变形后在元素边界上待解函数为

$$du_i=dR_i(\xi_i)$$

所以

$$\delta(du_i)=dR_{i,k}\delta x_k=dR_{i,n}\delta n \qquad (6.361)$$

将(6.361)式代入方程(6.352)式，则有

$$\begin{aligned}\delta_c\mathscr{A}_{pa-2}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Bigg[-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)\bar{\delta}(d\varepsilon_{ij})\\&-\frac{1}{2}\left(d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}\right)\bar{\delta}(d\sigma_{ij})\\&-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}(\bar{\delta}du_i)\Bigg]dv\\&+\iint_{S_a}\Bigg[A_0 l_k+(dR_{i,k}-du_{i,k})\Bigg(\frac{1}{2}d\sigma_{ij}\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\Bigg)l_j\Bigg]\delta x_k ds+\iint_{S_a\cap S_1}\Bigg[dP_p-(dR_{i,k}\\&-du_{i,k})\left(d\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)\delta x_k\Bigg]ds\end{aligned}$$

$$-\iint\limits_{s_a \cap s_2} (\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i)\bar{\delta}\left[\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]\mathrm{d}s\Bigg\}=0 \qquad (6.362)$$

由于$\bar{\delta}(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$，$\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij})$，$\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)$ 与δx_k相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，得

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}=0 \qquad (V_a) \quad (6.363)$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (6.364)$$

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V_a) \quad (6.365)$$

$$A_0 l_k+(\mathrm{d}R_{i,k}-\mathrm{d}u_{i,k})\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\Big|_{s_{ab}-0}^{s_{ab}+0}$$

$$=0 \qquad (6.366)$$

$$\mathrm{d}P_p-(\mathrm{d}R_{i,k}-\mathrm{d}u_{i,k})\Big[\mathrm{d}\bar{P}_i$$

$$-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\Big]\delta x_k=0 \qquad (S_1) \quad (6.367)$$

$$\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (6.368)$$

方程(6.343～6.350)、(6.353～6.360)、(6.363～6.368)式是与变分问题等价的微分方程（6.343～6.345）式、交界条件(6.346)与(6.347)式(或为(6.356)、(6.357)式，或为（6.366）式)、边界条件(6.348)与(6.350)式及附加边界条件(6.349)式（或为(6.359)式，或为(6.367)式)。这些微分方程与条件是待解函数应满足的全部微分方程与条件。

2．势能型有限元可动边界变分原理 Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，

当位移、应变、应力增量为独立变量函数；在元素交界面上位移增量与δx_j为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.369)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\delta\left[\iiint_{V_a}A_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_1}\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i\mathrm{d}s\right.\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i)\mathrm{d}s\right]$$

$$\left.+\iint_{S_a}A_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s+\iint_{S_a\cap S_1}\mathrm{d}P_P\mathrm{d}s\right\}=0\qquad(6.369)$$

其中A_0为(6.339)式；$\mathrm{d}P_P$为(6.342)式。

3. 势能型加权余数(广义伽略金)方程Ⅰ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力增量为独立变量函数；在元素交界面上，位移增量函数与δx_j为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.341)式（或为(6.352)式，或为(6.362)式）的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

4. 势能型边界元可动边界变分原理Ⅰ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当在元素内部待解函数满足(6.343～6.345)式；在元素交界面上δn为连续函数时，则满足边界变分方程(6.370)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}\left[A_0+(\mathrm{d}R_{i,n}-\mathrm{d}u_{i,n})\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]\delta n\mathrm{d}s\right.$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[\mathrm{d}P_P-(\mathrm{d}R_{i,n}-\mathrm{d}u_{i,n})(\mathrm{d}\bar{P}_i\right.$$

$$-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)\delta n\Big]ds$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_2}(du_i-d\bar{u}_i)\delta\left[\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]ds\Big\}=0 \tag{6.370}$$

6.4.3 势能型可动边界变分原理III

在修正变分原理的广义泛函的基础上，在可动边界的情况下建立塑性流动理论问题的可动边界变分原理。

1. 势能型有限元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上，位移、应力增量为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(6.371)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\delta\Big[\iiint\limits_{V_a}A_0dv-\iint\limits_{S_a}dP_i^s(du_i-du_i^s)ds$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_1}d\bar{P}_i du_i^s ds\Big]+\iint\limits_{S_a}A_0 l_j\delta x_j ds$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_1}dP_p ds\Big\}=0 \tag{6.371}$$

其中A_0为(6.339)式；dP_p为(6.342)式。

2. 势能型加权余数（广义伽略金）方程 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力函数为独立变量函数；在元素边界上，位移、应力增量为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(6.372)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Bigg[&-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\bar{\delta}(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\\
&-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij})\\
&-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)\Bigg]\mathrm{d}v\\
&-\iint_{S_a}\Bigg[(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}u_i^s)\bar{\delta}(\mathrm{d}P_i^s)+\Bigg(\mathrm{d}P_i^s\\
&-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\Bigg)\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)-A_0 l_j\delta x_j\Bigg]\mathrm{d}s\\
&-\iint_{S_a\cap S_1}\Bigg[(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}u_i^s)\bar{\delta}(\mathrm{d}P_i^s)+(\mathrm{d}P_i-\mathrm{d}P_i^s)\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i^s)\\
&+\left(\mathrm{d}P_i^s-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)\Bigg]\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_a\cap S_1}\mathrm{d}P_p\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_2}\Bigg[(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}u_i^s)\bar{\delta}(\mathrm{d}P_i^s)\\
&+\left(\mathrm{d}P_i^s-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)\Bigg]\mathrm{d}s\Bigg\}=0
\end{aligned}
\tag{6.372}
$$

其中在元素交界面上$\mathrm{d}P_i^s\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i^s)$为相消项；在元素边界上$\bar{\delta}(\mathrm{d}P_i^s)$还可取为

$$
\bar{\delta}(\mathrm{d}P_i^s)=\delta(\mathrm{d}P_i^s)-\left(\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)_{,k}^{a}\delta x_k
\tag{6.373}
$$

或取为

$$
\bar{\delta}(\mathrm{d}P_i^s)=\left[\mathrm{d}P_{i,k}^s-\left(\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right)_{,k}^{a}\right]\delta x_k
\tag{6.374}
$$

3．势能型边界元可动边界变分原理Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足应力应变增量(5.418)式、应变位移增量(5.419)式、平衡方程(5.420)式，在元素边界上独立构造位移、应力增量函数时，则满足边界变分方程(6.375)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{N}\Big\{\iint_{S_a}\Big[(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}u_i^s)\bar{\delta}(\mathrm{d}P_i^s)\\
&\quad+\Big(\mathrm{d}P_i^s-\frac{1}{2}\Big(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\Big)l_j\Big)\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)\Big]\mathrm{d}s\\
&\quad-\iint_{S_a}A_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s+\iint_{S_a\cap S_1}\Big[(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}u_i^s)\bar{\delta}(\mathrm{d}P_i^s)\\
&\quad+(\mathrm{d}\bar{P}_i-\mathrm{d}P_i^s)\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i^s)\Big]\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_1}\Big[\mathrm{d}P_d\\
&\quad+\Big(\mathrm{d}P_i^s-\frac{1}{2}\Big(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\Big)l_j\Big)\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)\Big]\mathrm{d}s\\
&\quad+\iint_{S_a\cap S_2}\Big[(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}u_i^s)\bar{\delta}(\mathrm{d}P_i^s)\\
&\quad+\Big(\mathrm{d}P_i^s-\frac{1}{2}\Big(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\Big)l_j\Big)\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)\Big]\mathrm{d}s\Big\}=0
\end{aligned}
\tag{6.375}
$$

其中在元素边界上，$\bar{\delta}(\mathrm{d}P_i^s)$为(6.373)式（或(6.374)式)。

6.4.4 余能型可动边界变分原理Ⅰ

在余能古典变分原理的泛函的基础上，在可动边界条件下建立塑性流动理论的可动边界变分原理。

1. 可动边界的变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，在可动边界的条件下，变形后固体系统的能量泛函(3.52)式变为

$$\underset{pb-1}{\mathscr{A}}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}B_0(\xi_i(\alpha),\mathrm{d}\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))\mathrm{d}v(\xi_i)\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\}\tag{6.376}$$

其中$B_0=B(\mathrm{d}\sigma_{ij})$为(1.76)式。

(1) 化变动积分域为固定积分域

利用坐标变换(6.1)式，可把泛函(6.376)式用固定积分域表示为

$$\underset{pb-1}{\mathscr{A}}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}B_0(\xi_i(\alpha),\mathrm{d}\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))|J|\mathrm{d}v\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\}\tag{6.377}$$

其中S_2为固定边界；$|J|$为雅各比行列式(6.10)式。

(2) 能量泛函的一阶变分

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零。泛函(6.377)式的一阶变分为

$$\delta\underset{pb-1}{\mathscr{A}}(\alpha)=\left.\frac{\partial\underset{pb-1}{\mathscr{A}}(\alpha)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[|J|\frac{\partial}{\partial\alpha}(B_0)+(B_0)\frac{\partial}{\partial\alpha}|J|\right]_{\alpha=0}\mathrm{d}v\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s\right\}$$

$$= \sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{V_a}\left[(B_0)_{,i}\delta x_i+(B_0)_{,\mathrm{d}\sigma'_{ij}}\delta(\mathrm{d}\sigma'_{ij})\right.\right.$$

$$\left.\left.+(B_0)(\delta x_i)_{,i}\right]\mathrm{d}v-\iint\limits_{S_a\cap S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s\right\}=0 \tag{6.378}$$

如果应力函数满足平衡方程(1.63)式，则有

$$\sum_{a=1}^{M}\iiint\limits_{V_a}\mathrm{d}u_i\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij,j})\mathrm{d}v=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{V_a}-\mathrm{d}u_{i,j}\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})\mathrm{d}v\right.$$

$$\left.+\iint\limits_{S_a}\mathrm{d}u_i\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s\right\}=0 \tag{6.379}$$

将(6.379)式与(6.378)式相加，利用(6.6)式和Green定理，方程(6.378)式变为

$$\delta\mathscr{A}_{pb-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{V_a}\left[\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}-\frac{1}{2}(\mathrm{d}u_{i,j}+\mathrm{d}u_{j,i})\right]\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})\mathrm{d}v\right.$$

$$+\iint\limits_{S_a}[\mathrm{d}u_i\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)+Bl_j\delta x_j]\mathrm{d}s$$

$$\left.-\iint\limits_{S_a\cap S_2}(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s\right\}=0 \tag{6.380}$$

(3) 与变分问题等价的微分方程与条件

在可动边界能量泛函的驻值条件下，可求得与变分问题等价的微分方程、边界条件、交界条件与附加边界条件。

如果$\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})$与$\delta x_j$相互无关，且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.380)式得

$$\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \tag{6.381}$$

$$\mathrm{d}u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.382}$$

$$(Bl_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.383}$$

$$\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i=0 \qquad (S_2) \tag{6.384}$$

如果在元素边界上，令

$$\begin{aligned}\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)&=\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)-(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)_{,k}\delta x_k\\&=\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)-(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)_{,n}\delta n\end{aligned} \tag{6.385}$$

将(6.385)式代入(6.380)式，则有

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{A}_{pb-1}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{&\iiint_{V_a}\left[\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right]\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})\,\mathrm{d}v\\&+\iint_{S_a}\mathrm{d}u_i\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s+\iint_{S_a}[Bl_k\\&-\mathrm{d}u_i(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)_{,k}]\delta x_k\mathrm{d}s\\&-\iint_{S_a\cap S_2}(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i)\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s\Big\}=0\end{aligned} \tag{6.386}$$

如果$\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})$，$\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)$，$\delta x_k$相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.386)式得

$$\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \tag{6.387}$$

$$\mathrm{d}u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.388}$$

$$Bl_k-\mathrm{d}u_i(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)_{,k}\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.389}$$

$$\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i=0 \qquad (S_2) \tag{6.390}$$

如果$\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)$与$\delta x_k$相关，则变形后在元素边界上待解函数为

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j=\mathrm{d}T_i(\xi_i)$$

所以

$$\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)=\mathrm{d}T_{i,k}\delta x_k=\mathrm{d}T_{i,n}\delta n \tag{6.391}$$

将(6.391)式代入(6.386)式，则得

$$\delta \mathscr{A}_{pb-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right]\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij})\,\mathrm{d}v\right.$$

$$+\iint_{S_a}\left[Bl_k+(\mathrm{d}T_{i,k}-(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)_{,k}\mathrm{d}u_i\right]\delta x_k\mathrm{d}s$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i)\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s\right\}=0 \quad (6.392)$$

由于$\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij})$与$\delta x_k$相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.392)式得

$$\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \quad (6.393)$$

$$Bl_k+\left(\mathrm{d}T_{i,k}-(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)_{,k}\right)\mathrm{d}u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (6.394)$$

$$\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i=0 \qquad (S_2) \quad (6.395)$$

方程(6.381～6.384)、(6.387～6.390)与(6.393～6.395)式是与可动边界变分问题等价的微分方程(6.381)式、交界条件(6.382)、(6.383)式（或(6.388)、(6.389)式，或(6.394)式)、边界条件(6.384)式。这些方程与条件是待解函数必须满足的。

2. 余能型有限元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足平衡方程(1.63)式，在边界S_1上满足力的边界条件及力的附加边界条件时，则满足变分方程(6.396)式的应力、位移增量函数为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\bar{\delta}\left[\iiint_{V_a}B_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right]\right.$$

$$\left.+\iint_{S_a}B_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.396)$$

其中$B_0(d\sigma_{ij})$为(1.76)式

3. 余能型加权余数(广义伽略金)方程 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足平衡方程(1.63)式，在边界S_1上满足力的边界条件及力的附加边界条件；在元素交界面上应力增量与δx_j为连续函数时，则满足变分方程(6.380)式（或(6.386)式，或(6.392)式)的应力、位移增量为塑性流动理论问题的近似解。

4. 余能型边界元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，若在元素内部待解函数满足平衡方程(1.63)式、应力位移增量(6.381)式；在元素交界面上δn为连续函数时，则满足边界变分方程(6.397)式的位移、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}[B+(dT_{i,n}-(d\sigma_{ij}l_j)_{,n})du_i]\delta n ds\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}(d\bar{u}_i-du_i)\delta(d\sigma_{ij}l_j)ds\right\}=0 \qquad (6.397)$$

其中n为边界S_a的外法线；δn为外法线改变量。

6.4.5 余能型可动边界变分原理 II

基于余能广义变分原理的泛函，在可动边界的条件下建立塑性流动理论的可动边界变分原理。

1. 可动边界的变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，在可动边界的条件下，变形后固体系统的能量泛函(4.434)式变为

$$\mathscr{A}_{p6-2}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a(\xi_i)}B_0(\xi_i(\alpha),du_i(\xi_i,\alpha),d\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha),\right.$$

$$d\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha))dv(\xi_i)$$

$$-\iint\limits_{S_a(\xi_i)\cap S_1(\xi_i)}(d\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha)l_j$$

$$-d\bar{P}_i)du_i(\xi_i,\alpha)ds(\xi_i)$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_2}d\bar{u}_i d\sigma_{ij}(\alpha)l_j ds \tag{6.398}$$

其中

$$B_0=-B(d\sigma_{ij})+d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}+du_i\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j} \tag{6.399}$$

$A(d\varepsilon_{ij})$为(4.355)式；$B(d\sigma_{ij})$为(4.356)式。

(1) 化变动积分域为固定积分域

利用(6.1)式坐标变换，可把泛函(6.398)式用固定积分域表示为

$$\mathscr{A}_{pb-2}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{V_a}B_0(\xi_j(\alpha),du_i(\xi_i,\alpha),\right.$$

$$d\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha)d\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha))|J|dv$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_1}[d\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha)l_j-d\bar{P}_i]du_i(\xi_i,\alpha)|J_i|ds$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_2}d\bar{u}_i d\sigma_{ij}l_j ds \tag{6.400}$$

其中S_2为固定边界；$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式(6.10)式。

(2) 能量泛函的一阶变分

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零。泛函(6.400)式的一阶变分为

$$\delta\mathscr{A}_{pb-2}(\alpha)=\frac{\partial A_{pb-2}}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[|J|\frac{\partial}{\partial\alpha}(B_0)+(B_0)\frac{\partial}{\partial\alpha}|J|\Big]_{\alpha=0}\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\Big[|J_i|\frac{\partial}{\partial\alpha}((\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i)\mathrm{d}u_i)$$

$$+((\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i)\mathrm{d}u_i)\frac{\partial}{\partial\alpha}|J_i|\Big]_{\alpha=0}\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (6.401)$$

将(6.399)式代入(6.401)式，再利用(6.6)式和Green定理，由方程(6.401)式可得

$$\delta\mathscr{A}_{pb-2}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[\Big(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}\Big)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})$$

$$+\Big(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\Big)_{,j}\delta(\mathrm{d}u_i)+\Big(\mathrm{d}\sigma_{ij}$$

$$-\mathrm{d}u_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\Big)\delta(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\Big]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i)\delta(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\mathrm{d}P_p\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_2}(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a}\mathrm{d}u_i\bar{\delta}\Big(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\Big)\mathrm{d}s+\iint_{S_a}B_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (6.402)$$

其中

$$\mathrm{d}P_p=B_0l_j\delta x_j-((\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i)\mathrm{d}u_i(\delta x_j))_{,j=i}$$

$$=\Big(-B(\mathrm{d}\sigma_{ij})+\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}+\mathrm{d}u_i\Big(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\Big)_{,j}$$

$$-((d\sigma_{ij}l_j-d\bar{P}_i)du_i(\delta x_j))_{,j\neq i} \quad (6.403)$$

(3) 与变分问题等价的微分方程与条件

在可动边界的能量泛函的驻值条件下，可求得与变分问题等价的微分方程、边界条件、交界条件和附加边界条件。

如果在元素内部$\bar{\delta}(d\sigma_{ij})$,$\bar{\delta}(d\varepsilon_{ij})$,$\bar{\delta}(du_i)$和在元素边界上$\bar{\delta}(du_i)$，$\bar{\delta}(d\sigma_{ij}l_j)$,$\bar{\delta}\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)$与$\delta x_k$都相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.402)式得

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(d\sigma_{ij})}=0 \quad (V_a) \quad (6.404)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \quad (V_a) \quad (6.405)$$

$$d\sigma_{ij}-du_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(d\varepsilon_{ij})\partial(d\varepsilon_{kl})}=0$$

或

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0 \quad (V_a) \quad (6.406)$$

$$du_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (6.407)$$

$$B_0l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (6.408)$$

$$d\sigma_{ij}l_j-d\bar{P}_i=0 \quad (S_1) \quad (6.409)$$

$$dP_p=B_0l_j\delta x_j-((d\sigma_{ij}l_j-d\bar{P}_i)du_i(\delta x_j))_{,j\neq i} \quad (S_1) \quad (6.410)$$

$$d\bar{u}_i-du_i=0 \quad (S_2) \quad (6.411)$$

如果在元素边界上，令

$$\bar{\delta}\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)=\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)-\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,k}\delta x_k \quad (6.412)$$

将(6.412)式代入方程(6.402)式，则有

$$\delta\mathscr{A}_{pb-2}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\left(d\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(d\sigma_{ij})}\right)\bar{\delta}(d\sigma_{ij})\right.\right.$$

$$+\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\bar{\delta}(du_i)+\left(d\sigma_{ij}\right.$$

$$\left.\left.-du_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(d\varepsilon_{ij})\partial(d\varepsilon_{kl})}\right)\bar{\delta}(d\varepsilon_{ij})\right]dv$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[(d\sigma_{ij}l_j-d\bar{P}_i)\bar{\delta}(du_i)-dP_a\right]ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}\left[(d\bar{u}_i-du_i)\bar{\delta}(d\sigma_{ij}l_j)\right]ds$$

$$+\iint_{S_a}du_i\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)ds$$

$$\left.+\iint_{S_a}\left[B_0l_k-du_i\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{,k}\right]\bar{\delta}x_k ds\right\}=0$$

(6.413)

如果在元素内部$\bar{\delta}(d\sigma_{ij}),\bar{\delta}(d\varepsilon_{ij}),\bar{\delta}(du_i)$，在元素边界上$\bar{\delta}(d\sigma_{ij}l_j),\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)$，$\bar{\delta}(du_i)$与$\delta x_k$都相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.413)式得

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(d\sigma_{ij})}=0 \qquad (V_a) \qquad (6.414)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V_a) \qquad (6.415)$$

$$d\sigma_{ij}-du_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(d\varepsilon_{ij})\partial(d\varepsilon_{kl})}=0$$

或得

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0 \qquad (V_a) \qquad (6.416)$$

$$\mathrm{d}u_i\Big|_{s_{ab}-0}^{s_{ab}+0}=0 \tag{6.417}$$

$$B_0 l_k+\mathrm{d}u_i\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{,k}\Big|_{s_{ab}-0}^{s_{ab}+0}=0 \tag{6.418}$$

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{6.419}$$

$$\mathrm{d}P_p=B_0 l_j\delta x_j-\Big((\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i)\mathrm{d}u_i(\delta x_j)\Big)_{,j\neq i}=0$$

$$(S_1) \tag{6.420}$$

$$\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i=0 \qquad (S_2) \tag{6.421}$$

如果在元素边界上$\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)$与$\delta x_k$相关，则变形后在元素边界上的待解函数为

$$\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j=T_i$$

所以

$$\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)=T_{i,k}\delta x_k=T_{i,n}\delta n \tag{6.422}$$

将(6.422)式代入(6.413)式，得

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{A}_{pb-2}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Bigg[&\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}\right)\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij})\\&+\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\delta(\mathrm{d}u_i)+\Bigg(\mathrm{d}\sigma_{ij}-\mathrm{d}u_{k,l}\\&\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}\Bigg)\bar{\delta}(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\Bigg]\mathrm{d}v\\&-\iint_{s_a\cap s_1}[((\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i)\,\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)+\mathrm{d}P_p]\mathrm{d}s\\&-\iint_{s_a\cap s_2}[(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i)\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$+\iint_{S_a}\left[B_0 l_k+\left(T_{i,k}-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{,k}\right)\mathrm{d}u_i\right]$$

$$\cdot\ \delta x_k \mathrm{d}s\Bigg\}=0 \tag{6.423}$$

如果在元素内部$\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij})$，$\bar{\delta}(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$，$\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)$，在元素边界上$\bar{\delta}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)$、$\delta(\mathrm{d}u_i)$与$\delta x_k$都相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.423)式得

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}=0 \qquad (V_a) \tag{6.424}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0 \qquad (V_a) \tag{6.425}$$

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}-\mathrm{d}u_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}=0$$

或得

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}=0 \qquad (V_a) \tag{6.426}$$

$$B_0 l_k+\left[T_{i,k}-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{,k}\right]\mathrm{d}u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.427}$$

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{6.428}$$

$$\mathrm{d}P_p=B_0 l_j\delta x_j-\Big((\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i)\mathrm{d}u_i(\delta x_j)\Big)_{,j\neq i}=0$$

$$(S_1) \tag{6.429}$$

$$\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i=0 \qquad (S_2) \tag{6.430}$$

在驻值条件下求得能量泛函(6.398)式的变分条件(6.404～6.411)式（或为(6.414～6.421)式，或为(6.424～6.430)式）。这些变分条件是与变分问题等价的微分方程(6.404～6.406)式、交界条件(6.407)、(6.408)式（或为(6.417)、(6.418)式，或为(6.427)式）、边界条件(6.409)式与(6.411)式及附加边界条件(6.410)式。这些微分方程与条件是待解函数所必须满足的全部

方程与条件。

2. 余能型有限元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力增量为独立变量函数；在元素边界上用应变增量表示应力增量，并且应变增量与改变量δx_k均为连续函数时，则满足变分方程(6.431)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\delta\left[\iiint_{V_a}B_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_1}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}P_i)\mathrm{d}u_i\mathrm{d}s-\iint_{S_a\cap S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right]+\iint_{S_a}B_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s+\iint_{S_a\cap S_1}\mathrm{d}P_p\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.431)$$

其中B_0为(6.399)式；$\mathrm{d}P_p$为(6.403)式。

3. 余能型加权余数(广义伽略金)方程 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力增量函数为独立变量函数；在元素边界上用应变增量表示应力增量，并且应变增量与改变量δx_k均为连续函数时，则满足变分方程(6.402)式（或(6.413)式，或(6.423)式）的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

4. 余能型边界元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足方程(6.404～6.406)式；在元素边界上用应变增量表示应力函数，并且应变增量与改变量δn为连续函数时，则满足边界变分方程(6.432)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}\left[B_0+\left(T_{i,n}-\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{,n}\right)\mathrm{d}u_i\right]\delta n\mathrm{d}s\right.$$
$$-\iint_{S_a\cap S_1}[(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i)\delta(\mathrm{d}u_i)+\mathrm{d}P_p]\mathrm{d}s$$
$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}[(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i)\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)]\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.432)$$

6.4.6 余能型可动边界变分原理III

基于余能修正变分原理的泛函，在可动边界的条件下建立塑性流动理论的可动边界变分原理。

1．余能型有限元可动边界变分原理Ⅰ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移、应变、应力增量为独立变量函数；在元素边界上,位移、应力增量为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(6.433)式的位移、应变、应力增量函数为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\delta\left[\iiint_{V_a}B_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a}\mathrm{d}u_i^s\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}P_i^s\right)\mathrm{d}s\right.\right.$$
$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}P_i^s\mathrm{d}s\right]+\iint_{S_a}B_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s$$
$$\left.+\iint_{S_a\cap S_1}\mathrm{d}P_p\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.433)$$

其中

$$B_0=-B(\mathrm{d}\sigma_{ij})+\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}+(\mathrm{d}u_i)\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j} \qquad (6.434)$$

A为(4.355)式；B为(4.356)式。

2．余能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅰ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，

当位移、应变、应力增量为独立变量函数，在元素边界上，位移、应力增量为独立构造的边界函数时，则满足变分方程(6.435)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}\Bigg[\left(d\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(d\sigma_{ij})}\right)\bar{\delta}(d\sigma_{ij})+\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\delta(du_i)\\
&+\left(d\sigma_{ij}-du_{k,l}\frac{\partial^2 A}{\partial(d\varepsilon_{ij})\partial(d\varepsilon_{kl})}\right)\bar{\delta}(d\varepsilon_{ij})\Bigg]dv\\
&-\iint_{S_a}\Bigg[\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j-dP_i^a\right)\delta(du_i^a)\\
&+(du_i^a-du_i)\bar{\delta}\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)-B_0 l_j\delta x_j\Bigg]ds\\
&-\iint_{S_a\cap S_1}\Bigg[\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j-dP_i\right)\delta(du_i^a)\\
&+(du_i^a-du_i)\bar{\delta}\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)-dP_p\Bigg]ds\\
&-\iint_{S_a\cap S_2}\Bigg[\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j-dP_i^a\right)(\bar{\delta}du_i^a)\\
&+(du_i^a-du_i)\bar{\delta}\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)\\
&+(d\bar{u}_i-du_i^a)\delta(dP_i^a)\Bigg]ds\Bigg\}=0
\end{aligned}
\tag{6.435}
$$

其中在元素交界面上$du_i^a\delta(dP_i^a)$为相消项；在元素边界上$\bar{\delta}(du_i^a)$还可取为

$$\bar{\delta}(du_i^a)=\delta(du_i^a)-du_{i,k}^a\delta x_k \tag{6.436}$$

或取为

$$\bar{\delta}(du_i^a)=(du_{i,k}^a-du_{i,k}^a)\delta x_k \tag{6.437}$$

3. 余能型边界元可动边界变分原理Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足(5.487～5.489)式，在元素边界上独立构造位移、应力增量函数时，则满足边界变分方程(6.438)式的位移、应变、应力增量为塑性流动理论问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iint_{S_a}\Bigg[&\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}P_i^{*}\right)\delta(\mathrm{d}u_i^{*})\\
&+(\mathrm{d}u_i^{*}-\mathrm{d}u_i)\,\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)-B_0l_j\delta x_k\Bigg]\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_a\cap S_1}\Bigg[\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i\right)\delta(\mathrm{d}u_i^{*})\\
&+(\mathrm{d}u_i^{*}-\mathrm{d}u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)-\mathrm{d}P_P\Bigg]\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_a\cap S_2}\Bigg[\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}P_i^{*}\right)\delta(\mathrm{d}u_i^{*})\\
&+(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i^{*})\delta(\mathrm{d}P_i^{*})\\
&+(\mathrm{d}u_i^{*}-\mathrm{d}u_i)\delta\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)\Bigg]\mathrm{d}s\Bigg\}=0
\end{aligned}
\qquad (6.438)
$$

其中在元素边界上，$\delta(\mathrm{d}u_i^{*})$也可采用(6.436)式(或(6.437)式)。

§6.5 蠕变理论的可动边界变分原理

6.5.1 势能型可动边界变分原理 I

在势能古典变分原理的泛函的基础上，来讨论蠕变理论的可动边界变分原理。

1. 可动边界的变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之

和；在可动边界的情况下，变形固体系统的能量泛函(4.532)式变为

$$\mathscr{A}_{ca-1}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a(\xi_i)} A_0(\xi_i(\alpha),\dot{\varepsilon}_{ij}(\xi_i,\alpha),\dot{u}_i(\xi_i,\alpha))\mathrm{d}v(\xi_i)\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a(\xi_i)\cap S_1(\xi_i)} \bar{P}_i\dot{u}_i(\xi_i,\alpha)\mathrm{d}s(\xi_i)\right\} \qquad (6.439)$$

其中

$$A_0=\frac{1}{1+u}(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})\varepsilon_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i \qquad (6.440)$$

(1) 化变动积分域为固定积分域

利用坐标变换(6.1)式，可把泛函(6.439)式用固定积分域表示，则有

$$\mathscr{A}_{ca-1}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a} A_0\Big(\xi_i(\alpha),\dot{u}_i(\xi_i,\alpha),\dot{\varepsilon}_{ij}(\xi_i,\alpha)\Big)|J|\mathrm{d}v\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_1} \bar{P}_i\dot{u}_i(\xi_i,\alpha)|J_i|\mathrm{d}s\right\} \qquad (6.441)$$

其中$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式(6.10)式。

(2) 能量泛函的一阶变分

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零。在满足不可压缩条件与略去弹性变形的情况下，泛函(6.441)式的一阶变分为

$$\delta\mathscr{A}_{ca-1}(\alpha)=\frac{\partial\mathscr{A}_{ca-1}(\alpha)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[|J|\frac{\partial}{\partial\alpha}(A_0)+(A_0)\frac{\partial}{\partial\alpha}|J|\right]_{\alpha=0}\mathrm{d}v\right.$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\left[|J_i|\frac{\partial}{\partial\alpha}(\bar{P}_i\dot{u}_i)\right.$$

$$+(\bar{P}_i\dot{u}_i)\frac{\partial}{\partial\alpha}|J_i|\Big]_{\alpha=0}ds\Big\}=0 \tag{6.442}$$

已知应变速度与位移速度满足(1.93)式，利用(6.6)式及Green定理，可由(6.442)式得到

$$\delta\mathscr{A}_{ca-1}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}-[((2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i)\delta\dot{u}_i]dv$$

$$+\iint_{S_a}[((2g(H)\dot{e}_{ij})l_j)\delta\dot{u}_i+A_0l_j\delta x_j]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[((2g(H)\dot{e}_{ij})l_j-\bar{P}_i)\delta\dot{u}_i+P_c]ds\Big\}=0 \tag{6.443}$$

其中

$$P_c=A_0l_j\delta x_j-(\bar{P}_i\dot{u}_i\delta x_j)_{,j\neq i} \tag{6.444}$$

(3) 与变分问题等价的微分方程及条件

如果$\delta\dot{u}_i$与δx_j相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.443)式得

$$(2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \tag{6.445}$$

$$(2g(H)\dot{e}_{ij})l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.446}$$

$$(A_0l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.447}$$

$$(2g(H)\dot{e}_{ij})l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{6.448}$$

$$P_c=A_0l_j\delta x_j-(\bar{P}_i\dot{u}_i\delta x_j)_{,j\neq i}=0 \qquad (S_1) \tag{6.449}$$

如果在元素边界上，令

$$\bar{\delta}\dot{u}_i=\delta\dot{u}_i-\dot{u}_{i,k}\delta x_k \tag{6.450}$$

将(6.450)式代入方程(6.443)式中，则得

$$\delta\mathscr{A}_{ca-1}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}-[((2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i)\delta\dot{u}_i]dv$$

$$+\iint_{S_a}(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)\delta\hat{u}_i ds$$

$$+\iint_{S_a}[A_0 l_k-\dot{u}_{i,k}(2g(H)\dot{e}_{ij})l_j]\delta x_k ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[(2g(H)\dot{e}_{ij})l_j-\bar{P}_i]\delta\dot{u}_i ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[P_c-(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j-\bar{P}_i)\dot{u}_{i,k}\delta x_k]ds\Big\}$$

$$=0 \tag{6.451}$$

如果$\bar{\delta}\dot{u}_i$，$\delta\dot{u}_i$，δx_k相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.451)式得

$$(2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (V_a) \tag{6.452}$$

$$(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.453}$$

$$A_0 l_k-\dot{u}_{i,k}(2g(H)\dot{e}_{ij})l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{6.454}$$

$$(2g(H)\dot{e}_{ij})l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (S_1) \tag{6.455}$$

$$P_c-(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j-\bar{P}_i)\dot{u}_{i,k}\delta x_k=0 \quad (S_2) \tag{6.456}$$

如果$\delta\dot{u}_i$与δx_k相关，则变形后在元素边界上待解函数为

$$\dot{u}_i=\dot{R}_i(\xi_i)$$

所以

$$\delta\dot{u}_i=\dot{R}_{i,k}\delta x_k=\dot{R}_{i,n}\delta n \tag{6.457}$$

将(6.457)式代入方程(6.451)式，则得

$$\delta\mathscr{A}_{ca-1}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}-[(2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i]\delta\dot{u}_i dv$$

$$+\iint_{S_a}[A_0 l_k+(\dot{R}_{i,k}-\dot{u}_{i,k})(2g(H)\dot{e}_{ij}l_i)]\delta x_k ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[P_c+(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j-\bar{P}_i)(\dot{R}_{i,k}$$

$$-\dot{u}_{i,k})\delta x_k]\mathrm{d}s\Big\}=0 \quad (6.458)$$

由于$\delta\bar{\dot{u}}_i$与δx_j为任意的函数，根据变分法基本引理，由(6.458)式得

$$(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})+\bar{F}_i=0 \quad (V_a) \quad (6.459)$$

$$[A_0 l_k+(\dot{R}_{i,k}-\dot{u}_{i,k})(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)]\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (6.460)$$

$$P_c+(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j-\bar{P}_i)(\dot{R}_{i,k}-\dot{u}_{i,k})\delta x_k=0$$

$$(S_1) \quad (6.461)$$

方程(6.445～6.449)式、(6.452～6.456)式与(6.459～6.461)式是与变分问题等价的微分方程(6.445)式、交界条件(6.446)、(6.447)式(或(6.453)式、(6.454)式,或(6.460)式)、边界条件(6.448)式,及附加边界条件(6.449)式(或(6.456)式,或(6.461)式)。这些方程与条件是蠕变理论的可动边界问题的待解函数应满足的方程与条件。

2. 势能型有限元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当应变速度与位移速度在元素内部满足(1.93)式,在边界S_2上满足位移边界条件(1.99)式；在元素边界上位移速度与δx_j均为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.462)式的位移速度为稳定蠕变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\delta\Big[\iiint_{V_a}A_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i\mathrm{d}s\Big]$$
$$+\iint_{S_a}A_0 l_j\delta x_j\mathrm{d}s+\iint_{S_a\cap S_1}P_c\,\mathrm{d}s\Big\}=0 \quad (6.462)$$

3. 势能型加权余数（广义伽略金）方程 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，

在满足不可压缩条件和略去弹性变形的情况下，当应变速度与位移速度在元素内部满足(1.93)式，在边界S_2上满足位移边界条件(1.99)式；在元素边界上位移速度与δx_j均为连续函数时，则满足变分方程(6.443)式，（或(6.451)式，或(6.458)式）的位移速度为稳定蠕变理论问题的近似解。

4. 势能型边界元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足方程(1.92～1.94)式，在边界S_2上满足位移边界条件(1.99)式；在元素边界上δn为连续函数时，则满足边界变分方程(6.463)式的位移速度为稳定蠕变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}[A_0+(\dot{R}_{i,n}-\dot{u}_{i,n})(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)]\delta n\mathrm{d}s\right.$$
$$\left.+\iint_{S_a\cap S_1}[P_c+(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j-\bar{P}_i)(\dot{R}_{i,n}-\dot{u}_{i,n})\delta n]\mathrm{d}s\right\}=0 \tag{6.463}$$

当略去边界可动性的影响时，上述各类原理就退化为相应的势能型原理。

6.5.2 势能型可动边界变分原理 II

基于势能型广义变分原理的广义泛函，考虑到边界可动性的因素，下面建立蠕变理论问题的可动边界变分原理。

1. 势能型有限元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在满足不可压缩条件及略去弹性变形的情况下，当位移速度、应变速度、应力函数为独立变量函数；在元素交界面上位移速度与δx_j均为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.464)式的位移速度、应变速度与应力函数为稳定蠕变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\delta\left[\iiint_{V_a}A_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i\mathrm{d}s\right.\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})l_j(\dot{u}-\bar{\dot{u}}_i)\mathrm{d}s\right]$$

$$\left.+\iint_{S_a}A_0 l_j\delta x_j\mathrm{d}s+\iint_{S_a\cap S_1}P_c\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.464)$$

其中

$$A_0=\frac{1}{1+\mu}(2g(H)\dot{e}_{ij})\dot{e}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}$$

$$+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right) \qquad (6.465)$$

2．势能型加权余数（广义伽略金）方程Ⅰ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在满足不可压缩条件及略去弹性变形的情况下，当位移速度、应变速度、应力函数为独立变量函数；在元素交界面上，位移速度与δx_j均为连续函数时，则满足泛函变分方程(6.466)式的位移速度、应变速度、应力函数为稳定蠕变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[-\frac{1}{1+\mu}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right)\delta\sigma'_{ij}\right.\right.$$

$$-\left(\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i\right)\delta\dot{u}_i$$

$$\left.-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})\delta\dot{e}_{ij}\right]\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_a}\left[A_0 l_k+(\dot{R}_{i,k}-\dot{u}_{i,k})\left(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}\right)l_j\right]\delta x_k\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\left[P_c-(\dot{R}_{i,k}-\dot{u}_{i,k})\left(\bar{P}_i-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}\right.\right.$$

$$+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})l_j\Big)\Big]\delta x_k \mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)\delta\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}$$

$$+\frac{\mu}{1+\mu}2g(\mathrm{H})\dot{e}_{ij}\Big)l_j\Big]\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (6.466)$$

其中在元素边界上，有下面关系式：

$$\begin{aligned}&\bar{\delta}\dot{u}_i=\delta\dot{u}_i-\dot{u}_{i,k}\delta x_k\\&\dot{u}_i=\dot{R}_i,\qquad \delta\dot{u}_i=\dot{R}_{i,k}\delta x_k\\&\bar{\delta}\dot{u}_i=(\dot{R}_{i,k}-\dot{u}_{i,k})\delta x_k=(\dot{R}_{i,n}-\dot{u}_{i,n})\delta n\end{aligned} \qquad (6.467)$$

3. 势能型边界元可动边界变分原理 Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在满足不可压缩条件与略去弹性变形的情况下，当待解函数在元素内部满足方程(4.495～4.497)式；在元素交界面上δn为连续函数时，则满足边界变分方程(6.468)式的位移速度、应变速度、应力函数为稳定蠕变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iint_{S_a}\Big[A_0+(\dot{R}_{i,n}-\dot{u}_{i,n})\Big(\frac{1}{1+\mu}\sigma_{ij}$$

$$+\frac{\mu}{1+\mu}2g(\mathrm{H})\dot{e}_{ij}\Big)l_j\Big]\delta n\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\Big[\mathrm{P}_c-(\dot{R}_{i,n}-\dot{u}_{i,n})\Big(\bar{P}_i-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}$$

$$+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})l_j\Big)\delta n\Big]\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)\bar{\delta}\Big[\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}$$

$$+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})l_j\Big]\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (6.468)$$

上述原理的证明可参照前面内容，在此证明从略。

6.5.3 余能型可动边界变分原理Ⅰ

在余能古典变分原理的泛函的基础上，建立稳定蠕变理论的可动边界变分原理。

1. 可动边界的变分问题

对固体系统进行离散分割，把固体系统分割成有限个元素之和，在可动边界的条件下，变形后固体系统的能量泛函(4.578)式变为

$$\mathscr{A}_{cb-1}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a(\xi_i)}B_0(\xi_i(\alpha),\sigma'_{ij}(\xi_i,\alpha))\mathrm{d}v(\xi_i)\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\dot{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\} \tag{6.469}$$

其中

$$B_0=\frac{1}{1+m}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\sigma'_{ij} \tag{6.470}$$

(1) 化变动积分域为固定积分域

利用坐标变换(6.1)式，可把泛函(6.469)式用固定积分域表示，则为

$$\mathscr{A}_{cb-1}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}B_0(\xi_i(\alpha),\sigma'_{ij}(\xi_i,\alpha))|J|dv\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\dot{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right\} \tag{6.471}$$

其中S_2为固定边界；$|J|$为雅各比行列式(6.10)式。

(2) 能量泛函的一阶变分

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零。在满足不可压缩条件和略去弹性变形的情况下，能量泛函(6.471)式的一阶变分

等于零的形式为

$$\delta \mathscr{A}_{cb-1}(\alpha)=\left.\frac{\partial \mathscr{A}_{cb-1}(\alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[|J|\frac{\partial}{\partial \alpha}(B_0)+(B_0)\frac{\partial}{\partial \alpha}|J|\right]_{\alpha=0}\mathrm{d}v\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\delta(\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.472)$$

已知应力函数满足平衡方程(1.92)式，则有

$$\sum_{a=1}^{M}\iiint_{V_a}\dot{u}_i\delta(\sigma_{ij,j})\mathrm{d}v=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}-\dot{u}_{i,j}\delta(\sigma'_{ij})\mathrm{d}v\right.$$

$$\left.+\iint_{S_a}\dot{u}_i\delta(\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.473)$$

将(6.472)与(6.473)两式相加，利用(6.6)式和Green定理，则得

$$\delta\mathscr{A}_{cb-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}\left[\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\frac{1}{2}(\dot{u}_{ij}+\dot{u}_{j,i})\right]\delta\sigma'_{ij}\mathrm{d}v\right.$$

$$+\iint_{S_a}[\dot{u}_i\delta(\sigma_{ij}l_j)+B_0l_j\delta x_j]\mathrm{d}s$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}(\bar{u}_i-\dot{u}_i)\delta(\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.474)$$

(3) 与变分问题等价的微分方程及条件

在可动边界能量泛函的驻值条件下，可获得与变分问题等价的微分方程、边界条件、交界条件与附加边界条件。

如果$\delta\sigma'_{ij}$，$\delta\sigma_{ij}l_j$，δx_j相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.474)式得

$$\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i})=0 \qquad (V_a) \quad (6.475)$$

利用σ'_{ij}与$\dot{e}_{ij}$已满足关系式

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0$$

所以(6.475)式可变为

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i})=0 \qquad (V_a) \quad (6.476)$$

$$\dot{u}_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.477)$$

$$(B_0 l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (6.478)$$

$$\bar{\dot{u}}_i-\dot{u}_i=0 \qquad (S_2) \quad (6.479)$$

如果在元素边界上，令

$$\begin{aligned}\bar{\delta}(\sigma_{ij}l_j)&=\delta(\sigma_{ij}l_j)-(\sigma_{ij}l_j)_{,k}\delta x_k\\&=\delta(\sigma_{ij}l_j)-(\sigma_{ij}l_j)_{,n}\delta n \qquad (6.480)\end{aligned}$$

将(6.480)式代入(6.474)式，则得

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{A}_{ob-1}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{&\iiint_{V_a}\Big[\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i})\Big]\delta(\sigma'_{ij})\,dv\\&+\iint_{S_a}\dot{u}_i\bar{\delta}(\sigma_{ij}l_j)ds+\iint_{S_a}[B_0 l_k-\dot{u}_i(\sigma_{ij}l_j)_{,k}]\delta x_k ds\\&-\iint_{S_a\cap S_2}\Big[(\bar{\dot{u}}_i-\dot{u}_i)\delta(\sigma_{ij}l_j)ds\Big\}=0 \qquad (6.481)\end{aligned}$$

如果$\bar{\delta}\sigma_{ij}$，$\delta(\sigma_{ij}l_j)$，δx_k相互无关且为任意函数时，根据变分法基本引理，由(6.481)式得

$$\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}-\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i})=0 \qquad (V_a) \quad (6.482)$$

或得

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}+\dot{u}_{j,i})=0 \qquad (V_a) \quad (6.483)$$

$$\dot{u}_i \Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0} = 0 \tag{6.484}$$

$$\left[E_0 l_k - \dot{u}_i(\sigma_{ij}l_j)_{,k}\right]\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0} = 0 \tag{6.485}$$

$$\bar{\dot{u}}_i - \dot{u}_i = 0 \qquad (S_2) \tag{6.486}$$

如果$\delta(\sigma_{ij}l_j)$与δx_k相关，则变形后在元素边界上，待解函数为

$$\sigma_{ij}l_j = T_i(\xi_i)$$

所以

6.492）式是与可动边界变分问题等价的微分方程(6.476)式、交界条件(6.477)、(6.478)式（或(6.484～6.485)式，或(6.491)式）、边界条件(6.479)式。这些方程与条件是待解函数必须满足的与变分问题等价的微分方程与条件。

2．余能型有限元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素内部满足平衡方程(1.92)式，在边界S_1上满足力的边界条件及力的附加边界条件时，则满足变分方程(6.493)式的应力函数、位移速度为稳定蠕变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\bar{\delta}\left[\iiint_{V_a}B_0 dv-\iint_{S_a\cap S_2}\dot{u}_i\sigma_{ij}l_j ds\right]\right.$$

$$\left.+\iint_{S_a}B_0 l_j\delta x_j ds\right\}=0 \qquad (6.493)$$

其中$B_0(\sigma_{ij}')$为(6.470)式。

3．余能型加权余数(广义伽略金)方程 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在满足不可压缩条件和略去弹性变形的条件下，当待解函数在元素内部满足平衡方程(1.31)式，在边界S_1上满足力的边界条件及力的附加边界条件，在元素交界面上应力函数与δx_j为连续函数时，则满足变分方程(6.474)式（或为(6.481)式，或为（6.488)式）的应力函数、位移速度为稳定蠕变理论问题的近似解。

4．余能型边界元可动边界变分原理 I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在满足不可压缩条件及略去弹性变形的情况下，当待解函数在元素内部满足平衡方程(1.31)式、应力位移速度(6.475)式；在元素交界面上δn为连续函数时，则满足边界变分方程(6.494)式的应力函数与位移速度为稳定蠕变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{S_a}[B_0+(T_{,n}-(\sigma_{ij}l_j)_{,n})\dot{u}_i]\delta n\mathrm{d}s\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}(\bar{\dot{u}}_i-\dot{u}_i)\bar{\delta}(\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.494)$$

其中B_0为(6.470)式；n为边界S_a的外法线；δn为外法线改变量。

6.5.4　余能型可动边界变分原理II

基于余能广义变分原理的泛函，在可动边界的条件下建立稳定蠕变理论的可动边界的变分原理。

1．余能型有限元可动边界变分原理I

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，当位移速度、应变速度、应力函数为独立变量函数；在元素边界上，用应变速度表示应力函数，并且应变速度与δx_k均为连续函数时，则满足变分方程(6.495)式的位移速度、应变速度、应力函数为稳定蠕变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\delta\left[\iiint_{V_a}B_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\dot{u}_i\mathrm{d}s\right.\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{\dot{u}}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right]+\iint_{S_a}B_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s$$

$$\left.+\iint_{S_a\cap S_1}P_c\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.495)$$

其中

$$B_0=\frac{1}{m}\sigma_{ij}'\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{m(1+m)}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma_{ij}'\right)\sigma_{ij}'$$

$$+\dot{u}_i((2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i) \qquad (6.496)$$

$$P_c=B_0l_j\delta x_j-((\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\dot{u}_i(\delta x_j))_{,j\neq i}=0 \qquad (6.497)$$

2. 余能型加权余数（广义伽略金）方程 Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在满足不可压缩条件及略去弹性变形的情况下，当位移速度、应变速度、应力函数为独立变量函数；在元素边界上，用应变速度表示应力函数，并且应变速度与δx_k均为连续函数时，则满足变分方程(6.498)式的位移速度、应变速度、应力函数为稳定蠕变理论问题的近似解。

$$
\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{\iiint_{V_a}\Big[&\frac{1}{m}\left(\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma_{ij}'\right)\delta\sigma_{ij}' \\
&+\left(\frac{1}{m}(\sigma_{ij}'-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{u}_i))\delta\dot{\varepsilon}_{ij}\right) \\
&+((2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i)\delta\dot{u}_i\Big]dv \\
&-\iint_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta\dot{u}_i-P_c]ds \\
&-\iint_{S_a\cap S_2}[(\bar{\dot{u}}_i-\dot{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j]ds \\
&+\iint_{S_a}\dot{u}_i\delta(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j ds \\
&+\iint_{S_a}[B_0 l_k-\dot{u}_i(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)_{,k}]\delta x_k ds\Bigg\}=0
\end{aligned}
\qquad (6.498)
$$

3. 余能型边界元可动边界变分原理 Ⅱ

在对固体系统进行离散分割与分片构造待解函数的基础上，在满足不可压缩条件与略去弹性变形的情况下，当待解函数在元素内部满足方程(4.552～4.554)式；在元素边界上，δn为连续函数时，则满足边界变分方程(6.499)式的位移速度、应变速度、应力函数为稳定蠕变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint\limits_{S_a}[B_0+(T_{i,n}-(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}l_j)_{,n})\dot{u}_i]\delta n\mathrm{d}s\right.$$

$$-\iint\limits_{S_a\cap S_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta\dot{u}_i-P_c]\mathrm{d}s$$

$$\left.-\iint\limits_{S_a\cap S_2}[(\bar{\dot{u}}_i-\dot{u}_i)\delta(\sigma_{ij}l_j)]\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.499)$$

其中B_0为(6.496)式；P_c为(6.497)式。

§6.6 接触问题的可动边界变分原理

6.6.1 概述

1. 接触问题

讨论有多个固体V_a组成的固体系统V，每个固体V_a的边界记为$S_a=S_{a1}\cup S_{a2}\cup S_{a3}\cup S_{a4}$。其中$S_{a1}$为已知外力的作用边界；$S_{a2}$为已知位移的边界；$S_{a3}$为固体之间的接触边界；$S_{a4}$为固体的自由边界，即在自由边界上无外力作用，无几何约束，固体之间没有接触。

固体系统V可表示为

$$V=\bigcup_{a=1}^{M}V_a \qquad (6.500)$$

每个固体V_a在外界因素作用下要产生变形，其边界S_a随着变形过程而变动，接触边界及接触边界上的应力，应变也随着固体的变形而变动。因此，接触边界是变动的待定边界。当用变分方法来描述接触问题时，接触问题是一个可动边界的变分问题[1]。此外，在接触边界的待解函数可具有不同的间断性，相互接触的固体亦可具有不同的物理性质的间断性。所以，接触问题实质上是待解函数具有不同间断性的可动边界的变分问题[3,7]。

2. 接触条件

固体V_a与V_b相互接触的边界记为S_{a3}与S_{b3}，固体V_a与V_b的接触力（作用力）记为P_{an}，$P_{a\tau}$，P_{bn}，$P_{b\tau}$（n与τ为接触面的外法线方向与切线方向，P_{an}、$P_{a\tau}$为沿n与τ方向的接触力的分量）。沿接触面上外法线方向与切线方向的位移分量记为u_{an}，$u_{a\tau}$，u_{bn}，$u_{b\tau}$。

（1）无摩擦的接触状态（摩擦系数$\mu=0$）

$$\left.\begin{aligned} &P_{an}+P_{bn}=0\\ &P_{a\tau}+P_{b\tau}=0\\ &u_{an}=u_{bn}+u_0\ （u_0\text{为初始间隙}） \end{aligned}\right\} \tag{6.501}$$

（2）有摩擦的接触状态（摩擦系数$\mu>0$）

$$\left.\begin{aligned} &P_{an}+P_{bn}=0\\ &P_{a\tau}+P_{b\tau}=0 \end{aligned}\right\} \tag{6.502}$$

无滑动接触状态

$$\left.\begin{aligned} &P_{a\tau}<\mu P_{an}\\ &u_{an}=u_{bn}+u_0\\ &u_{a\tau}=u_{b\tau} \end{aligned}\right\} \tag{6.503}$$

滑动接触状态

$$\left.\begin{aligned} &P_{a\tau}=\mu P_{an}\\ &u_{an}=u_{bn}+u_0 \end{aligned}\right\} \tag{6.504}$$

（3）自由状态

$$\left.\begin{aligned} &P_{an}=P_{bn}=P_{a\tau}=P_{b\tau}=0\\ &u_{an}<u_{bn}+u_0 \end{aligned}\right\} \tag{6.505}$$

由于接触边界S_{a3}与S_{ab}随变形而改变，因此接触边界亦可变为自由边界。

在有摩擦存在时，因接触应力状态与加载路径有关，所以接触力所作的功也与加载路径有关，是不可逆过程。这样，在有摩

擦存在与固体处于塑性状态时，建立的变分原理应是沿实际加载路径的情况下才成立。

3．固体的力学状态

在外界因素的作用下，固体系统V产生了变形，具有了应变与应力，在接触过程中，固体系统中的各个固体V_a，所处的力学状态并不一定相同，有的固体V_a可能处于弹生状态，有的固体V_b可能处于塑性状态，有的固体V_c可能处于蠕变状态，这就需要根据固体系统中各个固体所处的力学状态，应用前几节所介绍的内容与方法，建立解决具体接触问题的变分原理。这里仅以弹性力学问题的接触问题为例，论述接触问题的变分原理。

6.6.2 势能型接触问题的变分原理Ⅰ

在弹性力学的势能古典变分原理的泛函的基础上，建立接触问题的可动边界的变分原理。

1．接触问题的变分问题

在外界因素作用下，固体系统V产生了变形，于是变形后的固体系统的总势能为

$$\mathscr{A}_{k\alpha-1}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a(\xi_i)} A_0(\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),u_{i,j}(\xi_i,\alpha))dv(\xi_i)-\iint_{S_{a1}(\xi_i)}\bar{P}_i u_i(\xi_i,\alpha)ds(\xi_i)-\iint_{S_{a3}(\xi_i)}P_{as}(\xi_i,\alpha)u_{as}(\xi_i,\alpha)ds(\xi_i)\right\} \quad (6.506)$$

其中

$$A_0=A-\bar{F}_i u_i,\quad A=\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad (6.507)$$

$$(s=n,\tau;i,j,k=1,2,3)$$

(1) 化变动积分域为固定积分域

利用坐标变换(6.1)式，可把泛函(6.506)式用固定积分域表示，则有

$$\mathscr{A}_{k\alpha-1}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}A_0(\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),u_{i,j}(\xi_i,\alpha))|J|\mathrm{d}v\right.$$

$$-\iint_{S_{a1}}\bar{P}_i u_i(\xi_i,\alpha)|J_i|\mathrm{d}s$$

$$\left.-\iint_{S_{a3}}P_{as}(\xi_i,\alpha)u_{as}(\xi_i,\alpha)|J_i|\mathrm{d}s\right\} \qquad (6.508)$$

其中$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式(6.10)式。

(2) 能量泛函的一阶变分

在沿实际加载路径情况下，泛函(6.508)式的驻值条件为

$$\delta\mathscr{A}_{k\alpha-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}-\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\delta u_i\mathrm{d}v\right.$$

$$+\iint_{S_{a1}}\left[P_{a1}+\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right)\delta u_i\right]\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_{a3}}\left[P_{a3}+(\sigma_{as}(\varepsilon_{ij})-P_{as}(\varepsilon_{ij}))\delta u_{as}\right]\mathrm{d}s$$

$$\left.+\iint_{S_{a4}}\left[A_0 l_j\delta x_j+\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\delta u_i\right]\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (6.509)$$

其中$u_{as}\delta P_{as}$项在边界S_{a3}上为相消项；式中符号为

$$\begin{aligned}P_{a1}&=A_0 l_j\delta x_j-(\bar{P}_i u_i\delta x_j)_{,j\to i}\\P_{a3}&=A_0 l_j\delta x_j-(P_{as}u_{as}\delta x_j)_{,j\to i}\end{aligned} \qquad (6.510)$$

符号σ_{as}与u_{as}为由固体V_a内部化到边界S_{a3}上的沿法线方向与切线方向的应力分量（用应变分量或位移分量表示）和位移分量(σ_{an}，$\sigma_{a\tau}$，u_{an}，$u_{a\tau}$)。

（3）与变分问题等价的微分方程及条件

在固体V_a的边界S_a上，如果$\overline{\delta u_i}=\delta u_i-u_{i,k}\delta x_k$与$\overline{\delta u_{as}}=\delta u_{as}-u_{as,k}\delta x_k$的关系成立，并将它代入(6.509)式，则得

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{A}_{ka-1}=\sum_{a=1}^{M}\Bigg\{&\iiint_{V_a}-\left[\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\overline{F}_i\right]\overline{\delta u_i}\mathrm{d}v\\
&+\iint_{S_{a1}}\left[P_{a1}-\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-\overline{P}_i\right)u_{i,k}\delta x_k\right]\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_{a1}}\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-\overline{P}_i\right)\delta u_i\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_{a3}}[\sigma_{as}(\varepsilon_{ij})-P_{as}(\varepsilon_{ij})]\delta u_{as}\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_{a3}}[P_{a3}-(\sigma_{as}(\varepsilon_{ij})-P_{as}(\varepsilon_{ij}))u_{as,k}\delta x_k]\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_{a4}}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\delta u_i\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_{a4}}\left[A_0l_k-u_{i,k}\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\right]\delta x_k\mathrm{d}s\Bigg\}=0
\end{aligned}\qquad(6.511)$$

由于$\overline{\delta u_i}$，δu_i，δx_k相互无关，且为任意函数，根据变分法基本引理得

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\overline{F}_i=0\qquad(V_a)\quad(6.512)$$

$$\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-\overline{P}_i=0\qquad(S_{a1})\quad(6.513)$$

$$P_{a1}-\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-\overline{P}_i\right)u_{i,k}\delta x_k=0\qquad(S_{a1})\quad(6.514)$$

$$\sum_{a=1}^{M}(\sigma_{as}(\varepsilon_{ij})-P_{as}(\varepsilon_{ij}))=0\qquad(S_{a3})\quad(6.515)$$

$$\sum_{a=1}^{M} P_{a3}-(\sigma_{as}(\varepsilon_{ij})-P_{as}(\varepsilon_{ij}))u_{as,k}\delta x_k=0$$

$$(S_{a3}) \quad (6.516)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j=0 \qquad (S_{a4}) \quad (6.517)$$

$$A_0 l_k-u_{i,k}\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j\right)=0 \qquad (S_{a4}) \quad (6.518)$$

方程(6.512)为平衡方程；方程(6.513)、(6.514)两式是在已知力的作用边界上的力的边界条件和力的附加边界条件；方程(6.515)、(6.516)两式是在接触边界上的接触条件和其附加接触条件；方程(6.517)、(6.518)两式为自由边界条件和附加边界条件。

方程(6.512)、(6.513)、(6.515)、(6.517)式是与利用古典变分原理所求得的接触问题的变分条件类同；而方程(6.514)、(6.516)、(6.518)式是由边界可动性而产生的附加边界条件和附加接触条件。这些附加条件通常用古典变分原理，是求导不出来的。所以，只有用可动边界的变分问题才能建立确切地描述接触问题的变分原理。

在固体V_a的边界S_a上，如果δu_i与δx_k相关时，且令

$$u_i=R_i, \quad u_{as}=R_{as}$$

所以

$$\delta u_i=R_{i,k}\delta x_k, \quad \delta u_{as}=R_{as,k}\delta x_k \qquad (6.519)$$

将(6.519)式代入(6.511)式，则得

$$\delta \mathscr{A}_{ka-1}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}-\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right]\delta u_i dv\right.$$

$$+\iint_{S_{a1}}\left[P_{a1}+\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j-\bar{P}_i\right)(R_{i,k}-u_{i,k})\delta x_k\right]ds$$

$$+\iint_{S_{a3}}\left[P_{a3}+(\sigma_{as}(\varepsilon_{ij})\right.$$

$$-P_{as}(\varepsilon_{ij}))(R_{as,k}-u_{as,k})\delta x_k\Big]ds$$

$$+\iint_{S_{a4}}\left[A_0 l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j\right]\delta x_k ds\Big\}=0 \tag{6.520}$$

由于δu_i与δx_k的任意性，根据变分法基本引理，则得

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\overline{F}_i=0 \qquad (V_a) \tag{6.521}$$

$$P_{a1}+\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j-\overline{P}_i\right)(R_{i,k}-u_{i,k})\delta x_k=0 \qquad (S_{a1}) \tag{6.522}$$

$$P_{a3}+(\sigma_{as}-P_{as})(R_{as,k}-u_{as,k})\delta x_k=0 \qquad (S_{a3}) \tag{6.523}$$

$$A_0 l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j=0 \qquad (S_{a4}) \tag{6.524}$$

由于利用了δu_i与δx_k的相关性，这些变分条件把边界条件与附加边界条件，接触条件与附加接触条件统一在一个公式之中。

接触问题的待解函数所必须满足的全部微分方程与条件，除上述微分方程与条件之外，还应满足应变位移关系式、应力应变关系式及位移边界条件。接触问题的可动边界的变分问题与接触问题的势能古典变分问题的所不同是增加了附加条件。

2．势能型接触问题的可动边界变分原理 I

在沿实际加载路径的情况下，假定待解函数在V_a内部满足应变位移(1.2)式及位移边界条件(1.8)式时，则满足变分方程(6.525)式的位移、应变函数为弹性力学范畴的接触问题的真实解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\overline{\delta}\left[\iiint_{V_a}A_0 dv-\iint_{S_{a1}}\overline{P}_i u_i ds-\iint_{S_{a3}}P_{as}u_{as}ds\right]$$

$$+\iint_{S_{a1}}P_{a1}ds+\iint_{S_{a3}}P_{a3}ds+\iint_{S_{a4}}A_0 l_k\delta x_k ds\Big\}=0 \tag{6.525}$$

3. 势能型接触问题的加权余数方程 I

在沿实际加载路径的情况下，假定待解函数在V_a内部满足应变位移(1.2)式及位移边界条件(1.8)式时，则满足变分方程

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\Big\{\delta\Big[\iiint_{V_\alpha}A_0\mathrm{d}v-\iint_{S_{\alpha1}}\bar{P}_iu_i\mathrm{d}s-\iint_{S_{\alpha3}}P_{\alpha s}u_{\alpha s}\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_{\alpha2}}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}s\Big]$$

$$+\iint_{S_{\alpha1}}P_{\alpha1}\mathrm{d}s+\iint_{S_{\alpha3}}P_{\alpha3}\mathrm{d}s+\iint_{S_{\alpha4}}A_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s\Big\}=0 \quad (6.527)$$

式中

$$A_0=\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_iu_i$$

$$-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big) \quad (6.528)$$

$$P_{\alpha1}=A_0l_j\delta x_j-(\bar{P}_iu_i\delta x_j)_{,j\neq i} \quad (6.529)$$

$$P_{\alpha3}=A_0l_j\delta x_j-(P_{\alpha s}u_{\alpha s}\delta x_j)_{,j\neq i} \quad (6.530)$$

其中$S_{\alpha2}$为已知的位移的固定边界。

2．势能型接触问题的加权余数方程 I

在沿实际加载路径的情况下，假定应力、位移、应变函数为独立变量函数时，则满足变分方程(6.531)式的位移、应变、应力函数为弹性力学范畴中接触问题的真实解。

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_\alpha}\Big[-\frac{1}{2}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\bar{\delta}\sigma_{ij}$$

$$-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\delta\varepsilon_{ij}$$

$$-\Big(\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i\Big)\delta u_i\Big]\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_{\alpha1}}\Big[P_{\alpha1}+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,k}-u_{i,k})\delta x_k\Big]\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_{a2}}\left[(\bar{u}_i-u_i)\,\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]ds$$

$$+\iint_{S_{a3}}\left[P_{a3}+(\sigma_{as}-P_{as})(R_{as,k}-u_{as,k})\delta x_k\right]ds$$

$$+\iint_{S_{a4}}[A_0 l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})\sigma_{ij}l_i]\delta x_k\Big\}=0 \qquad (6.531)$$

其中A_0为(6.528)式；P_{a1}为(6.529)式；P_{a3}为（6.530）式；S_{a2}为固定边界。在元素边界上有

$$\bar{\delta}u_i=\delta u_i-u_{i,k}\delta x_k$$

$$u_i=R_i$$

所以 $\bar{\delta}u_i=\delta R_i-u_{i,k}\delta x_k=(R_{i,k}-u_{i,k})\delta x_k$

3．势能型接触问题的边界型可动边界变分原理Ⅱ

在沿实际加载路径的情况下，假定在元素内部待解函数满足方程

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$$

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0$$

时，则使满足边界变分方程(6.532)式的位移、应变、应力函数为弹性力学范畴中接触问题的真实解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iint_{S_{a1}}\left[P_{a1}+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,k}-u_{i,k})\delta x_k\right]ds$$

$$+\iint_{S_{a2}}\left[(\bar{u}_i-u_i)\,\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]ds$$

$$+\iint_{S_{a3}}\left[P_{a3}+(\sigma_{as}-P_{as})(R_{as,k}-u_{as,k})\delta x_k\right]ds$$

$$+\iint_{S_{a4}}[A_0 l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})\sigma_{ij}l_j]\delta x_k \mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (6.532)$$

其中的符号含义与上节同。

上述原理的证明与前类同，在此证明从略。

§6.7 结 论

能量泛函可动边界的变分，可分两部分，其中一部分是待解函数的改变使能量泛函产生的变分；另一部分是积分域的变动使能量泛函产生的变分。

另外，积分域变动使能量泛函产生的变分，属于界面非线性效应问题，利用这一理论可以解一系列实际问题，如弹塑性交界面的问题、接触问题、裂纹扩展中的能量释放量（率）的计算问题、裂纹扩展的稳定性分析、有限法及边界元法的最佳剖分原理等等，一系列实际问题。

在能量泛函可动边界的变分问题的驻值条件下，导出的交界条件是有限元法的收敛性的必要条件。利用交界条件亦可导出自适有限元与边界元法的后验误差计算公式。

参 考 文 献

1 钱伟长著．变分法及有限元(上册)．北京：科学出版社，1980

2 柯朗 R，希伯尔特 D；钱敏，郭敦仁译．数学物理方法(1)．北京：科学出版社，1958

3 牛庠均．固体的离散型变分原理——有限元离散分析的变分原理．应用数学和力学，1981，2(5)

4 牛庠均．有限元广义伽略金方程，边界变分方程，边界积分方程．应用数学和力学，1983，4(2)

5 牛庠均．离散型固体力学及其间断型变分原理．应用数学和力学，

1983, 4(3)

6 牛庠均. 弹塑性体的可动边界变分原理. 北京工业大学学报,1990,16(2)

7 牛庠均. 接触问题的可动边界变分原理.北京工业大学学报,1990,16(1)

第七章　最佳剖分变分原理

§7·1　概　述

7.1.1　最佳剖分变分原理

在用各种近似方法解决工程结构问题时，所遇到的共同性问题是如何提高解的精度和如何估算误差等问题。用有限元法解决工程结构的计算问题时，提高解的精度有两条途径，其一是改进逼近函数的逼近性质，用线性、二次（或更高的n次分片插值多项式）逼近待解函数；其二是逐步细分网格，使元素尺寸逐步变小以达到提高解的精度的目的。逐步细分网格是有限元法常用的提高解的精度的方法，特别是具有自动调整解的精度的自适应有限元法与边界元法。可见，能量泛函实现极值时，是在逐步改变元素的尺寸，也就是能量泛函的积分域是在不断变化（在总长度为常数的变分约束条件下），待解函数与元素尺寸同时作为参变量使能量泛函实现极值。从理论上讲，这也就是一个可动边界的变分问题，但是这里的积分区域的变化不是由于变形而引起的，而是由于人为的不断改变元素的尺寸而造成的。因此可以利用可动边界的变分问题的理论与方法来建立正确描述有限元法的变分原理。这个原理有两个特点，其一是对固体系统进行几何剖分并分片构造待解函数，在元素间的交界面上待解函数具有不同的间断性；其二是逐步细分网格，使元素尺寸不断变化，这样元素尺寸与待解函数同时作为参变量使能量泛函实现极值。因此，应用于有限元法的变分原理的确切提法是待解函数具有间断性的最佳

剖分变分原理。综上所述，所谓最佳剖分变分原理，是指在分片构造待解函数与逐步细分单元的基础上，当待解函数与单元尺寸同时作为参变量使能量泛函实现极值时，对固体力学问题的变分描述[1，2]。

7.1.2 收敛性条件与误差分析

用有限元法解决工程结构问题，其理论基础之一是变分原理，而固体力学问题的变分问题与微分方程等价的提法，是在能量泛函的一阶变分为零的基础上得到的。因此这里分析的有限元法的收敛性条件与误差估算公式，是在一阶变分为零的条件下，对最佳剖分变分原理的泛函进行变分运算，得到的待解函数在元素交界面上应满足的交界条件，以及在整体边界上应满足力的附加边界条件。当这些条件不满足时，则能量泛函的一阶变分不等于零，于是导入了误差。

1．收敛性条件

横联收敛性条件：在一阶变分为零的条件下，待解函数在元素交界面应满足的交界条件；以及在整体边界上应满足的附加边界条件。

串联收敛性条件：当连续介质出现孔洞（或裂纹）时，在一阶变分为零的条件下，待解函数沿孔洞（或裂纹）边界应满足的条件。

2．误差分析

误差计算公式是待解函数不满足收敛性条件时，在元素交界面上与整体边界上所导入的误差。这种误差是能量误差，是后验可计算的误差公式，所以这种误差是离散误差、舍入误差和数学模型误差的综合误差。为自适应有限元法与边界元法提供了可计算的后验误差估算公式。

最佳剖分变分原理与前章论述的可动边界变分原理都是利用

可动边界的变分理论来建立的。所以这两种变分原理在形式与推演过程上基本相同，不同的是最佳剖分变分原理中的元素尺寸改变量是人为的已知的；而可动边界变分原理中的元素尺寸改变量是变形过程形成的，是待求的。在此略去了最佳剖分变分原理的论证过程。

§7.2 弹性力学的最佳剖分变分原理

7.2.1 势能型最佳剖分变分原理

对固体系统进行几何剖分，在逐步细分单元与分片构造待解函数的基础上，应满足下列条件：

(1) 应变、位移满足应变位移(1.2)式；

(2) 位移函数满足位移边界条件(1.8)式；

(3) 在元素交界面上，位移与元素尺寸改变量δx_j为连续的；

(4) 应变、位移和元素尺寸改变量同时作为能量泛函实现极值的参变量；

(5) 固体系统的整体尺寸为常数时，在容许的应变、位移及元素尺寸改变量中，使泛函(7.1)式实现驻值条件的解为弹性力学问题的近似解。

$$\mu_{ea}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}A_0|J|\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_iu_i|J_i|\mathrm{d}s\right\}\tag{7.1}$$

或者说，满足变分方程(7.2)式的容许的应变、位移和元素尺寸改变量为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\bar{\delta}\left[\iiint_{V_a}A_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_iu_i\mathrm{d}s\right]\right.$$

$$+\iint_{S_a} A_0 l_j \delta x_j \mathrm{d}s+\iint_{S_a \cap S_1} P_e \mathrm{d}s\Big\}=0 \tag{7.2}$$

其中A_0为(6.8)式；$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式(6.10)式；P_e为(6.19)式。

7.2.2 势能型收敛性条件

在一阶变分为零的条件下，由泛函(7.1)式求得待解函数在元素交界面和在整体边界上，以及在孔洞（或裂纹）边界上应满足的条件为有限元法收敛的必要条件，其必要条件为

1. 横联收敛性条件

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{7.3}$$

$$(A_0 l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{7.4}$$

$$P_e=A_0 l_j \delta x_j-(\bar{P}_i u_i \delta x_j)_{,j\neq i}=0 \qquad (S_1) \tag{7.5}$$

在元素边界上，令

$$\delta u_i=\delta u_i-u_{i,k}\delta x_k \tag{7.6}$$

于是上面各式变为

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{7.7}$$

$$A_0 l_k-u_{i,k}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{7.8}$$

$$P_e-((a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)-\bar{P}_i)u_{i,k}\delta x_k=0 \qquad (S_1) \tag{7.9}$$

若在元素边界上，令

$$u_i=R_i$$

所以

$$\delta u_i=R_{i,k}\delta x_k \tag{7.10}$$

上面各式变为

$$A_0 l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{7.11}$$

$$P_e+(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,k}-u_{i,k})\delta x_k=0 \quad (S_1) \qquad (7.12)$$

2．串联收敛性条件

若在元素边界上方程(7.6)式成立，则有

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{S_h}=0 \qquad (7.13)$$

$$A_0l_k-u_{i,k}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{S_h}=0 \qquad (7.14)$$

$$(S_h=1,2,\cdots,S_n)^*$$

其中S_h为介质中的孔洞（或裂纹）边界；S_n为孔洞（或裂纹）的个数。

若在元素边界上方程(7.10)式成立，则有

$$[A_0l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j]_{S_h}=0 \qquad (7.15)$$

7.2.3 势能型误差估算公式

这里介绍的误差估算公式是能量误差，即为后验可计算的误差公式。这种误差是待解函数不满足收敛性条件时，在元素交界面上以及整体边界上所导入的误差。这种误差可作为自适应有限元法与边界元法的后验误差估算公式。

后验误差公式为

$$e=e_1+e_2+e_3+e_4 \qquad (7.16)$$

其中

$$e_1=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_i)\bar{\delta}u_i\mathrm{d}s \qquad (7.17)$$

$$e_2=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}A_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s \qquad (7.18)$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_1}P_e\mathrm{d}s \qquad (7.19)$$

---

* 下文中$S_h=1$，2，…，S_n的条件仍存在，故从略不再注明。

$$e_4=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\delta u_i+A_0l_j\delta x_j]ds \tag{7.20}$$

若在元素边界上，方程(7.6)式成立，于是e_1，e_2，e_3、e_4变为

$$e_1=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j\delta u_i ds \tag{7.21}$$

$$e_2=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}[A_0l_k-u_{i,k}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j]\delta x_k ds \tag{7.22}$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_1}[P_e-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)u_{i,k}\delta x_k]ds \tag{7.23}$$

$$e_4=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}[a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j\delta u_i+(A_0l_k-u_{i,k}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\delta x_k]ds \tag{7.24}$$

若在元素边界上方程(7.10)式成立，于是上面各式变为

$$e_1+e_2=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}[A_0l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j]\delta x_k ds \tag{7.25}$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_1}[P_e+(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,k}-u_{i,k})\delta x_k]ds \tag{7.26}$$

$$e_4=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}[A_0l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j]\delta x_k ds \tag{7.27}$$

7.2.4 余能型最佳剖分变分原理

对固体系统进行几何剖分，在逐步细分单元与分片构造待解

函数的基础上，具备下列条件：

(1) 应力满足平衡方程(1.1)式；

(2) 应力函数满足力的边界条件(1.7)式以及附加力的边界条件(6.114)式（或为(6.120)式，或为(6.125)式）；

(3) 在元素交界面上，应力与元素尺寸改变量δx_j为连续的；

(4) 应力，位移、元素尺寸改变量同时作为能量泛函实现极值的参变量；

(5) 固体系统的整体尺寸为常数时，在容许的应力、位移、元素尺寸改变量中，使泛函(7.28)式实现驻值条件的解为弹性力学问题的近似解。

$$\mu_{eb}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}B_0|J|\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j|J_i|\mathrm{d}s\right\} \quad (7.28)$$

或者说，满足变分方程(7.29)式的容许的应力、位移、元素尺寸改变量为弹性力学问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\delta\left[\iiint_{V_a}B_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right]\right.$$
$$\left.+\iint_{S_a}B_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s+\iint_{S_a\cap S_2}P_u\mathrm{d}s\right\}=0 \qquad (7.29)$$

其中B_0为(6.103)式，以及沿边界S_2的方向上，划分的元素在逐步细分过程中，其边界亦是变化的，故有

$$P_u=B_0l_j\delta x_j-(\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\delta x_j)_{,j\neq i} \qquad (7.30)$$

7.2.5　余能型收敛性条件

在一阶变分为零的条件下，由泛函(7.28)式求得待解函数在元素交界面与在整体边界上，以及在孔洞（或裂纹）边界上应满足的条件为有限元法收敛的必要条件，其必要条件为

1. 横联收敛性条件

$$u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{7.31}$$

$$B_0 l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{7.32}$$

$$P_u=B_0 l_j\delta x_j-(\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\delta x_j)_{,j\neq i}=0 \qquad (S_2) \tag{7.33}$$

在元素边界上，令

$$\delta\sigma_{ij}l_j=\delta\sigma_{ij}l_j-(\sigma_{ij}l_j)_{,k}\delta x_k \tag{7.34}$$

于是上面各式变为

$$u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{7.35}$$

$$B_0 l_k-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,k}\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{7.36}$$

$$P_u-(\bar{u}_i-u_i)(\sigma_{ij}l_j)_{,k}\delta x_k=0 \qquad (S_2) \tag{7.37}$$

若在元素边界上，令

$$\sigma_{ij}l_j=T_i$$

所以

$$\delta\sigma_{ij}=T_{i,k}\delta x_k \tag{7.38}$$

于是上面各式变为

$$B_0 l_k+[T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k}]\,u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{7.39}$$

$$P_u+(u_i-\bar{u}_i)[T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k}]\delta x_k=0 \tag{7.40}$$

2. 串联收敛性条件

若在元素边界上，方程(7.34)式成立，则有

$$[(B_0 l_k-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,k})\delta x_k+u_i\delta\sigma_{ij}l_j]_{S_h}=0 \tag{7.41}$$

若在元素边界上，方程(7.38)式成立，则有

$$[B_0 l_k+(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})u_i]_{S_h}=0 \tag{7.42}$$

其中S_h为介质中的孔洞（或裂纹）边界。

7.2.6 余能型误差估算公式

这里介绍的误差估算公式是能量误差的后验可计算的误差公

式。这种误差是待解函数不满足收敛性条件时，在元素交界面上以及整体边界上所导入的误差。

后验误差公式为

$$e=e_1+e_2+e_3+e_4 \tag{7.43}$$

其中

$$e_1=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}u_i\bar{\delta}(\tilde{\sigma}_{ij}l_j)\mathrm{d}s \tag{7.44}$$

$$e_2=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}B_0 l_j\delta x_j\mathrm{d}s \tag{7.45}$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_2}P_u\mathrm{d}s \tag{7.46}$$

$$e_4=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}[B_0 l_j\delta x_j+u_i\bar{\delta}(\sigma_{ij}l_j)]\mathrm{d}s \tag{7.47}$$

若在元素边界上，方程(7.34)式成立，则有

$$e_1=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}u_i\delta(\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s \tag{7.48}$$

$$e_2=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}[B_0 l_k-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,k}]\delta x_k\mathrm{d}s \tag{7.49}$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_2}[P_u-(\bar{u}_i-u_i)(\sigma_{ij}l_j)_{,k}\delta x_k\mathrm{d}s \tag{7.50}$$

$$e_4=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}[(B_0 l_k-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,k})\delta x_k$$

$$+u_i\delta(\sigma_{ij}l_j)]\mathrm{d}s \tag{7.51}$$

若在元素边界上，方程(7.38)式成立，则有

$$e_1+e_2=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}[B_0l_k+(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})u_i]\delta x_k\mathrm{d}s \quad (7.52)$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_2}[P_u-(\bar{u}_i-u_i)(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})\delta x_k\mathrm{d}s \quad (7.53)$$

$$e_4=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}[B_0l_k-(\bar{u}_i-u_i)(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})]\delta x_k\mathrm{d}s \quad (7.54)$$

其它类型的最佳剖分变分原理、收敛性条件以及误差估算公式，从前面所学知识可以很方便的获得，在此论述从略。

§7.3 塑性形变理论的最佳剖分变分原理

7.3.1 势能型最佳剖分变分原理

对固体系统进行几何剖分，在逐步细分单元与分片构造待解函数的基础上，满足下列条件：

(1) 应变、位移满足应变位移(1.32)式；

(2) 位移函数满足位移边界条件(1.40)式以及附加边界条件；

(3) 在元素交界面上，位移与元素尺寸改变量δx_j为连续的；

(4) 应变、位移、元素尺寸改变量同时作为能量泛函实现极值的参变量；

(5) 固体系统的整体尺寸为常数时，在容许函数的应变、位移、元素尺寸改变量中，使泛函(7.48)式实现驻值条件的解为塑性形变理论问题的近似解。

$$\mu_{da}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}A_0|J|\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_iu_i|J_i|\mathrm{d}s\right\} \quad (7.48)$$

或者说，满足变分方程(7.49)式的容许的应变、位移、元素尺寸改变量为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\left\{\delta\left[\iiint_{V_\alpha} A_0 dv - \iint_{S_\alpha \cap S_1} \bar{P}_i u_i ds\right] + \iint_{S_\alpha} A_0 l_j \delta x_j ds + \iint_{S_\alpha \cap S_1} P_d ds\right\} = 0 \qquad (7.49)$$

其中A_0为(6.189)式；$|J|$与$|J_i|$为(6.10)式；P_d为(6.193)式。

7.3.2 势能型收敛性条件

在一阶变分为零的条件下，由泛函(7.48)式求得待解函数在元素交界面与在整体边界上，以及在孔洞(或裂纹)边界上应满足的条件为有限元法收敛的必要条件，其必要条件为

1. 横联收敛性条件

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j \Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0} = 0 \qquad (7.50)$$

$$A_0 l_j \Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0} = 0 \qquad (7.51)$$

$$P_d = A_0 l_j \delta x_j - (\bar{P}_i u_j \delta x_j)_{,j*i} = 0 \qquad (S_1) \qquad (7.52)$$

若在元素边界上，令

$$\delta u_i = \delta u_i - u_{i,k}\delta x_k \qquad (7.53)$$

于是上面各式变为

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j \Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0} = 0 \qquad (7.54)$$

$$A_0 l_k - u_{i,k}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j \Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0} = 0 \qquad (7.55)$$

$$P_d - u_{i,k}\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j - \bar{P}_i\right)\delta x_k = 0 \qquad (S_1) \qquad (7.56)$$

若在元素边界上，令

$$u_i = R_i$$

所以

$$\delta u_i = R_{i,k}\delta x_k \tag{7.57}$$

于是上面各式变为

$$A_0 l_k + (R_{i,k} - u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j \Big|_{s_{ab}-0}^{s_{ab}+0} = 0 \tag{7.58}$$

$$P_d + \left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j - \bar{P}_i\right)(R_{i,k} - u_{i,k})\delta x_k = 0 \qquad (S_1) \tag{7.59}$$

2. 串联收敛性条件

若在元素边界上，方程(7.53)式成立，则有

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j\right)_{s_h} = 0 \tag{7.60}$$

$$\left(A_0 l_k - u_{ik}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j\right)_{s_h} = 0 \tag{7.61}$$

若在元素边界上，方程(7.57)式成立，则有

$$\left[A_0 l_k + (R_{i,k} - u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_i\right]_{s_h} = 0 \tag{7.62}$$

7.3.3 势能型误差估算公式

当收敛性条件不能满足时，在元素的交界面与整体边界上，以及孔洞（或裂纹）的边界上就导入了误差。这种误差是能量误差，即是可计算的后验误差，其公式为

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \tag{7.63}$$

其中

$$e_1 = \sum_{a=1}^{M} \iint_{S_a} \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} l_j \,\delta u_i \mathrm{d}s \tag{7.64}$$

$$e_2 = \sum_{a=1}^{M} \iint_{S_a} A_0 l_j \delta x_j \mathrm{d}s \tag{7.65}$$

$$e_3 = \sum_{a=1}^{M} \iint_{S_a \cap S_1} P_d \,\mathrm{d}s \tag{7.66}$$

$$e_4=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\delta\bar{u}_i+A_0l_j\delta x_j\right)ds \tag{7.67}$$

若在元素边界上，方程(7.53)式成立，于是上面各式变为

$$e_1=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\,\delta u_i ds \tag{7.68}$$

$$e_2=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}\left(A_0l_k-u_{i,k}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right)\delta x_k ds \tag{7.69}$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_1}\left[P_d-\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right)u_{i,k}\delta x_k\right]ds \tag{7.70}$$

$$e_4=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}\left[\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\,\delta u_i+\left(A_0l_k-u_{i,k}\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_i\right)\delta x_k\right]ds \tag{7.71}$$

若在元素边界上，方程(7.57)式成立，于是上面各式变为

$$e_1+e_2=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}\left[A_0l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right]\delta x_k ds \tag{7.72}$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_1}\left[P_d+\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right)(R_{i,k}-u_{i,k})\right]\delta x_k ds \tag{7.73}$$

$$e_4=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}\left[A_0l_k+(R_{i,k}-u_{i,k})\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}l_j\right]\delta x_k ds \tag{7.74}$$

7.3.4 余能型最佳剖分变分原理

对固体系统进行几何剖分，在逐步细分单元与分片构造待解函数的基础上，满足下列条件：

(1) 应力满足平衡方程(1.31)式，在边界上满足的边界条件(1.39)式以及力的附加边界条件；

(2) 应力、位移、元素尺寸改变量同时作为能量泛函实现极值时的参变量；

(3) 在元素交界面上，应力与元素尺寸改变量δx_j为连续的；

(4) 固体系统的整体尺寸为常数时，在容许的应力、位移、元素尺寸改变量中，使泛函(7.75)式实现驻值条件的解，为塑性形变理论问题的近似解。

$$\mu_{ab}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}B_0|J|\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j|J_i|\mathrm{d}s\right\} \quad (7.75)$$

或者说，满足变分方程(7.76)式的容许的应力、位移、元素尺寸改变量为塑性形变理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\delta\left[\iiint_{V_a}B_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right]+\iint_{S_a}B_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s+\iint_{S_a\cap S_2}P_{du}\mathrm{d}s\right\}=0 \quad (7.76)$$

其中B_0为(6.253)式，$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式(6.10)式，以及沿边界S_2的方向上，划分的元素在逐步细分过程中，其边界亦是变化的，故有

$$P_{du}=B_0l_j\delta x_j-(\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\delta x_j)_{,j\neq i} \quad (7.77)$$

7.3.5 余能型收敛性条件

在一阶变分为零的条件下，由泛函(7.75)式求得待解函数在元素交界面上与在整体边界上，以及在孔洞（或裂纹）边界上应满足的条件为有限元法收敛的必要条件，其必要条件为

1. 横联收敛性条件

$$u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (7.78)$$

$$B_0l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (7.79)$$

$$P_{du}=B_0 l_j\delta x_j-(\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\delta x_j)_{,j\neq i}=0\ (S_2) \quad (7.80)$$

若在元素边界上，令

$$\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j=\delta\sigma_{ij}l_j-(\sigma_{ij}l_j)_{,k}\delta x_k \quad (7.81)$$

于是上面各式变为

$$u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (7.82)$$

$$B_0 l_k-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,k}\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (7.83)$$

$$P_{du}-(\bar{u}_i-u_i)(\sigma_{ij}l_j)_{,k}\delta x_k=0 \qquad (S_2) \quad (7.84)$$

若在元素边界上，令

$$\sigma_{ij}l_j=T_i$$

所以

$$\delta\sigma_{ij}l_j=T_{i,k}\delta x_k \quad (7.85)$$

于是上面各式变为

$$B_0 l_k+(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (7.86)$$

$$P_{du}(\bar{u}_i-u_i)(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})\delta x_k=0\ (S_2) \quad (7.87)$$

2. 串联收敛性条件

若在元素边界上，方程(7.81)式成立，则有

$$\left[\left(B_0 l_k-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,k}\right)\delta x_k+u_i\delta\sigma_{ij}l_j\right]_{S_h}=0 \quad (7.88)$$

若在元素边界上，方程(7.82)式成立，则有

$$\left[B_0 l_k+(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})u_i\right]_{S_h}=0 \quad (7.89)$$

7.3.6 余能型误差估算公式

当待解函数不满足交界条件与附加边界条件，以及在孔洞（或裂纹）边界上的条件时，就产生误差。这种误差就是能量误差，是可计算的后验误差，其形式为

$$e=e_1+e_2+e_3+e_4 \tag{7.90}$$

其中

$$e_1=\sum_{\alpha=1}^{M}\iint_{S_\alpha} u_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{7.91}$$

$$e_2=\sum_{\alpha=1}^{M}\iint_{S_\alpha} B_0 l_j\delta x_j\mathrm{d}s \tag{7.92}$$

$$e_3=\sum_{\alpha=1}^{M}\iint_{S_\alpha\cap S_2} \mathrm{P}_{du}\mathrm{d}s \tag{7.93}$$

$$e_4=\sum_{\alpha=1}^{M}\iint_{S_\alpha\cap S_h} (B_0 l_j\delta x_j+u_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s \tag{7.94}$$

若在元素边界上，方程(7.81)式成立，则有

$$e_1=\sum_{\alpha=1}^{M}\iint_{S_\alpha} u_i\delta(\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s \tag{7.95}$$

$$e_2=\sum_{\alpha=1}^{M}\iint_{S_\alpha} [B_0 l_k-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,k}]\delta x_k\mathrm{d}s \tag{7.96}$$

$$e_3=\sum_{\alpha=1}^{M}\iint_{S_\alpha\cap S_2} [\mathrm{P}_{du}-(\bar{u}_i-u_i)(\sigma_{ij}l_j)_{,k}\delta x_k]\mathrm{d}s \tag{7.97}$$

$$e_4=\sum_{\alpha=1}^{M}\iint_{S_\alpha\cap S_h} [(B_0 l_k-u_i(\mathrm{d}_{ij}l_j)_{,k})\delta x_k \\ +u_i\delta(\sigma_{ij}l_j)]\mathrm{d}s \tag{7.98}$$

若在元素边界上，方程(7.85)式成立，则有

$$e_1+e_2=\sum_{\alpha=1}^{M}\iint_{S_\alpha} [B_0 l_k+(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})u_i]\delta x_k\mathrm{d}s \tag{7.99}$$

$$e_3 = \sum_{a=1}^{M} \iint_{S_a \cap S_2} [P_{du} - (\bar{u}_i - u_i)(T_{i,k} - (\sigma_{ij} l_j)_{,k})] \delta x_k ds \tag{7.100}$$

$$e_4 = \sum_{a=1}^{M} \iint_{S_a \cap S_h} [B_0 l_k - (\bar{u}_i - u_i)(T_{i,k} - (\sigma_{ij} l_j)_{,k})] \delta x_k ds \tag{7.101}$$

这些最佳剖分变分原理以及其它公式，在形式上与弹性力学问题的原理和公式相似，但其中A_0，B_0，P_c，P_u，P_d，P_{du}是不相同的。因此，其它形式的塑性形变理论的最佳剖分变分原理可类似推出，在此从略。

§7.4 塑性流动理论的最佳剖分变分原理

7.4.1 势能型最佳剖分变分原理

对固体系统进行几何剖分，在逐步细分单元与分片构造待解函数的基础上，满足下列条件：

(1) 应变与位移增量满足应变位移增量(1.64)式；

(2) 位移函数满足位移边界条件(1.70)式以及其附加边界条件；

(3) 在元素交界面上，位移增量与元素尺寸改变量为连续的；

(4) 应变与位移增量及元素尺寸改变量同时作为能量泛函实现极值的参变量；

(5) 固体系统的整体尺寸为常数时，在容许函数的应变与位移增量以及元素尺寸改变量中，使泛函(7.102)式实现驻值条件的解，为塑性流动理论问题的近似解。

$$\mu_{pa}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}A_0|J|dv-\iint_{S_a\cap S_1}d\bar{P}_i du_i|J_i|ds\right\} \quad (7.102)$$

或者说，满足变分方程(7.103)式的容许的应变增量、位移增量、元素尺寸改变量，为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\delta\left[\iiint_{V_a}A_0dv-\iint_{S_a\cap S_1}d\bar{P}_i du_i ds\right]\right.$$

$$\left.+\iint_{S_a}A_0 l_j\delta x_j ds+\iint_{S_a\cap S_1}dP_p ds\right\}=0 \quad (7.103)$$

其中A_0为(1.75)式；$|J|$与$|J_i|$为(6.10)式；dP_p为(6.318)式。

7.4.2 势能型收敛性条件

在一阶变分为零的条件下，由泛函(7.102)式求得待解函数在元素交界面上与在整体边界上，以及在孔洞（或裂纹）边界上应满足的条件为有限元法收敛的必要条件；其必要条件为

1. 横联收敛性条件

$$\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (7.104)$$

$$A_0(d\varepsilon_{ij})l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (7.105)$$

$$dP_p=A_0(d\varepsilon_{ij})l_j\delta x_j-(d\bar{P}_i du_i\delta x_j)_{,j+i} \quad (S_1) \quad (7.106)$$

若在元素边界上，令

$$\bar{\delta}(du_i)=\delta(du_i)-du_{i,k}\delta x_k \quad (7.107)$$

于是上面各式变为

$$\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (7.108)$$

$$A_0(d\varepsilon_{ij})l_k-u_{i,k}\left(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \quad (7.109)$$

$$dP_p-du_{i,k}\left(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j-d\bar{P}_i\right)\delta x_k=0 \quad (S_1) \quad (7.110)$$

若在元素边界上，令

$$du_i = dR_i$$

所以

$$\delta(du_i) = dR_{i,k}\delta x_k \tag{7.111}$$

于是上面各式变为

$$A_0(d\varepsilon_{ij})l_k + (dR_{i,k} - du_{i,k})\left(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)\Bigg|_{\varepsilon_{ab}-0}^{\varepsilon_{ab}+0} = 0 \tag{7.112}$$

$$dP_p + \left(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j - d\bar{P}_i\right)(dR_{i,k} - du_{i,k})\delta x_k = 0 \quad (S_1) \tag{7.113}$$

2. 串联收敛性条件

若在元素边界上，方程(7.53)式成立，则有

$$\left(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{s_h} = 0 \tag{7.114}$$

$$\left(A_0(d\varepsilon_{ij})l_k - du_{i,k}\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{s_h} = 0 \tag{7.115}$$

其中S_h为介质中的孔洞（或裂纹）边界。

若在元素边界上，方程(7.111)式成立，则有

$$\left[A_0(d\varepsilon_{ij})l_k + (dR_{i,k} - du_{i,k})\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right]_{s_h} = 0 \tag{7.116}$$

7.4.3 势能型误差估算公式

当收敛性条件不能满足时，在元素的交界面上与整体边界上，以及孔洞（或裂纹）扩展的边界上就导入了误差。这些误差就是能量误差，是可计算的后验误差，其公式为

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \tag{7.117}$$

其中

$$e_1 = \sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\,\delta du_i ds \tag{7.118}$$

$$e_2=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}A_0(d\varepsilon_{ij})l_j\delta x_j ds \tag{7.119}$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_1}dP_p ds \tag{7.120}$$

$$e_4=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}\left(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\bar{\delta}(du_i)+A_0(d\varepsilon_{ij})l_j\delta x_j\right)ds \tag{7.121}$$

若在元素边界上，方程(7.107)式成立，于是上面各式变为

$$e_1=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\delta(du_i)ds \tag{7.122}$$

$$e_2=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}\left(A_0(d\varepsilon_{ij})l_k-du_{i,k}\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)\delta x_k ds \tag{7.123}$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_1}\left[dP_p-\left(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j-d\bar{P}_i\right)du_{i,k}\delta x_k\right]ds \tag{7.124}$$

$$e_4=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}\left[\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\delta(du_i)\right.$$
$$\left.+\left(A_0(d\varepsilon_{ij})l_k-du_{i,k}\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)\delta x_k\right]ds \tag{7.125}$$

若在元素边界上，方程(7.111)式成立，于是上面各式变为

$$e_1+e_2=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}\left[A_0(d\varepsilon_{ij})l_k+(d\bar{R}_{i,k}\right.$$
$$\left.-du_{i,k})\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right]\delta x_k ds \tag{7.126}$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_1}\left[dP_p+\left(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j-d\bar{P}_i\right)(d\bar{R}_{i,k}\right.$$

$$-\mathrm{d}u_{i,k})\delta x_k\Big]\mathrm{d}s \quad (7.127)$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}\Big[A_0(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})l_k+(\mathrm{d}R_{i,k}$$

$$-\mathrm{d}u_{i,k})\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\Big]\delta x_k\mathrm{d}s \quad (7.128)$$

7.4.4 余能型最佳剖分变分原理

对固体系统进行几何剖分，在逐步细分单元与分片构造待解函数的基础上，当满足下列条件：

(1) 应力满足平衡方程(1.63)式；

(2) 应力满足力的边界条件(1.69)式及其力的附加边界条件；

(3) 在元素交界面上，应力增量与元素尺寸改变量δx_j为连续的；

(4) 应力增量、位移增量与元素尺寸改变量同时作为能量泛函实现极值的参变量；

(5) 固体系统的整体尺寸为常数时，在容许函数的应力增量、位移增量及元素尺寸的改变量中，使泛函(7.129)式实现驻值条件的解，为塑性流动理论问题的近似解。

$$\mu_{pb}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}B_0|J|\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j|J_i|\mathrm{d}s\Big\} \quad (7.129)$$

或者说，满足变分方程(7.130)式的容许的应力增量、位移增量及元素尺寸改变量，为塑性流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\delta\Big[\iiint_{V_a}B_0\mathrm{d}v-\iint_{S_a\cap S_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\Big]$$

$$+\iint_{S_a}B_0l_j\delta x_j\mathrm{d}s+\iint_{S_a\cap S_2}\mathrm{d}P_{pu}\mathrm{d}s\Big\}=0 \quad (7.130)$$

其中$B_0=B(\mathrm{d}\sigma_{ij})$为(1.76)式；$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式(6.10)式，沿边界$S_2$的方向上划分元素，在逐步细分过程中其边界亦是变化的，故有

$$\mathrm{d}P_{pu}=B_0(\mathrm{d}\sigma_{ij})l_j\delta x_j-(\mathrm{d}\bar{u}_i\,\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j\,\delta x_j)_{,j\neq i} \tag{7.131}$$

7.4.5 余能型收敛性条件

在一阶变分为零的条件下，由泛函(7.129)式求得待解函数在元素交界面上与在整体边界上，以及在孔洞（或裂纹）边界上应满足的条件为有限元法收敛的必要条件，其必要条件为

1. 横联收敛性条件

$$\mathrm{d}u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{7.132}$$

$$(B_0(\mathrm{d}\sigma_{ij})l_j)\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{7.133}$$

$$\mathrm{d}P_{pu}=B_0(\mathrm{d}\sigma_{ij})l_j\delta x_j-(\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j\delta x_j)_{,j\neq i}=0 \quad (S_2) \tag{7.134}$$

若在元素边界上，令

$$\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)=\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)-(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)_{,k}\delta x_k \tag{7.135}$$

于是上面各式变为

$$\mathrm{d}u_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{7.136}$$

$$B_0(\mathrm{d}\sigma_{ij})l_k-\mathrm{d}u_i(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)_{,k}\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{7.137}$$

$$\mathrm{d}P_{pu}-(\mathrm{d}\bar{u}_i-\mathrm{d}u_i)(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)_{,k}\delta x_k=0 \quad (S_2) \tag{7.138}$$

若在元素边界上，令

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j=\mathrm{d}T_i$$

所以

$$\delta(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j)=\mathrm{d}T_{i,k}\delta x_k \tag{7.139}$$

于是上面各式变为

$$B_0(d\sigma_{ij})l_k+(dT_{i,k}-du_{i,k})du_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \qquad (7.140)$$

$$dP_{pu}-(d\bar{u}_i-du_i)(dT_{i,k}-(d\sigma_{ij}l_j)_{,k})\delta x_k=0$$

$$(S_2) \qquad (7.141)$$

2. 串联收敛性条件

若在元素边界上，方程(7.135)式成立，则有

$$[(B_0(d\sigma_{ij})l_k-du_i(d\sigma_{ij}l_j)_{,k})\delta x_k+du_i\delta(d\sigma_{ij}l_j)]_{S_h}=0$$

$$(7.142)$$

若在元素边界上，方程(7.139)式成立，则有

$$[(B_0(d\sigma_{ij})l_k+(dT_{i,k}-(d\sigma_{ij}l_j)_{,k})du_i]_{S_h}=0 \qquad (7.143)$$

7.4.6 余能型误差估算公式

当待解函数不满足交界条件、附加边界条件，以及在孔洞（或裂纹）边界上的条件时，就会导入误差。这些误差就是能量误差，是可计算的后验误差，其公式为

$$e=e_1+e_2+e_3+e_4 \qquad (7.144)$$

其中

$$e_1=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}du_i\delta(d\sigma_{ij}l_j)ds \qquad (7.145)$$

$$e_2=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}B_0(d\sigma_{ij})l_j\delta x_j ds \qquad (7.146)$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_2}dP_{pu}ds \qquad (7.147)$$

$$e_4=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}[B_0(d\sigma_{ij})l_j\delta x_j+du_i\delta(d\sigma_{ij}l_j)]ds \qquad (7.148)$$

若在元素边界上，方程(7.135)式成立，则有

$$e_1=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a} du_i\delta(d\sigma_{ij}l_j)ds \qquad (7.149)$$

$$e_2=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}[B_0(d\sigma_{ij})l_k-du_i(d\sigma_{ij}l_j)_{,k}]\delta x_k ds \qquad (7.150)$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_2}[dP_{pu}-(d\bar{u}_i-du_i)(d\sigma_{ij}l_j)_{,k}\delta x_k]ds \qquad (7.151)$$

$$e_4=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}[(B_0(d\sigma_{ij})l_k-du_i(d\sigma_{ij}l_j)_{,k})\delta x_k$$

$$+du_i\delta(d\sigma_{ij}l_j)]ds \qquad (7.152)$$

若在元素边界上，方程(7.139)式成立，则有

$$e_1+e_2=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}[B_0(d\sigma_{ij})l_k$$

$$+(dT_{i,k}-(d\sigma_{ij}l_j)_{,k})du_i]\delta x_k ds \qquad (7.153)$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_2}[dP_{pu}-(d\bar{u}_i-du_i)(dT_{i,k}$$

$$-(d\sigma_{ij}l_j)_{,k})\delta x_k]ds \qquad (7.154)$$

$$e_4=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}[B_0(d\sigma_{ij})l_k-(d\bar{u}_i$$

$$-du_i)(dT_{i,k}-(d\sigma_{ij}l_j)_{,k})]\delta x_k ds \qquad (7.155)$$

§7.5 蠕变理论的最佳剖分变分原理

7.5.1 势能型最佳剖分变分原理

对固体系统进行几何剖分，在逐步细分单元与分片构造待解

函数的基础上，当满足下列条件：

(1) 应变速度与位移速度满足(1.93)式；

(2) 在边界S_2上满足位移边界条件(1.99)式及其附加边界条件；

(3) 在元素交界面上，位移速度与元素尺寸改变量δx_j均为连续函数；

(4) 应变速度、位移速度、元素尺寸改变量同时作为能量泛函实现极值的参变量；

(5) 固体系统的整体尺寸为常数；

(6) 体积不可压缩与略去弹性变形时，在容许位移速度、应变速度及元素尺寸改变量中，使泛函(7.156)式实现驻值条件的解，为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\mu_{ca}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}A_0|J|dv-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i\,J_i|ds\right\} \quad (7.156)$$

或者说，满足变分方程(7.157)式的容许的位移速度、应变速度、元素尺寸改变量，为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\delta\left[\left(\iiint_{V_a}A_0dv-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i\dot{u}_ids\right)+\iint_{S_a}A_0l_j\delta x_jds+\iint_{S_a\cap S_1}P_c\,ds\right]=0 \quad (7.157)$$

其中

$$A_0=\frac{1}{1+\mu}2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i \quad (7.158)$$

$$P_c=A_0l_j\delta x_j-(\bar{P}_i\dot{u}_i\delta x_j)_{,j\neq i} \quad (7.159)$$

7.5.2 势能型收敛性条件

在能量泛函的驻值条件下，由泛函(7.156)式求得有限元法收敛的必要条件，其必要条件为

1. 横联收敛性条件

在元素边界上，已知$\delta \bar{\dot{u}}_i=\delta \dot{u}_i-\dot{u}_{i,k}\delta x_k$，令

$$\dot{u}_i=\dot{R}_i$$

所以
$$\delta \dot{u}_i=(\dot{R}_{i,k}-\dot{u}_{i,k})\delta x_k \tag{7.160}$$

于是横联收敛性条件为

$$A_0 l_k+(\dot{R}_{i,k}-\dot{u}_{i,k})2g(H)\dot{e}_{ij}\, l_j\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{7.161}$$

$$P_c+(2g(H)\dot{e}_{ij}\, l_j-\bar{P}_i)(\dot{R}_{i,k}-\dot{u}_{i,k})\delta x_k=0 \quad (S_1) \tag{7.162}$$

2. 串联收敛性条件

在元素边界上，若(7.160)式成立，则有串联收敛性条件，其条件为

$$[A_0 l_k+(\dot{R}_{i,k}-\dot{u}_{i,k})2g(H)\dot{e}_{ij}\, l_j]_{S_h}=0 \tag{7.163}$$

7.5.3 势能型误差估算公式

当收敛性条件不满足时，在元素的交界面上、整体边界上，以及孔洞（或裂纹）边界上导入了误差。在元素边界上，方程(7.160)式成立，则有

$$e=e_1+e_2+e_3 \tag{7.164}$$

其中

$$e_1=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}[A_0 l_k+(\dot{R}_{i,k}-\dot{u}_{i,k})2g(H)\dot{e}_{ij}\, l_j]\delta x_k ds \quad (7.16$$

$$e_2=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_1}[P_c+(2g(H)\dot{e}_{ij}l_j$$

$$-\bar{P}_i)(\dot{R}_{i,k}-\dot{u}_{i,k})\delta x_k]ds \tag{7.166}$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}[A_0 l_k+(\dot{R}_{i,k}-\dot{u}_{i,k})$$

$$\cdot 2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}\, l_j]\delta x_k \mathrm{d}s \tag{7.167}$$

7.5.4 余能型最佳剖分变分原理

对固体系统进行几何剖分，在逐步细分单元与分片构造待解函数的基础上，当满足下列条件：

(1) 应力满足平衡方程(1.92)式；

(2) 应力满足力的边界条件(1.98)式及其附加边界条件；

(3) 在元素交界面上，应力函数与元素尺寸改变量δx_j为连续的；

(4) 应力函数、位移速度以及元素尺寸改变量同时作为能量泛函实现驻值条件的参变量；

(5) 固体系统的整体尺寸为常数；

(6) 满足不可压缩条件和略去弹性变形时，在容许函数的应力函数、位移速度以及元素尺寸改变量中，使泛函(7.168)式实现驻值条件的解，为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\mu_{cb} = \sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a} B_0 |J| \mathrm{d}v - \iint_{S_a\cap S_2} \bar{\dot{u}}_i \sigma_{ij} l_j |J_i| \mathrm{d}s \tag{7.168}\right.$$

满足变分方程(7.169)式的容许的应力函数、位移速度以及元素尺寸改变量，为稳定蠕变流动理论问题的近似解。

$$\sum_{a=1}^{M}\left[\bar{\delta}\left(\iiint_{V_a} B_0 \mathrm{d}v - \iint_{S_a\cap S_2} \bar{\dot{u}}_i \sigma_{ij} l_j \mathrm{d}s\right) + \iint_{S_a} B_0 l_j \delta x_j \mathrm{d}s + \iint_{S_a\cap S_2} P_{cu} \mathrm{d}s\right] = 0 \tag{7.169}$$

其中

$$B_0 = \frac{1}{1+m}\left(\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\sigma'_{ij} \tag{7.170}$$

$$P_{cu} = B_0 l_j \delta x_j - (\dot{u}_i \sigma_{ij} l_j \delta x_j)_{,j \neq i} \tag{7.171}$$

7.5.5 余能型收敛性条件

在能量泛函的驻值条件下，由泛函(7.168)式求得待解函数在元素交界面上与在整体边界上，以及在孔洞（或裂纹）边界上满足的条件为有限元法收敛性的必要条件，其必要条件为

1. 横联收敛性条件

在元素边界上，已知

$$\bar{\delta}(\sigma_{ij}l_j)=\delta(\sigma_{ij}l_j)-(\sigma_{ij}l_j)_{,k}\delta x_k$$

并令

$$(\sigma_{ij}l_j)=T_i \tag{7.172}$$

所以

$$\delta(\sigma_{ij}l_j)=(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})\delta x_k$$

于是，收敛性条件为

$$B_0 l_k+(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})\dot{u}_i\Big|_{S_{ab}-0}^{S_{ab}+0}=0 \tag{7.173}$$

$$P_{ou}+(\bar{\dot{u}}_i-\dot{u}_i)(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})\delta x_k=0\ (S_2) \tag{7.174}$$

2. 串联收敛性条件

在元素边界上，方程(7.172)式成立，则收敛性条件为

$$[B_0 l_k+(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})\dot{u}_i]_{S_h}=0 \tag{7.175}$$

7.5.6 余能型误差估算公式

当待解函数不满足上述收敛性条件时，在元素边界上、整体边界上，以及孔洞（或裂纹）边界上导入了误差，其误差公式为

$$e=e_1+e_2+e_3 \tag{7.176}$$

其中

$$e_1=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a}[B_0 l_k+(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})\dot{u}_i]\delta x\mathrm{d}s \tag{7.177}$$

$$e_2=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_2}[P_{cu}-(\dot{\bar{u}}_i-\dot{u}_i)(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})\delta x_k]ds \tag{7.178}$$

$$e_3=\sum_{a=1}^{M}\iint_{S_a\cap S_h}[B_0 l_k-(\dot{\bar{u}}_i-\dot{u}_i)(T_{i,k}-(\sigma_{ij}l_j)_{,k})]\delta x_k ds \tag{7.179}$$

上述公式的推导是方便的，在此证明从略。

§7.6 结　论

有限元法与边界元法的最佳剖分变分原理是一个可动边界的变分问题。

在能量泛函的一阶变分为零的条件下，导出了收敛性的必要条件。当这些条件不能满足时，则能量泛函的一阶变分不等于零，求解问题的变分问题与微分方程不等价，解的近似性的精确度就要进行分析。

后验误差估算公式就是能量误差，是后验可计算的误差公式，可作为自适应有限元与边界元法的误差公式。

当待解函数在整个定义域内充分光滑性时，交界条件自动满足，则在交界面上导入的误差自然等于零，仅余下在整体边界与孔洞（或裂纹）边界上的边界附加项。

参 考 文 献

1　牛庠均．固体的离散型变分原理——有限元离散分析的变分原理．应用数学和力学，1981，2(5)

2　牛庠均，康树平．有限元收敛条件及误差公式．北京工业大学学报，1991，17(2)

第八章　断裂分析中的变分问题

§8.1　概　述

断裂力学是近代迅速发展起来的一门新兴学科。这门学科在理论方面是复杂的，本质上是动态非线性问题（包括几何非线性与物理非线性），在实际应用方面是很广泛的。这门学科的发展与固体力学、物理力学和数学方法的理论研究与实验分析的发展密切相关。这里仅利用可动边界的变分理论来分析裂纹扩展中的3个基本问题[1~8]。

8.1.1　裂纹扩展

裂纹的形成、扩展，以至于引起结构或构件的断裂破坏，整个过程是十分复杂的。这里利用可动边界的变分理论来分析裂纹扩展中的3个基本问题——裂纹扩展中的能量释放量与能量释放率的计算；裂纹稳定扩展的稳定性条件；裂纹扩展中的结构或构件的寿命估算公式。这些理论成果要应用到具体的工程结构的断裂分析上，须要结合具体的情况（如裂纹尖端的实际的力学状态），及由宏观研究与微观分析所获得的断裂参数，才能在解决实际工程结构中取得效果。

1. 裂纹扩展中的能量泛函

对固体系统中任意分割而成的元素，就以裂纹边界为其部分边界的元素而言，当裂纹扩展时，元素的边界是可动边界。因此，利用变分方法来描述裂纹扩展中的问题是一个可动边界的变分问

题。

固体系统变形后（包括裂纹扩展中）的总能量（包括动能、势能、外力功，但略去热力学效应），按泰洛公式展开，可写为

$$F(u_i+\alpha\delta u_i,\ \varepsilon_{ij}+\alpha\delta\varepsilon_{ij},\ x_i+\alpha\delta x_i)$$
$$=F(u_i,\varepsilon_{ij},x_i)+\delta F+\delta^2 F+\cdots \tag{8.1}$$

其中δF为一阶变分；$\delta^2 F$为二阶变分。

根据第六章可动边界的变分理论可知，能量泛函的变分由两部分组成，其一是区域固定仅由变量函数的改变所产生的变分；其二是由于区域变动而产生的变分，所以裂纹扩展中的能量释放量就是由于区域变动而产生的能量泛函的变分，这里的区域变动是由于裂纹扩展的原因而形成的。

2. 裂纹扩展中的能量释放量

能量泛函实现极值的必要条件为

$$\delta F=0 \tag{8.2}$$

基于驻值条件（8.2）式，可求得裂纹扩展中的能量释放量。

定义

$$\left.\begin{aligned} N=N_{,n}&=\frac{\partial N_{crak}}{\partial(\delta n)}\\ N=N_{,x_i}&=\frac{\partial N_{crak}}{\partial(\delta x_i)}\end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

为裂纹扩展中的能量释放率，称N积分。但为了直接写出N积分的形式，常取$\delta n=\delta x_i=1$为N积分的定义。式中N_{crak}为裂纹扩展中沿裂纹边界的能量释放量；(δn) 为裂纹边界沿法线方向的改变量；(δx_i) 为裂纹边界沿x_i方向的改变。

3. 裂纹扩展的稳定条件

定义

$$\delta F=0,\ \ \delta^2 F>0 \tag{8.4}$$

为裂纹的稳定条件，满足这些条件时，裂纹扩展处于稳定状态。

定义

$$\delta F=0,\ \delta^2 F=0 \tag{8.5}$$

为裂纹扩展的临界条件，满足这些条件时，裂纹扩展处于临界状态。

定义

$$\delta F=0,\ \delta^2 F<0 \tag{8.6}$$

为裂纹扩展的不稳定条件，满足这些条件时，裂纹扩展处于不稳定状态。这时，结构（或构件）由于裂纹扩展的原因，随时有断裂破坏的可能。

根据裂纹扩展的临界条件（8.5)式，进行能量泛函的二阶变分运算，可求得各组明显的裂纹扩展的临界条件。

4．裂纹扩展时结构（或构件）的寿命估算公式

基于裂纹扩展的临界条件（8.5)式，进行变分运算，可以求得裂纹扩展临界条件的具体形式。由这些临界条件可以求得临界速度而根据临界速度又可求出裂纹扩展时结构（或构件）的寿命估算公式。

8.1.2 动力平衡条件

当固体系统处于动态时，待解函数均为坐标与时间的函数，静力平衡方程可改为动力平衡方程

$$\left(\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial(\dot{e}_{ij})}\right)_{,j} + \mathrm{d}\bar{F}_i - \rho\ddot{u}_i = 0 \tag{8.10}$$

动能为

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 \\ K &= \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial(\mathrm{d}u_i)}{\partial t}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

其它的基本方程（本构关系、应变位移关系及边界条件）与静力状态相同。

8.1.3 任意元素的边界写法

固体系统内部的任意元素的边界，为便于分析，可写为

$$\left.\begin{aligned} &S_a = S_{ab} \cup S_{ah} \cup S_{as_1} \cup S_{as_2} \\ &S_{ab} = S_a \cup S_b, \quad S_{ah} = S_a \cup S_h \\ &S_{as_1} = S_a \cup S_1, \quad S_{as_2} = S_a \cup S_2 \end{aligned}\right\} \tag{8.12}$$

其中S_{ab}为元素V_a与V_b之间的公共边界；S_{ah}为元素 V_a 与裂纹（或孔洞）之间的公共边界；S_{as_1}为元素V_a与整体边界S_1之间的公共边界；S_{as_2}为元素S_a与整体边界S_2之间的公共边界。

§8.2 弹性力学范畴的断裂分析的变分问题

对弹性力学范畴的断裂分析方面的问题，仅讨论静力状态下的裂纹扩展中的能量释放量与能量释放率的计算[5]。

8.2.1 裂纹扩展中能量释放量计算 I

1. 变形固体系统的总势能

将固体系统分割成有限个元素之和，因固体变形（或裂纹扩

展）的原因，固体系统的总势能为

$$F_{ea}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{V_a(\alpha)} A_0\Big(\zeta(\alpha),u_i(\zeta_i,\alpha),u_{i,j}(\zeta_i,\alpha),$$

$$\varepsilon_{ij}(\zeta_i,\alpha)\Big)dv(\zeta_i)$$

$$-\iint\limits_{S_a(\alpha)\cap S_1(\alpha)} \bar{P}_i u_i(\zeta_i,\alpha)ds(\zeta_i)\Big\} \tag{8.13}$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_i u_i \tag{8.14}$$

利用坐标变换（6.1）式，把泛函（8.13）式用固定积分域表示，则有

$$F_{ea}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{V_a} A_0(\zeta_i(\alpha),u_i(\zeta_i,\alpha),u_{i,j}(\zeta_i,\alpha),\varepsilon_{ij}(\zeta_i,\alpha))$$

$$\cdot|J|dv-\iint\limits_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i u_i(\zeta_i,\alpha)|J_i|ds \tag{8.15}$$

其中$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式（6.10)式。

2. 能量泛函的一阶变分

根据可动边界的变分理论，泛函（8.15）式的一阶变分等于零的形式，为

$$\delta F_{ea}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{V_a} -[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i]\delta u_i dv$$

$$+\iint\limits_{S_a}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\delta u_i ds$$

$$+\iint\limits_{S_a}[A_0-u_{i,n}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)]\delta n ds$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_1}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i ds$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_1}\left[P_e-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta n\right]ds\Big\}=0$$

(8.16)

其中 $$P_e=A_0\delta n-(\bar{P}_iu_i\delta x_j)_{,j\neq t} \quad (8.17)$$

由（8.16）式可知，泛函的变分由两部分组成，一部分是由于区域固定而变量函数的改变产生的变分；另一部分是由于区域的变动而产生的变分。裂纹扩展中的能量释放量就相对于区域变动使能量泛函产生的变分，这时的区域变动是由于裂纹扩展的原因而形成的。

对于从固体内部分割的任意元素V_a而言，在元素V_a内待解函数满足应变位移（1.2）式、平衡方程（1.1）式，以及位移边界条件（1.8）式；在元素边界S_a上位移函数为连续时，方程（8.16）式变为

$$\begin{aligned}N_{Fa}=&\iint\limits_{S_a}\left[A_0-u_{i,n}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\right]\delta n ds\\&+\iint\limits_{S_a}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j\delta u_i ds\\&+\iint\limits_{S_a\cap S_1}\left[P_e-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta n\right]ds\\&+\iint\limits_{S_a\cap S_1}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i ds\Big\}=0\end{aligned} \quad (8.18)$$

（1）当在元素S_a上，δu_i与$\delta n(\delta x_i)$相互无关时，方程（8.18）式的各积分项有下面几种情况。

在元素边界S_{ab}上：

$$N_{Fa,ab}=\iint\limits_{S_{ab}}\Big\{\left[A_0-u_{i,n}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j\right]_{S_{ab}+0}$$

$$-[A_0-u_{i,n}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j]_{S_{ab}-0}\Big\}\delta n\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{S_{ab}+0}-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{S_{ab}-0}]\delta u_i\mathrm{d}s \quad (8.19)$$

若

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{S_{ab}+0}=(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{S_{ab}-0}$$

则

$$N_{Fa,ab}=\iint_{S_{ab}}\Big\{[A_0-u_{i,n}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j]_{S_{ab}+0}$$

$$-[A_0-u_{i,n}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j]_{S_{ab}-0}\Big\}\delta n\mathrm{d}s \quad (8.20)$$

在元素边界S_{ah}上：

$$N_{Fa,ah}=\iint_{S_{ah}}[A_0-u_{i,n}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j]\delta n\mathrm{d}s \quad (8.21)$$

其中

$$a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j=\bar{P}_i=0$$

若在边界S_{ah}上有外力$\bar{P}_i$作用时，则有

$$N_{Fa,ah}=\iint_{S_{ah}}[P_e-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta n]\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_{ah}}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i\mathrm{d}s \quad (8.22)$$

在元素边界S_{as_1}上：

$$N_{Fa,s_1}=\iint_{S_a\cap S_1}[P_e-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta n]\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i\mathrm{d}s \quad (8.23)$$

在元素边界S_{as_2}上：

$$N_{Fa,s_2}=0 \qquad (\bar{u}_i=u_i) \qquad (8.24)$$

（2）当在元素的边界S_a上，δu_i与$\delta n(\delta x_i)$相关时，且令$u_i=R_i$，若$\delta u_i=\delta R_i=R_{i,k}\delta x_k=R_{i,n}\delta n$时，方程（8.18）式的各积分项有下面几种情况。

在元素边界S_{ab}上：

$$N_{Fa,ab}=\iint_{S_{ab}}\Big\{[A_0+(R_{i,n}-u_{i,n})a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j]_{S_{ab}+0}$$

$$-[A_0+(R_{i,n}-u_{i,n})a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j]_{S_{ab}-0}\Big\}\delta n ds \quad (8.25)$$

在元素边界S_{ah}上：

$$N_{Fa,ah}=\iint_{S_{ah}}[A_0+(R_{i,n}-u_{i,n})a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j]\delta n ds \quad (8.26)$$

若在裂纹边界S_{ah}上有外力$\bar{P}_i$作用时，则

$$N_{Fa,ah}=\iint_{S_{ah}}[P_e+(R_{i,n}-u_{i,n})(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j$$

$$-\bar{P}_i)\delta n]ds \qquad (8.27)$$

在元素边界S_{as_1}上：

$$N_{Fa,s_1}=\iint_{S_{as_1}}[P_e+(R_{i,n}-u_{i,n})(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j-\bar{P}_i)\delta n]ds \qquad (8.28)$$

在元素边界S_{as_2}上：

$$N_{Fa,s_2}=0 \qquad (\bar{u}_i=u_i) \qquad (8.29)$$

于是方程（8.18）式变为

$$N_{Fa}=N_{Fa,ab}+N_{Fa,ah}+N_{Fa,s_1}=0 \qquad (8.30)$$

其中$N_{Fa,ah}$为沿裂纹边界在裂纹扩展中的能量释放量。若已知$N_{Fa,ah}$时，根据（8.3）式可求得裂纹扩展中的能量释放率。

3. 边界积分变分原理 I

在变形固体内任意分割的元素V_a上，当待解函数满足应变位移（1.2）式、平衡方程（1.1）式、位移边界条件（1.8）式，在元素边界上位移函数为连续函数时，则满足边界变分方程（8.30）式的应变、位移函数为弹性力学问题的真实解。由（8.30）式可求得沿裂纹（或孔洞）边界法线方向的能量释放量和能量释放率。

顺便指出，能量释放率$(N_{Fa\gamma ak})_{,n}$是三维情况下的J积分，称为N积分。J积分的形式是它的特殊情况，在某些情况下，J积分的形式仅仅表示沿裂纹边界法线方向（或坐标方向）的能量释放率，并不是在整个元素边界S_a上均能成立的形式。

8.2.2 裂纹扩展中的能量释放量计算 II

1. 变形固体系统的总余能

将固体系统分割成有限个元素之和，由于固体变形（或裂纹扩展）的原因，固体系统的总余能为

$$F_{eb}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a(\alpha)} B_0(\xi_i(\alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))\mathrm{d}v(\xi_i)\right.$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_2} \bar{u}_i\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha)l_j\mathrm{d}s\right\} \qquad (8.31)$$

其中

$$B_0=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \qquad (8.32)$$

利用坐标变换（6.1）式，把泛函（8.31）式用固定积分域表示，则有

$$F_{eb}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}B_0(\xi_i(\alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))|J|\mathrm{d}v\right.$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2} \bar{u}_i\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha)l_j\mathrm{d}s\Big\} \tag{8.33}$$

其中$|J|$为雅各比行列式（6.10）式。

2．能量泛函的一阶变分

根据可动边界的变分理论，泛函（8.33）式的一阶变分等于零的形式，为

$$\delta F_{eb}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})\bar{\delta}\sigma_{ij}\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_a}u_i\delta\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s+\iint_{S_a}[B_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]\delta n\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\Big\}=0 \tag{8.34}$$

其中利用应力函数满足平衡方程的变分约束条件，即有

$$\iiint_V u_i\bar{\delta}(\sigma_{ij,j})\mathrm{d}v=\iiint_V -u_{i,j}\bar{\delta}\sigma_{ij}\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_a}u_i[\delta\sigma_{ij}l_j-(\sigma_{ij}l_j)_{,n}\delta n]\mathrm{d}s=0$$

$$\tag{8.35}$$

其中在元素边界上有

$$\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j=\delta(\sigma_{ij}l_j)-(\sigma_{ij}l_j)_{,n}\delta n$$

条件成立。

就固体内部分割的任意元素V_a而言，在元素V_a内部待解函数满足平衡方程（1.1）式、应变位移（1.2）式，以及力的边界条件（1.7）式；在元素边界上应力函数为连续函数时，方程（8.34）式变为

$$N_{Fb}=\iint_{S_a}[B_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]\delta n ds+\iint_{S_a}u_i\delta\sigma_{ij}l_j ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j ds\}=0 \tag{8.36}$$

(1) 当在元素S_a上，$\delta\sigma_{ij}l_j$与$\delta n(\delta x_i)$相互无关时，方程(8.36)式的各积分项有下面几种情况。

在元素边界S_{ab}上：

$$N_{Fb,ab}=\iint_{S_{ab}}\{[B_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]_{S_{ab}+0}$$

$$-[B_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]_{S_{ab}-0}\}\delta n ds$$

$$+\iint_{S_{ab}}[(u_i)_{S_{ab}+0}-(u_i)_{S_{ab}-0}]\delta\sigma_{ij}l_j ds \tag{8.37}$$

若$(u_i)_{S_{ab}+0}=(u_i)_{S_{ab}-0}$，则

$$N_{Fb,ab}=\iint_{S_{ab}}\{[B_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]_{Sab+0}$$

$$-[B_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]_{Sab-0}\}\delta n ds \tag{8.38}$$

在元素边界S_{ah}上：

$$N_{Fb,ah}=\iint_{S_{ah}}[B_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]\delta n ds \tag{8.39}$$

其中$\sigma_{ij}l_j=P_i=0$。

在元素边界S_{as_1}上：

$$N_{Fb\,s_1}=0 \quad \text{（假定满足力的边界条件）} \tag{8.40}$$

在元素边界S_{as_2}上：

$$N_{Fb,s_2}=\iint_{S_aS_2}(u_i-\bar{u}_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \qquad (8\cdot41)$$

（2）在元素边界S_a上，$\delta\sigma_{ij}l_j$与$\delta n(\delta x_i)$相关时，且令

$$\sigma_{ij}l_j=T_i$$

故

$$\delta(\sigma_{ij}l_j)=\delta T_i=T_{i,k}\delta x_k=T_{i,n}\delta n$$

于是，方程（8.36）式中各积分项有下面几种情况。

在元素边界S_{ab}上：

$$N_{Fb,ab}=\iint_{S_{ab}}\Big\{[B_0+(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j)_{,n})u_i]_{S_{ab}+0}$$

$$-[B_0+(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j)_{,n})u_i]_{S_{ab}-0}\Big\}\delta n\mathrm{d}s$$

$$(8\cdot42)$$

在元素边界S_{ah}上：

$$N_{Fb,ah}=\iint_{S_{ah}}[B_0+(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j)_{,n})u_i]\delta n\mathrm{d}s \qquad (8\cdot43)$$

在元素边界S_{as_1}上：

$$N_{Fb,s_1}=0 \quad \text{（假定满足力的边界条件）} \qquad (8\cdot44)$$

在元素边界S_{as_2}上：

$$N_{Fb,s_2}=\iint_{S_{as_2}}(u_i-\bar{u}_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \qquad (8\cdot45)$$

于是方程（8.36）式可写为

$$N_{Fb}=N_{Fb,ab}+N_{Fb,ah}+N_{Fb,s_2}=0 \qquad (8\cdot46)$$

其中$N_{Fb,ah}$为在余能密度条件下，沿裂纹边界在裂纹扩展中的能量释放量。

3. 边界积分变分原理Ⅱ

在变形固体内任意分割的元素V_a内，当待解函数满足平衡方程（1.1）式、应变位移（1.2）式、力的边界条件（1.7）式和力的附加边界条件；在元素边界上应力函数为连续函数时，则满足边界变分方程（8.46）式的应力、位移函数为弹性力学问题的真实解。由（8.46）式可求得沿裂纹（或孔洞）边界法线方向的能量释放量和能量释放率。

8.2.3 裂纹扩展中的能量释放量计算III

1. 变形固体系统的总势能的广义形式

将固体系统分割成有限个元素之和，由于固体变形（或裂纹扩展）的原因，固体系统的总势能的广义形式为

$$F_{ec}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a(\alpha)} A_0(\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),u_{i,j}(\xi_i,\alpha),\right.$$

$$\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))\,dv(\xi_i)$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}(u_i-\bar{u}_i)\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\,ds$$

$$\left.-\iint_{S_a(\alpha)\cap S_1(\alpha)}\bar{P}_i u_i(\xi_i,\alpha)ds(\xi_i)\right\} \qquad (8.47)$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_i u_i$$

$$-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right) \qquad (8.48)$$

利用坐标变换（6.1）式，把泛函（8.47）式化为固定积分域表示，则有

$$F_{ec}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{V_a}A_0(\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),u_{i,j}(\xi_i,\alpha),\right.$$

$$\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))|J|dv$$

$$-\iint_{S_a\cap S_2}(u_i-\bar{u}_i)\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j ds$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i u_i(\xi_i,\alpha)\,J_i|ds\Big\} \qquad (8.49)$$

其中$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式（6.10）式。

2. 能量泛函的一阶变分

根据可动边界的变分理论，泛函（8.49）式的一阶变分等于零的形式为

$$\delta F_{ac}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\Big[-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\bar{\delta}\sigma_{ij}$$

$$-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\bar{\delta}\varepsilon_{ij}-\Big(\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}$$

$$+\bar{F}_i\Big)\bar{\delta}u_i\Big]dv+\iint_{S_a}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\delta u_i ds$$

$$+\iint_{S_a}\Big[A_0-u_{i,n}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\Big]\delta n ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\Big[\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j-\bar{P}_i\Big]\delta u_i ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\Big[P_e-\left(\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j-\bar{P}_i\right)u_{i,k}\delta x_k\Big]ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}\Big[(\bar{u}_i-u_i)\bar{\delta}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\Big]ds\Big\}=0$$

(8.50)

其中

$$P_e=A_0 l_j\delta x_j-(\bar{P}_i u_i\delta x_j)_{,j*i} \qquad (8.51)$$

就固体内部分割的任意元素V_a而言，在元素V_a内待解函数满足平衡方程（1.1)式、应变位移（1.2)式，以及应力应变(1.3)式；在元素边界上，位移函数与改变量$\delta n(\delta x_k)$为连续函数时，则方程（8.50）式变为

$$
\begin{aligned}
N_{Pc}=&\iint_{S_a}\left[A_0-u_{i,n}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]\delta n\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_a}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\delta u\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_a\cap S_1}\left[\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j-\bar{P}_i\right]\delta u_i\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_a\cap S_1}\left[P_e-\left(\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j-\bar{P}_i\right)u_{i,n}\delta n\right]\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_a\cap S_2}\left[(\bar{u}_i-u_i)\bar{\delta}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]\mathrm{d}s\Big\}=0
\end{aligned}
\tag{8.52}
$$

(1) 当在元素S_a上，δu_i与$\delta n(\delta x_k)$相互无关时，方程(8.52)式中的各积分项有下面几种形式。

在元素边界S_{ab}上：

$$
\begin{aligned}
N_{Pc,ab}=&\iint_{S_{ab}}\left\{\left[A_0-u_{i,n}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]_{S_{ab}+0}\right.\\
&\left.-\left[A_0-u_{i,n}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]_{S_{ab}-0}\right\}\delta n\mathrm{d}s\\
&+\iint_{S_{ab}}\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]_{S_{ab}+0}\right.\\
&\left.-\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]_{S_{ab}-0}\right\}\delta u_i\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{8.53}
$$

若

$$\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]_{S_{ab}+0}=\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]_{S_{ab}-0}$$

则

$$N_{Fcrab}=\iint_{S_{ab}}\left\{\left[A_0-u_{i,n}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]_{S_{ab}+0}-\left[A_0-u_{i,n}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]_{S_{ab}-0}\right\}\delta n ds \tag{8.54}$$

在元素边界S_{ah}上：

$$N_{Fcrah}=\iint_{S_{ah}}\left[A_0-u_{i,n}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]\delta n ds \tag{8.55}$$

其中

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j=\bar{P}_i=0$$

若在边界S_{ah}上有外力$\bar{P}_i$作用时，则有

$$N_{Fcrah}=\iint_{S_{ah}}\left[P_e-\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j-\bar{P}_i\right)u_{i,n}\delta n\right]ds+\iint_{S_{ah}}\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j-\bar{P}_i\right]\delta u_i ds \tag{8.56}$$

在元素边界S_{as_1}上：

$$N_{Fcs_1}=\iint_{S_{as_1}}\left[P_e-\left(\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j-\bar{P}_i\right)u_{i,n}\delta n ds+\iint_{S_{as_1}}\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j-\bar{P}_i\right]\delta u_i ds\right. \tag{8.57}$$

在元素边界S_{as_2}上：

$$N_{Fcrs_2}=\iint_{S_{as_2}}(u_i-\bar{u}_i)\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j ds$$

(8.58)

(2) 当在元素边界S_a上，δu_i与$\delta n(\delta x_k)$相关时，且令$u_i=R_i$，若$\delta u_i=\delta R_i=R_{i,k}\delta x_k=R_{i,n}\delta n$，则方程 (8.52) 式中的各积分项有下面几种情况。

在元素边界S_{ab}上：

$$N_{Fcrab}=\iint_{S_{ab}}\left\{\left[A_0+(R_{i,n}-u_{i,n})\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]_{S_{ab}+0}-\left[A_0+(R_{i,n}-u_{i,n})\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]_{S_{ab}-0}\right\}\delta n ds \quad (8.59)$$

在元素边界S_{ah}上：

$$N_{Fcrah}=\iint_{S_{ah}}\left[A_0+(R_{i,n}-u_{i,n})\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right]\delta n ds \quad (8.60)$$

若在裂纹边界上有外力$\boldsymbol{P}_i$作用时，则有

$$N_{Fcrah}=\iint_{S_{ah}}\left\{P_e+(R_{i,n}-u_{i,n})\left[\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j-\bar{\boldsymbol{P}}_i\right]\delta n\right\}ds \quad (8.61)$$

在元素边界S_{as_1}上：

$$N_{Fcrs_1}=\iint\limits_{S_{as_1}}\Big\{P_e+(R_{i,n}-u_{i,n})$$

$$\Big[\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j-\bar{P}_i\Big]\delta n\Big\}ds$$

(8.62)

在元素边界S_{as_2}上：

$$N_{Fcrs_2}=\iint\limits_{S_{as_2}}(u_i-\bar{u}_i)\delta\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big)l_j ds$$

(8.63)

于是方程（8.52）式可写为

$$N_{Fc}=N_{Fcrab}+N_{Fcrah}+N_{Fcrs_1}+N_{Fcrs_2}=0 \qquad (8.64)$$

其中N_{Fcrah}为沿裂纹边界在裂纹扩展中的能量释放量。

3．边界积分变分原理 I

在变形固体内任意分割的元素V_a上，当待解函数满足平衡方程（1.1）式、应变位移（1.2）式，以及应力应变（1.3）式；在元素边界上位移函数与改变量$\delta n(\delta x_k)$为连续函数时，则满足边界变分方程（8.64）式的应力、位移、应变函数为弹性力学问题的真实解。由（8.64）式可求得沿裂纹（或孔洞）边界法线方向（或坐标方向）的能量释放量和能量释放率。

8.2.4 裂纹扩展中的能量释放量的计算IV

1．变形固体系统的总余能的广义形式

将固体系统分割成有限个元素之和，由于固体变形（或裂纹扩展）的原因，固体系统的总余能的广义形式为

$$F_{ed}(a)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{V_a(a)}B_0(\xi_i(a),u_i(\xi_i,a),u_{i,j}(\xi_i,a),$$

$$\varepsilon_{ij}(\xi_i,a),\sigma_{ij}(\xi_i,a))dv(\xi_i)$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}s(\xi_i)$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\Big\} \tag{8.65}$$

其中

$$\mathrm{B}_0=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-u_i((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i) \tag{8.66}$$

利用坐标变换（6.1）式，把泛函（8.65）式化为用固定积分域表示，则有

$$F_{ed}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}\mathrm{B}_0(\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),u_{i,j}(\xi_i,\alpha),$$

$$\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))\ J|\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i|J_i|\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\Big\} \tag{8.67}$$

其中 $J|$ 与 $|J_i|$ 为雅各比行列式（6.10)式。

2. 能量泛函的一阶变分

根据可动边界的变分理论，泛函（8.67）式的一阶变分等于零的形式为

$$\delta F_{ed}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_a}[-(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u_i))\bar{\delta}\varepsilon_{ij}$$

$$-(b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij})\bar{\delta}\sigma_{ij}-((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i)\bar{\delta}u_i]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_a}u_i\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a}[B_0+u_i(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,n}]\delta n\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[P_e+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\bar{\delta}u_i]\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}[(\bar{u}_i-u_i)\bar{\delta}(\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (8.68)$$

其中

$$P_e=B_0l_j\delta x_j+((\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i(\delta x_j))_{,j\neq i} \qquad (8.69)$$

就固体内部分割的任意元素V_a而言，若在元素V_a内部待解函数满足平衡方程（1.1）式、应变位移（1.2）式及应力应变（1.4）式；在元素边界上应变函数与改变量$\delta n(\delta x_i)$为连续函数时，则方程（8.68）式变为

$$N_{Fa}=\iint_{S_a}[B_0+u_i(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,n}]\delta n\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_a}u_i\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}[P_e-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta n]\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_2}(\bar{u}_i-u_i)\bar{\delta}(\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s\Big\}=0 \qquad (8.70)$$

其中

$$\bar{\delta}u_i=\delta u_i-u_{i,n}\delta n$$

（1）当在元素边界上，$\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)$，$\delta u_i$，$\delta n(\delta x_i)$相互

无关时，方程（8.70）式中的各积分项有下面几种形式。

在元素边界S_{ab}上：

$$N_{Fd,ab}=\iint_{S_{ab}}\left\{[B_0+u_i(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,n}]_{S_{ab}+0}\right.$$

$$\left.-[B_0+u_i(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,n}]_{S_{ab}-0}\right\}\delta n\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_{ab}}[(u_i)_{S_{ab}+0}-(u_i)_{S_{ab}-0}]\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)\mathrm{d}s \tag{8.71}$$

若$(u_i)_{S_{ab}+0}=(u_i)_{S_{ab}-0}$，则

$$N_{Fd,ab}=\iint_{S_{ab}}\left\{[B_0+u_i(a_{ijkj}\varepsilon_{kl}l_j)_{,n}]_{S_{ab}+0}\right.$$

$$\left.-[B_0+u_i(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,n}]_{S_{ab}-0}\right\}\delta n\mathrm{d}s \tag{8.72}$$

在元素边界S_{ah}上：

$$N_{Fd,ah}=\iint_{S_{ah}}[B_0+u_i(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,n}]\delta n\mathrm{d}s \tag{8.73}$$

其中 $$a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j=\sigma_{ij}l_j=\bar{P}_i=0$$

在元素边界S_{as_1}上：

$$N_{Fd,s1}=\iint_{S_{as_1}}[P_s-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta n]\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_{as_1}}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i\mathrm{d}s \tag{8.74}$$

在元素边界S_{as_2}上：

$$N_{Fd,s2}=\iint_{S_{as_2}}(\bar{u}_i-u_i)\bar{\delta}(\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s \tag{8.75}$$

（2）当在元素边界S_a上，若$\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)$，$\delta u_i$，$\delta n$相关时，

令

$$\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)=T_{i,n}\delta n$$

$$\delta u_i=\delta R_i=R_{i,n}\delta n$$

于是，方程（8.70）中的各积分项有下面几种情况。

在元素边界S_{ab}上：

$$N_{Fd,ab}=\iint_{S_{ab}}\left\{[B_0-(T_{i,n}-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,n})u_i]_{Sab+0}\right.$$

$$\left.-[B_0-(T_{i,n}-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,n})u_i]_{Sab-0}\right\}\delta n\mathrm{d}s \tag{8.76}$$

在元素边界S_{ah}上：

$$N_{Fd,ah}=\iint_{S_{ah}}\left\{B_0-[T_{i,n}-(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j)_{,n}]u_i\right\}\delta n\mathrm{d}s \tag{8.77}$$

在元素边界S_{as_1}上：

$$N_{Fd,s_1}=\iint_{S_{as_1}}[P_e+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,n}-u_{i,n})\delta n]\mathrm{d}s \tag{8.78}$$

在元素边界S_{as_2}上：

$$N_{Fd,s_2}=\iint_{S_{as_2}}(\bar{u}_i-u_i)\bar{\delta}(\sigma_{ij}l_j)\mathrm{d}s \tag{8.79}$$

于是方程（8.70）式可写为

$$N_{Fd}=N_{Fd,ab}+N_{Fd,ah}+N_{Fd,s_1}+N_{Fd,s_2}=0 \tag{8.80}$$

其中$N_{Fd,ah}$为在总余能的广义形式下，沿裂纹边界在裂纹扩展中的能量释放量。

3. 边界积分变分原理Ⅳ

在变形固体内任意分割的元素V_a上，当待解函数满足平衡方程（1.1）式、应变位移（1.2）式，以及应力应变（1.4）式；

在元素边界上应变函数与改变量$\delta n(\delta x_i)$为连续函数时，则满足变分方程(8.80)式的应力、应变、位移函数为弹性力学问题的真实解。由(8.80)式可以求得沿裂纹（或孔洞）边界法线方向的能量释放量和能量释放率。

§8.3 有限变形弹性力学范畴的断裂分析的变分问题

关于有限变形弹性力学范畴的断裂分析的变分问题，这里仅讨论动力状态下裂纹扩展中的能量释放量（率），裂纹稳定扩展的临界条件，及裂纹扩展时结构（或构件）的寿命估算公式[6~8]。

8.3.1 裂纹扩展中的能量释放量(率)

1. 变形固体系统的总能量

将固体系统分割成有限个元素之和，由于变形或裂纹扩展的原因，固体系统的总能量为

$$F_n(a)=\sum_{a=1}^{M}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_{V_a(t)}[A_0(\xi_i,a)-K(\xi_i,a)]dv(\xi_i)$$

$$-\iint_{S_a(a)\cap S_1(a)}\bar{P}_iu_i(\xi_i,a)ds(\xi_i)\Big\}dt \qquad (8.81)$$

其中

$$A_0=A-\bar{F}_iu_i=\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-\bar{F}_iu_i \qquad (8.82)$$

利用坐标变换（6.1）式，把泛函（8.81）式化为用固定积分域表示，则有

$$F_n(a)=\sum_{a=1}^{M}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_{V_a}[A_0(\xi_i,a)-K(\xi_i,a)]|J|dv$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1} \bar{P}_i u_i(\xi_i,\alpha)|J_i|\mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t \qquad (8.83)$$

其中$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式（6.10)式。

2. 能量泛函的变分

根据可动边界的变分理论，泛函（8.83）式的一阶变分等于零的形式为

$$\delta F_n=\sum_{a=1}^{M}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_{V_a}-\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k$$

$$-\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\Big]\bar{\delta}u_k\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_a}(A_0-K)\delta n\mathrm{d}s+\iint_{S_a}\Big[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big]\bar{\delta}u_k\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}P_n\mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t-\sum_{a=1}^{M}\iiint_{V_a}\rho\frac{\partial u_k}{\partial t}\bar{\delta}u_k\Big|_{t_1}^{t_2}=0 \qquad (8.84)$$

其中

$$P_n=(A_0-K)\delta n-(\bar{P}_i u_i\delta x_j)_{,j=i} \qquad (8.85)$$

若在元素V_a的边界S_a上，当$t=t_1$，$t=t_2$时，用$\bar{\delta}u_i=\delta u_i-u_{i,n}\delta n$代之，则变分方程（8.84）式变为

$$\delta F_n=\sum_{a=1}^{M}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_{V_a}-\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_i-\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\Big]$$

$$\cdot\bar{\delta}u_k\mathrm{d}v+\iint_{S_a}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\delta u_k)\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a}\Big[(A_0-K)-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j u_{i,n}\Big]\delta n\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\Big[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\Big]\delta u_k\mathrm{d}s$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_1}\left[P_n-\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\right)u_{i,n}\delta n\right]ds\Bigg\}dt$$

$$-\sum_{a=1}^{M}\iiint\limits_{V_a}\rho\frac{\partial u_k}{\partial t}\delta u_k\Big|_{t_1}^{t_2}dv+\sum_{a=1}^{M}\iiint\limits_{V_a}\rho\frac{\partial u_k}{\partial t}(u_{i,n}\delta n)\Big|_{t_1}^{t_2}dv=0$$

(8.86)

由上述能量泛函的变分可知，其变分由两部分组成，其中一部分为区域固定由变量函数的改变产生的变分；另一部分是由于积分域的变动（即由于裂纹扩展的原因）而产生的变分。裂纹扩展中的能量释放量可通过积分区域的变动由能量泛函产生的变分来计算。

就从固体内部分割的任意元素V_a而言，在元素内部当待解函数满足平衡方程（8.8）式、应变位移（1.15）式、应力变应（1.18）式，以及位移边界条件（1.23）式；在元素边界上位移函数与边界区域改变量$\delta n(\delta x_i)$均为连续函数时，则变分方程（8.86）式变为

$$N_n=\int_{t_1}^{t_2}\Bigg\{\iint\limits_{S_a}\left[(A_0-K)-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j u_{i,n}\right]\delta n ds$$

$$+\iint\limits_{S_a}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\delta u_k ds$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_1}\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\right]\delta u_k ds$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_1}\left[P_n-\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\right)u_{i,n}\delta n\right]dv\Bigg\}dt$$

$$-\iiint\limits_{V_a}\rho\frac{\partial u_k}{\partial t}\delta u_k\Big|_{t_1}^{t_2}dv$$

$$+\iiint_{V_a}\rho\frac{\partial u_k}{\partial t}(u_{i,n}\delta n)\Big|_{t_1}^{t_2}dv=0 \tag{8.87}$$

(1) 相互无关情况

在元素边界S_a上，δu_k与$\delta n(\delta x_i)$相互无关时，方程(8.87)式中的各积分项有下面几种情况。

在元素边界S_{ab}上：

$$N_{n,ab}=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iint_{S_{ab}}\Big[\Big((A_0-K)-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_ju_{k,n}\Big)_{S_{ab}+0}$$

$$-\Big((A_0-K)-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}$$

$$+u_{k,i})l_ju_{k,n}\Big)_{S_{ab}-0}\Big]\delta nds\Big\}dt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iint_{S_{ab}}\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big)_{S_{ab}+0}$$

$$-\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big)_{S_{ab}-0}\Big]\delta u_kds\Big\}dt \tag{8.88}$$

若$\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big)_{S_{ab}+0}=\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\Big)_{S_{ab}-0}$，

则

$$N_{n,ab}=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iint_{S_{ab}}\Big[\Big((A_0-K)-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_ju_{k,n}\Big)_{S_{ab}+0}$$

$$-\Big((A_0-K)-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_iu_{k,n}\Big)_{S_{ab}-0}\Big]\delta nds\Big\}dt \tag{8.89}$$

在元素边界S_{ah}上：

$$N_{n,ah}=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iint_{S_{ah}}\Big[(A_0-K)-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j$$

$$u_{k,n}\Big]\delta nds\Big\}dt \tag{8.90}$$

其中

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j=\bar{P}_k=0$$

在元素边界S_{as_1}上：

$$N_{n,s_1}=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_{S_{as_1}}\left[P_n-\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\right)u_{k,n}\delta n\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})-\bar{P}_k\right)\delta u_k\right]ds\right\}dt \qquad (8.91)$$

关于动力项：

$$N_{n,k}=-\iiint_{V_a}\rho\frac{\partial u_k}{\partial t}\delta u_k\Big|_{t_1}^{t_2}dv+\iiint_{V_a}\rho\frac{\partial u_k}{\partial t}(u_{k,n})\delta n\Big|_{t_1}^{t_2}dv$$

$$(8.92)$$

假若$t=t_1$和$t=t_2$时，$\delta u_k(t_1)=\delta u_k(t_2)=0$，于是有

$$N_{n,k}=\iiint_{V_a}\rho\frac{\partial u_k}{\partial t}(u_{k,n})\delta n\Big|_{t_1}^{t_2}dv \qquad (8.93)$$

(2) 相关情况

在元素边界S_a上，若δu_k与$\delta n(\delta x_i)$相关时，且令

$$u_i=R_i$$

$$\delta u_i=\delta R_i=R_{i,n}\delta n=R_{i,k}\delta x_k$$

于是，方程 (8.87) 式中的各积分项有下面几种情况。

在元素边界S_{ab}上：

$$N_{n,ab}=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[\left((A_0-K)+(R_{k,n}-u_{k,n})\right.\right.\right.$$

$$\left.\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)_{S_{ab}+0}-\left((A_0-K)+(R_{k,n}\right.$$

$$\left.\left.\left.-u_{k,n})\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right)_{S_{ab}-0}\right]\delta n ds\right\}dt$$

$$(8.94)$$

在元素边界S_{ah}上：

$$N_{n,ah}=\int_{t_1}^{t_2}\iint_{S_{ah}}(A_0-K)+(R_{k,n}-u_{k,n})$$

$$\cdot\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{kl}+u_{k,l})l_j\Big]\delta n\mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t \qquad (8.95)$$

其中

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{kl}+u_{k,l})l_j=\bar{P}_k=0$$

在元素边界S_{as_1}上：

$$N_{n,s_1}=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iint_{S_{as_1}}\Big[P_n+(R_{k,n}-u_{k,n})$$

$$\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{kl}+u_{k,l})l_j-\bar{P}_k\Big)\delta n\Big]\mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t \qquad (8.96)$$

关于动力项：

$$N_{n,k}=-\iiint_{V_a}\rho\frac{\partial u_k}{\partial t}\delta u_k\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v+\iiint_{V_a}\rho\frac{\partial u_k}{\partial t}(u_{k,n})\delta n\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v$$

$$(8.97)$$

若$t=t_1$，$t=t_2$时，$\delta u_k=\delta R_k=R_{k,n}\delta n$，于是有

$$N_{n,k}=\iiint_{V}\rho\frac{\partial u_k}{\partial t}(u_{k,n}-R_{k,n})\delta n\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v \qquad (8.98)$$

若$t=t_1$，$t=t_2$时，$\delta u_k(t_1)=\delta u_k(t_2)=\delta R_k(t_1)=\delta R_k(t_2)=0$，于是有

$$N_{n,k}=\iiint_{V_a}\rho\frac{\partial u_k}{\partial t}(u_{k,n})\delta n\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v \qquad (8.99)$$

根据上述分析，于是方程（8.87）式可写为

$$N_n=N_{n,ab}+N_{n,ah}+N_{n,s_1}+N_{n,k}=0 \qquad (8.100)$$

其中$N_{n,ah}$为裂纹扩展时，沿裂纹边界法线方向（或坐标方向）

能量释放量。根据（8.3）式可求得裂纹扩展的能量释放率，

3．边界积分变分原理

在变形固体内部任意分割的元素V_a内，当待解函数满足动力平衡条件(8.8)式、应变位移（1.15）式、应力应变（1.18）式，以及位移边界条件（1.23）式；在元素边界上位移函数与边界改变量δn均为连续函数时，则满足边界变分方程（8.100）式的应变、位移函数为有限变形弹性理论问题的真实解。

结论Ⅰ：边界变分方程（8.100）式是任意选取的元素边界的围道积分（与路径无关的围道积分），若已求得其它项各量，由此方程可求得裂纹扩展时沿裂纹边界能量释放量。

结论Ⅱ：为了取得明显的形式，若取$\delta n=1$，由（8.90）式（或（8.95）式)得N积分形式，即

$$N=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint\limits_{S_{ah}}\left[(A_0-K)-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j u_{k,n}\right]ds\right\}dt \tag{8.101}$$

或

$$N=\int_{t_2}^{t_2}\left\{\iint\limits_{S_{ah}}\left[(A_0-K)+(R_{k,n}-u_{k,n})\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]ds\right\}dt \tag{8.102}$$

这就是沿裂纹边界法线方向单位长度的能量释放量，即能量释放率，称为N积分。N积分是通过数学方法求得的关于动态三维非线性弹性理论的能量释放率。在相应的情况下，由N积分可求导出J积分。

结论Ⅲ：当任意元素V_a处于固体内部，其边界为$S_a=S_{ab}\cup S_{ah}$，于是变分方程（8.100）式变为

$$N_n=N_{n,ab}+N_{n,ah}+N_{n,k}=0 \tag{8.103}$$

或为

$$N_n=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint\limits_{S_a}\left[(A_0-K)-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j u_{k,n}\right]\delta n \mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t$$

$$+\iiint\limits_{V_a}\rho\frac{\partial u_k}{\partial t}(u_{k,n}\delta n)\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v=0 \qquad (8.104)$$

其中

$$\delta u_k(t_1)=\delta u_k(t_2)=0$$

N积分为

$$N_n=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint\limits_{S_a}\left[(A_0-K)-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j u_{k,n}\right]\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t$$

$$+\iiint\limits_{V_a}\rho\frac{\partial u_k}{\partial t}(u_{k,n})\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v \qquad (8.105)$$

若略去某些条件，方程（8.104）式就化为中括号中所提出的某类积分形式[10]。

8.3.2 裂纹扩展中的稳定性分析

由于裂纹扩展的原因，固体系统的总能量的变分问题是一个可动边界的变分问题，利用可动边界的变分理论求得能量泛函的一阶变分与二阶变分，然后基于裂纹扩展的稳定状态与临界状态可求得裂纹扩展的临界条件。

1. 变形固体系统的总能量

在外界因素的作用下，由于裂纹扩展的原因，固体系统的总能量为

$$F_n(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint\limits_{V(\alpha)}[A_0(\xi_i,\alpha)-K(\xi_i,\alpha)]\mathrm{d}v\right.$$

$$\left.-\iint\limits_{S_1(\alpha)}\bar{P}_i u_i(\xi_i,\alpha)\mathrm{d}\xi_i\right\}\mathrm{d}t \qquad (8.106)$$

利用坐标变换（6.1）式，把泛函（8.106）式化为用固定积分域表示，则有

$$F_n(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V [A_0(\xi_i,\alpha)-K(\xi_i,\alpha)]|J|\mathrm{d}v\right.$$

$$\left.-\iint_{B_1}\bar{P}_i u_i(\xi_i,\alpha)|J_i|\mathrm{d}s\right\} \tag{8.107}$$

其中$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式（6.10)式。

2. 能量泛函的变分

能量泛函的一阶变分在前面已经进行了详细的论述，不过前面是把固体系统分割成有限个元素之和的形式，与这里对固体系统的整体分析是类同。因此，这里主要介绍能量泛函的二阶变分。

泛函（8.107）的二阶变分为

$$\delta^2 F_n=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(A_0-K\right)|J|\right.\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial}{\partial\alpha}(A_0-K)\frac{\partial}{\partial\alpha}|J|+(A_0-K)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}|J|\right]_{\alpha=0}\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{B_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(\bar{P}_i u_i)|J_i|+2\frac{\partial}{\partial\alpha}(\bar{P}_i u_i)\frac{\partial}{\partial\alpha}|J_i|\right.$$

$$\left.\left.+(\bar{P}_i u_i)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}|J_i|\right]_{\alpha=0}\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V\left[\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\delta e_{ij}\delta e_{kl}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta u_{i,k}\delta u_{i,j}-\rho\delta u_{i,i}\delta u_{i,i}\right]\mathrm{d}v$$

$$+2\iiint_V\left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\bar{\delta}u_k\right)_{,j}\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}(A_0-K)\delta x_j\Big](\delta x_i)_{,i}dv$$

$$+2\iiint_V (A_0-K)[(\delta x_i)_{,i}(\delta x_j)_{,j}-(\delta x_j)_{,i}(\delta x_i)_{,j}]dv$$

$$-2\iint_{S_1}(\bar{P}_i u_i)(\delta x_j)_{,j\neq i}ds$$

$$-2\iint_{S_1}\bar{P}_i u_i[(\delta x_j)_{,j}(\delta x_k)_{,k}-(\delta x_j)_{,k}(\delta x_k)_{,j}]_{\substack{j\neq i\\k\neq i}}ds\Big\}dt$$

$$-2\iiint_V \rho\frac{\partial u_k}{\partial t}\bar{\delta}u_k\Big|_{t_1}^{t_2}dv \tag{8.108}$$

式中已假定$\bar{P}_i u_i$的二阶变分为零。

利用下述条件可将（8.108）式化简：

（1）在一阶变分为零的条件下，待解函数满足动力平衡方程与力的边界条件；

（2）$\bar{\delta}u_k(t_1)=\bar{\delta}u_k(t_2)=0$；

（3）$\delta x_i=u_i$；

（4）$\bar{\delta}u_i=\bar{\delta}u_{i,j}=0$，即仅考虑由于裂纹扩展的原因使能量泛函产生的变分。

于是二阶变分（8.108）式可化为

$$\delta^2F_n=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_V\Big[\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}(e_{ij})_{,m}(e_{kl})_{,n}\delta x_m\delta x_n$$

$$+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(u_{k,i})_{,m}(u_{k,j})_{,n}\delta x_m\delta x_n$$

$$-\rho(u_{k,t})_{,m}(u_{k,t})_{,n}\delta x_m\delta x_n\Big]dv$$

$$+2\iiint_V\Big[\frac{\partial}{\partial x_j}(A_0-K)\delta x_j\Big]\varepsilon_1 dv$$

$$+2\iiint\limits_V (A_0-K)\varepsilon_2 dv$$

$$-2\iint\limits_{S_1} \bar{P}_i u_{i,j}\delta x_j \varepsilon_{3i} ds$$

$$-2\iint\limits_{S_1} \bar{P}_i u_i \varepsilon_{4i} ds\Big\} dt \qquad (8.109)$$

其中

$$\varepsilon_1=(\delta x_i)_{,i}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \qquad (8.110)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2&=(\delta x_i)_{,i}(\delta x_j)_{,j}-(\delta x_i)_{,j}(\delta x_j)_{,i}\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\\&\quad-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\\&=\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}+\varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx}-\frac{1}{4}(\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2\\&\quad+\varepsilon_{zx}^2)+(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)\end{aligned} \qquad (8.111)$$

$$\varepsilon_{3i}=\varepsilon_{jj}+\varepsilon_{kk}$$

$$(\varepsilon_{3x}=\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}) \qquad (8.112)$$

$$\varepsilon_{4i}=\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kk}-\varepsilon_{jk}\varepsilon_{kj}$$

$$\left(\varepsilon_{4x}=e_{yy}e_{zz}-\frac{1}{4}e_{yz}^2+w_x^2\right) \qquad (8.113)$$

$(i,j,k$互换)

式中ε_1与ε_2为转动不变量。

3. 裂纹扩展的稳定性条件

在待解函数满足一阶变分为零的条件时，可由$\delta^2 F_n\geqslant 0$求得裂纹扩展中的稳定条件与临界条件。因影响裂纹扩展的因素很多，关系也很复杂，下面仅就明显的情况进行讨论。

(1) 稳定性条件

当$\varepsilon_1>0$，$\varepsilon_2>0$，$\varepsilon_{3i}>0$，$\varepsilon_{4i}>0$时，则

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}(e_{ij})_{,m}(e_{kl})_{,n}\delta x_m\delta x_n \\
&\quad+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(u_{k,i})_{,m}(u_{k,j})_{,n}\delta x_m\delta x_n \\
&\quad-\rho(u_{k,t})_{,m}(u_{k,t})_{,n}\delta x_m\delta x_n>0
\end{aligned}
\tag{8.114}
$$

$$
\begin{aligned}
&\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(A_0-K)\delta x_j\right]\varepsilon_1 dv \\
&\quad-\iint_{S_1}\bar{P}_i u_{i,j}\delta x_j\varepsilon_{3i}ds>0
\end{aligned}
\tag{8.115}
$$

$$
\iiint_V(A_0-K)\varepsilon_2 dv-\iint_{S_1}\bar{P}_i u_i\varepsilon_{4i}ds>0 \tag{8.116}
$$

这是一组明显的裂纹扩展时的稳定性条件。

(2) 稳定载荷参数 I

若$\bar{P}_i=k_iP^{\mathrm{I}}_{si}$，且$P^{\mathrm{I}}_{si}$为常数时，由（8.115）式得

$$
P^{\mathrm{I}}_{si}<\frac{\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(A_0-K)\delta x_j\right]\varepsilon_1 dv}{\iint_{S_1}k_iu_{i,j}\delta x_j\varepsilon_{3i}ds} \tag{8.117}
$$

这是裂纹扩展时的稳定载荷参数之一。

(3) 稳定载荷参数 II

若$\bar{P}_i=k_iP^{\mathrm{II}}_{si}$，且$P^{\mathrm{II}}_{si}$为常数时，由（8.116)式得

$$
P^{\mathrm{II}}_{si}<\frac{\iiint_V(A_0-K)\varepsilon_2 dv}{\iint_{S_1}(k_iu_i)\varepsilon_{4i}ds} \tag{8.118}
$$

这是裂纹扩展时的稳定载荷参数之二。

在实际问题中选取两者中的小者为稳定载荷参数。稳定载荷参数P_{st}^{I}是关联结构体积变形因素的参数。稳定载荷参数P_{st}^{II}是关联结构的形状改变因素的参数。

（4）临界条件

当$\varepsilon_1>0$，$\varepsilon_2>0$，$\varepsilon_{3i}>0$，$\varepsilon_{4i}>0$时，则

$$\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}(e_{ij})_{,m}(e_{kl})_{,n}\delta x_m\delta x_n + \frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(u_{k,i})_{,m}(u_{k,j})_{,n}\delta x_m\delta x_n - \rho(u_{k,t})_{,m}(u_{k,t})_{,n}\delta x_m\delta x_n=0 \qquad (8.119)$$

$$\iiint\limits_V\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(A_0-K)\delta x_j\right]\varepsilon_1 dv - \iint\limits_{S_1}\bar{P}_i u_{i,j}\delta x_j\varepsilon_{3i}ds=0 \qquad (8.120)$$

$$\iiint\limits_V(A_0-K)\varepsilon_2 dv-\iint\limits_{S_1}\bar{P}_i u_i\varepsilon_{4i}ds=0 \qquad (8.121)$$

这是一组明显的裂纹扩展时的临界条件。

（5）临界载荷参数Ⅰ

若$\bar{P}_i=k_i P_{cr}^{I}$，且P_{cr}^{I}为常数，由（8.120）式得

$$P_{cr}^{I}=\frac{\iiint\limits_V\left[\frac{\partial}{\partial x_j}(A_0-K)\delta x_j\right]\varepsilon_1 dv}{\iint\limits_{S_1}k_i u_{i,j}\delta x_j\varepsilon_{3i}ds} \qquad (8.122)$$

这是裂纹扩展时临界载荷参数之一。

（6）临界载荷参数Ⅱ

若$\bar{P}_i=k_i P_{cr}^{II}$，且$P_{cr}^{II}$为常数，由（8.121）式可得

$$P_{cr}^{II}=\frac{\iiint\limits_{V}(A_0-K)\varepsilon_2 dv}{\iint\limits_{S_1}k_i u_i \varepsilon_{4i} ds} \tag{8.123}$$

这是裂纹扩展时临界载荷参数之二。

对于实际结构工程问题选两者之中小者为临界载荷参数。

4. 裂纹扩展的稳定性定理

在待解函数满足能量泛函的一阶变分为零的条件下，满足变分方程（8.124）式的应变、位移函数使裂纹扩展处于稳定扩展状态（或临界扩展状态），可由（8.117）式（或（8.118)式）求得稳定载荷参数；由（8.122）式（或（8.123）式）求得临界载荷参数。

$$\delta^2 F_n \geqslant 0 \tag{8.124}$$

8.3.3 裂纹扩展中的结构(或构件)的寿命计算公式

1. 基本条件

裂纹扩展中的结构（或构件）的寿命计算公式是急待解决的一个十分复杂的问题，根据下列条件来建立寿命计算公式：

（1）裂纹扩展中的能量泛函的变分问题是可动边界的变分问题；

（2）裂纹扩展的临界状态为

$$\delta F_n=0$$

$$\delta^2 F_n=0$$

的条件成立；

（3）裂纹扩展的临界速度系指临界裂纹扩展状态中所对应的动能中的速度。

基于上述条件，在待解函数满足一阶变分为零的条件下，由

$\delta^2 F_n=0$式，可求得裂纹扩展中的临界条件；然后根据临界条件可求得临界速度；再由临界速度求得裂纹扩展时结构（或构件）的寿命计算公式。

2．寿命计算公式Ⅰ

寿命计算公式Ⅰ是假定裂纹尖端的扩展速度为临界速度时，求得的结构（或构件）的寿命计算公式。

根据（8.108)式，能量泛函（8.107）式二阶变分的一般形式为

$$\begin{aligned}\delta^2 F_n=&\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_V(\bar{\bar{\delta}}^2 A_0-\bar{\bar{\delta}}^2 K)dv\\&+2\iiint_V(\bar{\bar{\delta}}A_0-\bar{\bar{\delta}}K)\varepsilon_1 dv\\&+2\iiint_V(A_0-K)\varepsilon_2 dv\\&-\iint_{S_1}\bar{\bar{\delta}}^2(\bar{P}_i u_i)ds-2\iint_{S_1}\bar{\bar{\delta}}(\bar{P}_i u_i)\varepsilon_{3i}ds\\&-2\iint_{S_1}(\bar{P}_i u_i)\varepsilon_{4i}ds\Big\}dt\\=&\int_{t_1}^{t_2}(A_{an}-K_{an}-K_{tn}-K_t-P_{an})dt=0\end{aligned}\tag{8.125}$$

其中

$$A_{an}=\frac{1}{2}\iiint_V(\bar{\bar{\delta}}^2 A_0+2\bar{\bar{\delta}}A_0\varepsilon_1+2A_0\varepsilon_2)dv\tag{8.126}$$

$$K_{an}=\frac{1}{2}\iiint_V(\bar{\bar{\delta}}^2 K+2\bar{\bar{\delta}}K\varepsilon_1+2K\varepsilon_2)dv\tag{8.127}$$

$$K_{tn}=\frac{1}{2}\bar{\bar{\delta}}K_t+2\bar{\bar{\delta}}K_t\varepsilon_{1t}\tag{8.128}$$

$$K_t=\frac{1}{2}\rho u_{k,t}u_{k,t}\varepsilon_{2t} \tag{8.129}$$

$$P_{an}=\frac{1}{2}\iint_{S_1}(\bar{\delta}^2\bar{P}_i u_i+2\bar{\bar{\delta}}\bar{P}_i u_i\varepsilon_{3t}+2\bar{P}_i u_i\varepsilon_{4t})ds \tag{8.130}$$

式中$\lim\limits_{\Omega\to 0}(A-\Omega)=A$，$A$可为包括裂纹尖端在内的任意元素的区域，$S_1$为已知力$\bar{P}_i$的作用边界，$\Omega$为含裂纹尖端区域。$K_{tn}$表示裂纹尖端点的动能改变量的度量；$K_t$表示裂纹尖端点的动能的度量；$\varepsilon_{1t}$表示裂纹尖端点的体积改变量的度量，其计算公式与$\varepsilon_1$一样；$\varepsilon_{2t}$表示裂纹尖端点的形状改变量的度量，其计算公式与$\varepsilon_2$相同。

当待解函数满足一阶变分为零的条件时，由方程（8.125)式得

$$K_t=A_{an}-K_{an}-K_{tn}-P_{an} \tag{8.131}$$

$$\frac{1}{2}\rho(u_{k,t})(u_{k,t})\varepsilon_{2t}=A_{an}-K_{an}-K_{tn}-P_{an}$$

所以

$$u_{k,t}=\left[\frac{2}{\rho\varepsilon_{2t}}\left(A_{an}-K_{an}-K_{tn}-P_{an}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

式中$u_{k,t}$为临界速度。

已知

$$u_{k,t}=\frac{dL}{dt}=\left[\frac{2}{\rho\varepsilon_{2t}}\left(A_{an}-K_{an}-K_{tn}-P_{an}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

可得

$$T_n=\int_{t_1}^{t_2}dt=\int_{L_1}^{L_2}\frac{dL}{\left[\frac{2}{\rho\varepsilon_{2t}}\left(A_{an}-K_{an}-K_{tn}-P_{an}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{8.132}$$

上式为裂纹扩展中结构（或构件）的寿命计算公式 I。式中L_1为裂纹的初始长度；$L_2=L_c$为裂纹扩展的极根值。L_1与L_2可由

结构（或构件）的工作状况、材料的物理力学性质等因素确定。

若

$$(\mathrm{d}L)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2$$
$$=(\mathrm{d}u_1)^2+(\mathrm{d}u_2)^2+(\mathrm{d}u_3)^2$$

则
$$\mathrm{d}L=\left[1+\left(\frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial u_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u_1 \tag{8.133}$$

将（8.133）式代入（8.132）式，可得

$$T_n=\int_{u_0}^{u_c}\frac{\left[1+\left(\frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial u_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u_1}{\left[\frac{2}{\rho\varepsilon_{2t}}\left(A_{an}-K_{an}-K_{tn}-P_{an}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{8.134}$$

其中u_0为沿x方向裂纹的初始长度；u_c为沿x方向裂纹扩展的极限值。

若裂纹扩展过程比较缓慢时，动能改变量的度量为零（$K_{tn}=0$），则公式（8.132）可简化为

$$T_n=\int_{L_1}^{L_2}\frac{\mathrm{d}L}{\left[\frac{2}{\rho\varepsilon_{2t}}\left(A_{an}-K_{an}-P_{an}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{8.135}$$

公式（8.134）可简化为

$$T_n=\int_{u_0}^{u_c}\frac{\left[1+\left(\frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial u_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u_1}{\left[\frac{2}{\rho\varepsilon_{2t}}\left(A_{an}-K_{an}-P_{an}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{8.136}$$

3. 寿命计算公式 I

当伴随裂纹尖端点的扩展是一个区域Ω时，建立寿命计算公式 I，则有

$$T_n=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t=\int_{L_1}^{L_2}\frac{\mathrm{d}L}{\left[\frac{2}{m_\Omega}\left(A_{an}-K_{cn}-K_{mn}-P_{an}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{8.137}$$

$$T_n=\int_{u_0}^{u_c}\frac{\left[1+\left(\frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial u_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}du_1}{\left[\frac{2}{m_\Omega}\left(A_{an}-K_{an}-K_{mn}-P_{an}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{8.138}$$

式中

$$A_{an}=\frac{1}{2}\iiint_{V-\Omega}[\bar{\bar{\delta}}^2A_0+2\bar{\bar{\delta}}A_0\varepsilon_1+2A_0\varepsilon_2]dv \tag{8.139}$$

$$K_{an}=\frac{1}{2}\iiint_{V-\Omega}[\bar{\bar{\delta}}^2K+2\bar{\bar{\delta}}K\varepsilon_1+2K\varepsilon_2]dv \tag{8.140}$$

$$K_{mn}=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}[\bar{\bar{\delta}}^2K_m+2\bar{\bar{\delta}}K_m\varepsilon_{1m}]d\Omega \tag{8.141}$$

其中

$$K_m=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\rho(u_{k,t})(u_{k,t})\varepsilon_{2m}d\Omega$$

$$=\frac{1}{2}(u_{k,t})(u_{k,t})\left[\iiint_{\Omega}\rho\varepsilon_{2m}d\Omega\right]$$

$$=\frac{1}{2}(u_{k,t})(u_{k,t})m_\Omega \tag{8.142}$$

$$m_\Omega=\iiint_{\Omega}\rho\varepsilon_{2m}d\Omega$$

4. 寿命计算公式Ⅱ

寿命计算公式Ⅰ、Ⅱ都是从整体出发建立的。现在从局部出发建立寿命计算公式。

（1）变形固体的总能量

已知（8.106）式是固体系统的总能量，现将其表达式化为另

外一种形式。

当$\delta F_n=0$，则$\overline{P}_i=\sigma_{ij}l_j$，以及考虑到裂纹扩展时能量泛函的改变量，则有

$$\delta^2\left[\iint_{S_2}\overline{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right]=0 \tag{8.143}$$

由此可得

$$\delta^2\left[\iint_{S_1(\alpha)}\overline{P}_iu_i\mathrm{d}s(\xi_i)\right]$$

$$=\delta^2\left[\iint_{S_1(\alpha)}(\sigma_{ij}l_ju_i)\mathrm{d}s(\xi_i)+\iint_{S_2}(\sigma_{ij}l_j)\overline{u}_i\mathrm{d}s\right]$$

$$=\delta^2\left[\iiint_{V(\alpha)}(\sigma_{ij}u_i)_{,j}\mathrm{d}v(\xi_i)\right] \tag{8.144}$$

利用（8.144）式可把（8.106）式化为

$$F_n(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_{V(\alpha)}[A_0(\xi_i,\alpha)-K(\xi_i,\alpha)-(\sigma_{ij}u_i)_{,j}]\mathrm{d}v(\xi_i)\right\}\mathrm{d}t \tag{8.145}$$

利用坐标变换（6.1）式，把泛函（8.145）式化为用固定积分域表示，则有

$$F_n(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_{V}[A_0(\xi_i,\alpha)-K(\xi_i,\alpha)-(\sigma_{ij}u_i)_{,j}]|J|\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}t \tag{8.146}$$

（2）能量泛函的二阶变分

已知

$$\delta^2 F_n = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V \left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(A_0 - K - (\sigma_{ij}u_i)_{,j})|J|\right.\right.$$

$$+2\frac{\partial}{\partial\alpha}(A_0 - K - (\sigma_{ij}u_i)_{,j})\frac{\partial}{\partial\alpha}|J|$$

$$\left.\left.+(A_0 - K - (\sigma_{ij}u_i)_{,j})\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}|J|\right]_{\alpha=0}\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V [(\bar{\bar{\delta}}^2 A_0 + 2\varepsilon_1\bar{\bar{\delta}}A_0 + 2A_0\varepsilon_2)\right.$$

$$-(\bar{\bar{\delta}}^2 K + 2\bar{\bar{\delta}}K\varepsilon_1 + 2K\varepsilon_2)$$

$$-(\bar{\bar{\delta}}^2(\sigma_{ij}u_i)_{,j} + 2\bar{\bar{\delta}}(\sigma_{ij}u_i)_{,j}\varepsilon_1$$

$$\left.+2(\sigma_{ij}u_i)_{,j}\varepsilon_2)]\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}t \tag{8.147}$$

将满足一阶变分为零的待解函数，代入(8.147) 式中，并令其值等于零，便得

$$\delta^2 F_n = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V [A_{bn} - K_{bn} - K - P_{bn}]\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}t = 0 \tag{8.148}$$

于是得

$$A_{bn} - K_{bn} - K - P_{bn} = 0 \qquad (V) \tag{8.149}$$

其中

$$A_{bn} = \frac{1}{2\varepsilon_2}\bar{\bar{\delta}}^2 A_0 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\bar{\bar{\delta}}A_0 + A_0 \tag{8.150}$$

$$K_{bn} = \frac{1}{2\varepsilon_2}\bar{\bar{\delta}}^2 K + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\bar{\bar{\delta}}K \tag{8.151}$$

$$K = \frac{1}{2}\rho u_{k,t}u_{k,t} \tag{8.152}$$

$$P_{bn}=\frac{1}{2\varepsilon_2}\ddot{\delta}(\sigma_{ij}u_i)_{,j}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ddot{\delta}(\sigma_{ij}u_i)_{,j}+(\sigma_{ij}u_i)_{,j} \quad (8.153)$$

将(8.152)式代入(8.149)式，可得

$$\frac{1}{2}\rho(u_{k,t})(u_{k,t})=A_{bn}-K_{bn}-P_{bn} \quad (8.154)$$

已知

$$dt=\frac{dL}{u_{k,t}} \quad (8.155)$$

将(8.155)式代入(8.154)式，得

$$T_n=\int_{t_1}^{t_2}dt=\int_{L_1}^{L_2}\frac{dL}{\left[\frac{2}{\rho}\left(A_{bn}-K_{bn}-P_{bn}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (8.156)$$

已知

$$(dL)^2=dx^2+dy^2+dz^2=du_1^2+du_2^2+du_3^2$$

上式可化为

$$T_n=\int_{u_0}^{u_c}\frac{\left[1+\left(\frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial u_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}du_1}{\left[\frac{2}{\rho}\left(A_{bn}-K_{bn}-P_{bn}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (8.157)$$

寿命计算公式Ⅱ（8.156)、(8.157）式是根据方程（8.149）式在区域V内任意点都成立的条件下建立的，利用这个公式计算结构（或构件）寿命值是很方便的。

5. 疲劳裂纹扩展寿命计算公式

对于疲劳裂纹扩展中结构（或构件）的寿命计算公式，可化为循环次数表示，即为

$$N_n=T_nN_0\leqslant N_c \quad (8.158)$$

其中T_n为由前面公式中求得的寿命值；N_0为单位时间内循环次数；N_c为极限循环次数。

§8.4 塑性流动理论范畴的断裂分析的变分问题

8.4.1 概述

关于塑性流动理论范畴的裂纹扩展是十分复杂的过程，本质上是非线性非平衡态热力学问题，但目前在这方面研究成果甚微。在裂纹扩展中，塑性流动理论方面的变分问题的能量泛函，当满足下列条件：

（1）裂纹扩展过程为等温过程；

（2）设在某瞬时t，在动力平衡条件下，应力状态和加载历史是已知的；

（3）设在某瞬时$t+dt$，外力增量为dP_i，体积力增量为dF_i；位移增量为du_i，并且假定裂纹扩展过程中dP_i与dF_i变化甚微；

（4）应力增量与应变增量为线性关系；

（5）应力函数满足屈服条件时，

可以表示为(8.159)式的形式。

8.4.2 裂纹扩展中能量释放量（率）

1. 变形固体系统的能量泛函

将固体系统分割成有限个元素之和，由于裂纹扩展的原因，固体系统的总能量为

$$F_p(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_{V_a(\alpha)}[A_0(\xi_i(\alpha),du_i(\xi_i\alpha),$$

$$d\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha))-K(\xi_i,du_{i,t}(\xi_i,\alpha))]dv(\xi_i)$$

$$-\iint_{S_a(\alpha)\cap S_1(\alpha)} d\bar{P}_i du_i(\xi_i,\alpha)ds(\xi_i)\Big\}dt \quad (8.159)$$

其中

$$A_0 = A(d\varepsilon_{ij}) - d\bar{F}_i du_i \quad (8.160)$$

$A(d\varepsilon_{ij})$为(1.66)式。

利用坐标变换(6.1) 式，把泛函(8.160)式化为用固定积分域表示，则有

$$F_p(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_{V_a}[A_0(\xi_i(\alpha),du_i(\xi_i,\alpha),d\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha)$$

$$-K(\xi_i(\alpha),du_i(\xi_i,\alpha))]|J|dv$$

$$-\iint_{S_a\cap S_1} d\bar{P}_i du_i(\xi_i,\alpha)|J_i|ds\Big\}dt \quad (8.161)$$

其中$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式(6.10)式。

2. 能量泛函的变分

根据可动边界的变分理论，泛函(8.161)式的一阶变分等于零的形式为

$$\delta F_p = \sum_{a=1}^{M}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_{V_a} -\Big[\Big(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\Big)_{,j}$$

$$+d\bar{F}_i-\rho\frac{\partial^2(du_i)}{\partial t^2}\Big]\bar{\delta}(du_i)dv$$

$$+\iint_{S_a}(A_0-K)\bar{\delta}nds+\iint_{S_a}\Big(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\Big)\bar{\delta}(du_i)ds$$

$$+\iint_{S_a\cap S_1}\Big[\Big(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j-d\bar{P}_i\Big)\bar{\delta}(du_i)+dP_p\Big]ds\Big\}dt$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{M}\iiint_{V_\alpha}\rho\frac{\partial(\mathrm{d}u_i)}{\partial t}\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v=0 \tag{8.162}$$

其中

$$\mathrm{d}P_p=(A_0-K)\delta n-(\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i\delta x_j)_{,j=i} \tag{8.163}$$

若在元素V_α的边界S_α上，当$t=t_1$和$t=t_2$时，用$\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)=\delta(\mathrm{d}u_i)-\mathrm{d}u_{i,n}\delta n$代之，则变分方程(8.162)式变为

$$\begin{aligned}\delta F_p=&\sum_{\alpha=1}^{M}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_{V_\alpha}-\Big[\Big(\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\Big)_{,j}+\mathrm{d}\bar{F}_i\\&-\rho\frac{\partial^2(\mathrm{d}u_i)}{\partial t^2}\Big]\delta(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}v\\&+\iint_{S_\alpha}(A_0-K)-\mathrm{d}u_{i,n}\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\Big]\delta n\mathrm{d}s\\&+\iint_{S_\alpha}\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\delta(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s\\&+\iint_{S_\alpha\cap S_1}\Big[\Big(\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i\Big)\delta(\mathrm{d}u_i)\Big]\mathrm{d}s\\&+\iint_{S_\alpha\cap S_1}\Big[\mathrm{d}P_p-\Big(\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\\&-\mathrm{d}\bar{P}_i\Big)\mathrm{d}u_{i,n}\delta n\Big]\mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t\\&-\sum_{\alpha=1}^{M}\iiint_{V_\alpha}\rho\frac{\partial(\mathrm{d}u_i)}{\partial t}\delta(\mathrm{d}u_i)\Big|_{t_1}^{t_2}\\&+\sum_{\alpha=1}^{M}\iiint_{V_\alpha}\rho\frac{\partial(\mathrm{d}u_i)}{\partial t}\mathrm{d}u_{i,n}\delta n\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v=0\end{aligned} \tag{8.164}$$

由(8.164)式可知，能量泛函的变分由两部分组成，其中一部分为区域固定由变量函数的改变产生的变分；另一部分是由积

分区域的变动而产生的变分。裂纹扩展的能量释放量即通过积分区域的变动使能量泛函产生的变分来计算。

就从固体内部分割的任意元素而言，在元素内部待解函数满足动力平衡方程(8.9)式、应变增量与位移增量(1.64)式、应力增量与应变增量(1.66)式、位移边界条件(1.70)式；在元素边界上位移增量函数与边界区域改变量$\delta n(\delta x_i)$ 均为连续函数时，则变分方程(8.164)变为

$$
\begin{aligned}
N_p = \int_{t_1}^{t_2}\Bigg\{ & \iint_{S_a}\left[(A_0 - K) - du_{i,n}\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right]\delta n ds \\
& + \iint_{S_a}\left[\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\,\delta(du_i)\right]ds \\
& + \iint_{S_a \cap S_1}\left[\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j - d\bar{P}_i\right]\delta(du_i)ds \\
& + \iint_{S_a \cap S_1}\left[dP_p - du_{i,n}\left(\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_i - d\bar{P}_i\right)\delta n\right]ds\Bigg\}dt \\
& - \iiint_{V_a}\rho\frac{\partial(du_i)}{\partial t}\delta(du_i)\Bigg|_{t_1}^{t_2}dv \\
& + \iiint_{V_a}\rho\frac{\partial(du_i)}{\partial t}(du_{i,n})\delta n\Bigg|_{t_1}^{t_2}dv = 0
\end{aligned}
\qquad (8.165)
$$

(1) 若在元素边界S_a上，$\delta(du_i)$与$\delta n(\delta x_i)$相互无关 时，则方程(8.165) 式中的各积分项有下面几种情况。

在元素边界S_{ab}上：

$$
\begin{aligned}
N_{p,ab} = \int_{t_1}^{t_2}\Bigg\{\iint_{S_{ab}}\Bigg[& \left((A_0 - K) - du_{i,n}\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{S_{ab}+0} \\
& \left((A_0 - K) - du_{i,n}\frac{\partial A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{S_{ab}-0}\Bigg]\delta n ds\Bigg\}dt
\end{aligned}
$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[\left(\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{S_{ab}+0}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{S_{ab}-0}\right]\delta(\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t \tag{8.166}$$

若$\left(\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{S_{ab}+0}=\left(\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{S_{ab}-0}$，则

$$N_{p,ab}^{\to}=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[\left((A_0-K)-\mathrm{d}u_{i,n}\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{S_{ab}+0}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left((A_0-K)-\mathrm{d}u_{i,n}\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right)_{S_{ab}-0}\right]\delta n\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t \tag{8.167}$$

在元素边界S_{ah}上：

$$N_{p,ah}=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_{S_{ah}}\left[(A_0-K)-\mathrm{d}u_{i,n}\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right]\delta n\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t \tag{8.168}$$

在元素边界S_{as_1}上：

$$N_{p,s_1}=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_{S_{as_1}}\left[\mathrm{d}P_p-\left(\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i\right)\mathrm{d}u_{i,n}\delta n\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i\right)\delta(\mathrm{d}u_i)\right]\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t \tag{8.169}$$

关于动态项：

$$N_{p,k}=-\iiint_{V_a}\rho\frac{\partial(\mathrm{d}u_i)}{\partial t}\delta(\mathrm{d}u_i)\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v$$

$$+\iiint_{V_a}\rho\frac{\partial(\mathrm{d}u_i)}{\partial t}\mathrm{d}u_{i,n}\delta n\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v \tag{8.170}$$

若$t=t_1$，$t=t_2$时，$\delta u_i(t_1)=\delta u_i(t_2)=0$，于是有

$$N_{p,k}=\iiint\limits_{V_a}\rho\frac{\partial(\mathrm{d}u_i)}{\partial t}(\mathrm{d}u_{i,n})\delta n\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v \tag{8.171}$$

(2) 在元素边界S_a上，若$\delta(\mathrm{d}u_i)$与$\delta n(\delta x_i)$相关时，且令

$$\mathrm{d}u_i=\mathrm{d}R_i$$

所以

$$\delta(\mathrm{d}u_i)=\mathrm{d}R_{i,k}\delta x_k=\mathrm{d}R_{i,n}\delta n$$

于是，方程(8.165)式中的各积分项有下面几种情况。

在元素边界S_{ab}上：

$$N_{p,ab}=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iint\limits_{S_{ab}}\Big[\Big((A_0-K)+(\mathrm{d}R_{i,n}-\mathrm{d}u_{i,n})\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\Big)_{S_{ab}+0}-\Big((A_0-K)+(\mathrm{d}R_{i,n}-\mathrm{d}u_{i,n})\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\Big)_{S_{ab}-0}\Big]\delta n\mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t \tag{8.172}$$

在元素边界S_{ah}上：

$$N_{p,ah}=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iint\limits_{S_{ah}}\Big[(A_0-K)+(\mathrm{d}R_{i,n}-\mathrm{d}u_{i,n})\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\Big]\delta n\mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t \tag{8.173}$$

在元素边界S_{as_1}上：

$$N_{p,s_1}=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iint\limits_{S_{as_1}}\Big[\mathrm{d}P_p+(\mathrm{d}R_{i,n}-\mathrm{d}u_{i,n})\Big(\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i\Big)\delta n\Big]\mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t \tag{8.174}$$

关于动态项：

$$N_{p,k}=-\iiint\limits_{V_a}\rho\frac{\partial(\mathrm{d}u_i)}{\partial t}\delta(\mathrm{d}u_i)\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v$$

$$+\iiint_{V_a}\rho\frac{\partial(\mathrm{d}u_i)}{\partial t}(\mathrm{d}u_{i,n})\delta n\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v \qquad (8.175)$$

若$t=t_1$，$t=t_2$时，$\delta u_i(t_1)=\delta u_i(t_2)=0$，则有

$$N_{p,k}=\iiint_{V_a}\rho\frac{\partial(\mathrm{d}u_i)}{\partial t}(\mathrm{d}u_{i,n})\delta n\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v \qquad (8.176)$$

于是方程(8.165)式可写为

$$N_p=N_{p,ab}+N_{p,ah}+N_{p,s_1}+N_{p,k}=0 \qquad (8.177)$$

其中$N_{p,ah}$为裂纹扩展时沿裂纹边界法线方向（或坐标方向）的能量释放量。

3．边界积分变分原理

在变形固体内部任意分割的元素V_a内，当待解函数满足动力平衡方程(8.9)式、应变增量与位移增量(1.64)式、应力增量与应变增量(1.66)式、位移边界条件(1.70)式；在元素边界上位移增量与边界改变量δn均为连续函数时，则满足边界变分方程(8.177)式的应变增量、位移增量为塑性流动理论问题的真实解。

结论Ⅰ：边界积分变分方程(8.177)式是任意选取的元素边界的围道积分（与路径无关的围道积分），若已求得其它各项，由此方程可求得裂纹扩展时沿裂纹边界能量释放量。

结论Ⅱ：为了取得N积分的明显形式，若取$\delta n=1$，由(8.168)式(或(8.173)式)得

$$N=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_{S_{ah}^{**}}\left[(A_0-K)-\mathrm{d}u_{i,n}\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}l_j\right]\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t \qquad (8.178)$$

$$N=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_{S_{ah}}\left[(A_0-K)+(\mathrm{d}R_{i,n}-\mathrm{d}u_{i,n})\right.\right.$$

$$\cdot \frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})} l_j \Big]\mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t \qquad (8.179)$$

这就是沿裂纹边界法线方向单位长度的能量释放量，即能量释放率，称为N积分。N积分是塑性流动理论问题的动态三维条件下的能量释放率。

结论Ⅱ：当任意元素V_a处于固体内部，其边界为$S_a = S_{ab} \cup S_{ah}$，于是变分方程(8.177)式变为

$$N_p = N_{p,ab} + N_{p,ah} + N_{p,k} = 0 \qquad (8.180)$$

或为

$$N_p = \int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iint_{S_a}\Big[(A_0 - K) - \mathrm{d}u_{i,n}\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})} l_j\Big]\delta n \mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t$$

$$+ \iiint_{V_a}\rho\frac{\partial(\mathrm{d}u_i)}{\partial t}(\mathrm{d}u_{i,n})\delta n\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v = 0$$

其中 $\delta(\mathrm{d}u_i(t_1)) = \delta(\mathrm{d}u_i(t_2)) = 0$

N积分为

$$N = \int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iint_{S_a}\Big[(A_0 - K) - \mathrm{d}\, u_{i,n}\frac{\partial A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})} l_j\Big]\mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t$$

$$+ \iiint_{V_a}\rho\frac{\partial\,(\mathrm{d}u_i)}{\partial t}(\mathrm{d}u_{i,n})\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v \qquad (8.181)$$

8.4.3 裂纹扩展中的稳定性分析

由于裂纹扩展的原因，固体系统的总能量的变分问题是一个可动边界的变分问题，利用可动边界的变分理论得到能量泛函的一阶变分与二阶变分，然后在裂纹扩展的稳定状态与临界状态的条件下，求得裂纹扩展的稳定性条件与临界条件。

1. 变形固体系统的总能量

由于裂纹扩展的原因，固体系统的总能量泛函为

$$F_p(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint\limits_{V(\alpha)}[A_0(\xi_i(\alpha),\mathrm{d}u_i(\xi_i,\ \alpha),\mathrm{d}\xi_{ij}(\xi_i,\alpha))$$

$$-K(\xi_i(\alpha),\mathrm{d}u_{i,t}(\xi_i,\alpha))]\mathrm{d}v(\xi_i)$$

$$-\iint\limits_{S_1(\alpha)}\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i(\xi_i,\alpha)\mathrm{d}s(\xi_i)\Big\}\mathrm{d}t \tag{8.182}$$

式中

$$A_0=A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})-\mathrm{d}\bar{F}_i\mathrm{d}u_i \tag{8.183}$$

其中$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$为(1.66)式。

利用坐标变换(6.1)式，把泛函(8.182)式化为用固定积分域表示，则有

$$F_p(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint\limits_{V}[A_0(\xi_i(\alpha),\mathrm{d}u_i(\xi_i,\alpha),\mathrm{d}\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha))$$

$$-K(\xi_i(\alpha),\mathrm{d}u_{i,t}(\xi_i,\alpha))]|J|\mathrm{d}v$$

$$-\iint\limits_{S_1}[\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i(\xi_i,\alpha)]|J_i|\mathrm{d}s\Big\} \tag{8.184}$$

式中$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式(6.10)式。

2. 能量泛函的变分

下面分析能量泛函的二阶变分。

能量泛函(8.184)式的二阶变分为

$$\delta^2F_p=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint\limits_{V}\Big[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(A_0-K)|J|$$

$$+2\frac{\partial}{\partial\alpha}(A_0-K)\frac{\partial}{2\alpha}|J|+(A_0-K)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}|J|\Big]_{\alpha=0}\mathrm{d}v$$

$$-\iint\limits_{S_1}\Big[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i)|J_i|+2\frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i)\frac{\partial}{\partial\alpha}|J_i|$$

$$+(\mathrm{d}\bar{P}_i\,\mathrm{d}u_i)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}|J_i|\Big]_{\alpha=0}\mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint\limits_V\Big[\frac{\partial^2 A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\bar{\delta}(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\bar{\delta}(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})$$

$$-\rho\bar{\delta}u_{i,t}\bar{\delta}u_{i,t}\Big]\mathrm{d}v$$

$$+2\iiint\limits_V\Big[\Big(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)\Big)_{,j}+\frac{\partial}{\partial x_j}(A_0-K)\delta x_j\Big]$$

$$(\delta x_i)_{,i}\mathrm{d}v$$

$$+2\iiint\limits_V(A_0-K)[(\delta x_i)_{,i}(\delta x_j)_{,j}$$

$$-(\delta x_j)_{,i}(\delta x_i)_{,j}]\mathrm{d}v$$

$$-2\iint\limits_{S_1}[\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i(\delta x_j)]_{,j\neq i}\mathrm{d}s$$

$$-2\iint\limits_{S_1}\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i[(\delta x_j)_{,j}(\delta x_k)_{,k}$$

$$-(\delta x_j)_{,k}(\delta x_k)_{,j}]_{\substack{j\neq i\\k\neq i}}\mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t$$

$$-2\iiint\limits_V\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\bar{\delta}u_i\Big|_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}v \tag{8.185}$$

式中已假定$\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i$的二阶变分为零。

利用下述条件将(8.185)式化简：

(1) (8.185) 式中的函数满足一阶变分为零的条件；

(2) $\bar{\delta}(\mathrm{d}u_k(t_1))=\bar{\delta}(\mathrm{d}u_k(t_2))=0$；

(3) $\delta x_i=\mathrm{d}u_i$；

(4) $\bar{\delta}(\mathrm{d}u_i)=\bar{\delta}\mathrm{d}u_{i,j}=0$，即仅考虑由于裂纹扩展的原因使

能量泛函产生的变分。

于是二阶变分(8.185)式可化为

$$\delta^2 F_p = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V \left[\frac{\partial^2 A(d\varepsilon_{ij})}{\partial(d\varepsilon_{ij})\partial(d\varepsilon_{kl})}(d\varepsilon_{ij})_{,m}(d\varepsilon_{kl})_{,n}\delta x_m \delta x_n\right.\right.$$

$$\left. -\rho(u_{i,t})_{,m}(u_{i,t})_{,n}\delta x_m \delta x_n\right] dv$$

$$+2\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(A_0 - K)\delta x_j\right]\varepsilon_1 dv$$

$$+2\iiint_V (A_0 - K)\varepsilon_2 dv$$

$$-2\iint_{S_1}(d\bar{P}_i du_i)_{,j}\delta x_j \varepsilon_{3i} ds$$

$$\left. -2\iint_{S_1} d\bar{P}_i du_i \varepsilon_{4i} ds\right\} dt \qquad (8.186)$$

其中

$$\varepsilon_1 = (\delta x_i)_{,i} = \frac{\partial(du)}{\partial x} + \frac{\partial(dv)}{\partial y} + \frac{\partial(dw)}{\partial z} \qquad (8.187)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= (\delta x_i)_{,i}(\delta x_j)_{,j} - (\delta x_i)_{,j}(\delta x_j)_{,i} \\ &= \frac{\partial(du)}{\partial x}\frac{\partial(dv)}{\partial y} + \frac{\partial(dv)}{\partial y}\frac{\partial(dw)}{\partial z} \\ &\quad + \frac{\partial(dw)}{\partial z}\frac{\partial(du)}{\partial x} - \frac{\partial(du)}{\partial y}\frac{\partial(dv)}{\partial x} \\ &\quad - \frac{\partial(dv)}{\partial z}\frac{\partial(dw)}{\partial y} - \frac{\partial(dw)}{\partial x}\frac{\partial(du)}{\partial z}\end{aligned} \qquad (8.188)$$

$$\varepsilon_{3i} = (\delta x_j)_{,j} + (\delta x_k)_{,k} = \frac{\partial(du_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(du_k)}{\partial x_k} \qquad (8.189)$$

$$\varepsilon_{4i} = (\delta x_j)_{,j}(\delta x_k)_{,k} - (\delta x_j)_{,k}(\delta x_k)_{,j} \qquad (8.190)$$

在塑性状态时，体积改变量为零时，则有$\varepsilon_1 = \varepsilon_{3i} = 0$。

3. 裂纹扩展的稳定性条件

在待解函数满足一阶变分为零的条件下，由$\delta^2 F_p \geqslant 0$，可求得裂纹扩展的稳定条件与临界条件。影响裂纹扩展的因素很多，关系也十分复杂，根据(8.186)式可得一组明显稳定性条件。

(1) 稳定性条件

当$\varepsilon_1=0$，$\varepsilon_{3i}=0$，$\varepsilon_2>0$，$\varepsilon_{4i}>0$时，则

$$\frac{\partial^2 A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\,\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})_{,m}(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})_{,n} - \rho(u_{i,t})_{,m}(u_{i,t})_{,n}>0 \qquad (8.191)$$

$$\iiint_V (A_0-K)\varepsilon_2 \mathrm{d}v - \iint_{S_1} \mathrm{d}\bar{P}_i \mathrm{d}u_i \varepsilon_{4i} \mathrm{d}s>0 \qquad (8.192)$$

这是一组明显的裂纹扩展的稳定性条件。

(2) 稳定载荷参数

若$\mathrm{d}\bar{P}_i=\mathrm{d}P_{ci}k_i$，且$\mathrm{d}P_{ci}$为常数时，由(8.192)式得

$$\mathrm{d}P_{ci}<\frac{\iiint_V (A_0-K)\varepsilon_2 \mathrm{d}v}{\iint_{S_1} k_i \mathrm{d}u_i \varepsilon_{4i} \mathrm{d}s} \qquad (8.193)$$

这是裂纹扩展时的稳定载荷参数。

(3) 临界条件

当$\varepsilon_1=\varepsilon_{3i}=0$，$\varepsilon_2>0$，$\varepsilon_{4i}>0$时，则

$$\frac{\partial^2 A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})}(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})_{,m}(\mathrm{d}\varepsilon_{kl})_{,n} - \rho(u_{i,t})_{,m}(u_{i,t})_{,n}=0 \qquad (8.194)$$

$$\iiint_V (A_0-K)\varepsilon_2 \mathrm{d}v - \iint_{S_2} (\mathrm{d}\bar{P}_i \mathrm{d}u_i)\varepsilon_{4i} \mathrm{d}s=0 \qquad (8.195)$$

这是一组明显的裂纹扩展时的临界条件。

(4) 临界载荷参数

若$d\bar{P}_t = k_i dP_{cr}$，且dP_{cr}为常数时，由(8.195)式得

$$dP_{cr} = \frac{\iiint\limits_V (A_0 - K)\varepsilon_2 dv}{\iint\limits_{S_1} k_i d\bar{u}_i \, \varepsilon_{4i} ds} \tag{8.196}$$

这是裂纹扩展时临界载荷参数。

4. 裂纹扩展的稳定性定理

在待解函数满足能量泛函的一阶变分为零的条件下，满足变分方程(8.197)式的应变增量与位移增量函数使裂纹扩展处于稳定状态(小于)或临界状态(等于)。

稳定载荷参数与临界载荷参数，可分别由(8.193)式与(8.196)式求得。

$$\delta^2 F_p \geqslant 0 \tag{8.197}$$

8.4.4 裂纹扩展中的结构(或构件)的寿命计算公式

1. 基本条件

根据下列条件建立裂纹扩展中的结构(或构件)寿命计算公式：

(1) 裂纹扩展中的能量泛函的变分问题是可动边界的变分问题；

(2) 裂纹扩展的临界状态为

$$\delta F_p = 0, \quad \delta^2 F_p = 0$$

(3) 裂纹扩展的临界速度系指在临界裂纹扩展状态中所对应的动能中的速度。

2. 寿命计算公式 I

假定裂纹尖端的扩展速度为临界速度时，所求得的寿命计算

公式。

能量泛函(8.184)式的二阶变分，在$\varepsilon_1=\varepsilon_{3t}=0$的条件下，根据(8.186)式可将能量泛函的二阶变等于零表示为

$$\delta^2 F_p=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V(\bar{\delta}^2 A_0-\bar{\bar{\delta}}^2 K)\mathrm{d}v\right.$$

$$+2\iiint_V(A_0-K)\varepsilon_2\mathrm{d}v$$

$$\left.-\iint_{S_1}\bar{\bar{\delta}}^2(\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i)\mathrm{d}s-\iint_{S_1}(\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i)\,\varepsilon_{4t}\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}(A_{ap}-K_{ap}-K_{tp}-K_t-P_{ap})\mathrm{d}t=0 \tag{8.198}$$

式中

$$A_{ap}=\frac{1}{2}\iiint_V(\bar{\bar{\delta}}^2 A_0+2A_0\varepsilon_2)\mathrm{d}v \tag{8.199}$$

$$K_{ap}=\frac{1}{2}\iiint_V(\bar{\bar{\delta}}^2 K+2K\varepsilon_2)\mathrm{d}v \tag{8.200}$$

$$K_{tp}=\frac{1}{2}\bar{\bar{\delta}}^2 K_t \tag{8.201}$$

$$K_t=\frac{1}{2}\rho u_{i,t}\,u_{i,t}\varepsilon_{2t} \tag{8.202}$$

$$P_{ap}=\frac{1}{2}\iint_{S1}(\bar{\bar{\delta}}^2\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i+2\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i\varepsilon_{4t})\mathrm{d}s \tag{8.203}$$

式中$\lim\limits_{\Omega\to 0}(A-\Omega)=A$，$A$可为包括裂纹尖端在内的任意元素的区域，$S_1$为已知力$\bar{P}_i$的作用边界，$\Omega$为含裂纹尖端的区域，其它符号含义同前。

当待解函数满足一阶变分为零的条件时，由方程(8.198)式

得

$$K_t = A_{ap} - K_{ap} - K_{tp} - P_{ap}$$

故

$$\frac{1}{2}\rho u_{i,t} u_{i,t} \varepsilon_{2t} = A_{ap} - K_{ap} - K_{tp} - P_{ap}$$

所以

$$u_{i,t} = \left[\frac{2}{\rho\varepsilon_{2t}}(A_{ap} - K_{ap} - K_{tp} - P_{ap})\right]^{\frac{1}{2}} \tag{8.204}$$

已知$u_{i,t} = \frac{dL}{dt}$，则

$$dt = \frac{dL}{u_{i,t}} \tag{8.205}$$

将(8.204) 式代入(8.205) 式，经积分而得

$$T_p = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{L_1}^{L_2} \frac{dL}{\left[\frac{2}{\rho\varepsilon_{2t}}(A_{ap} - K_{ap} - K_{tp} - P_{ap})\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{8.206}$$

上式即为裂纹扩展中结构（或构件）的寿命计算公式Ⅰ，式中符号含义同前。

若

$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (du_1)^2 + (du_2)^2 + (du_3)^2$$

则

$$(dL) = \left[1 + \left(\frac{\partial(du_2)}{\partial(du_1)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(du_3)}{\partial(du_1)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} d(du_1) \tag{8.207}$$

将(8.207) 式代入(8.206)式得

$$T_p = \int_{u_0}^{u_c} \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial(du_2)}{\partial(du_1)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(du_3)}{\partial(du_1)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} d(du_1)}{\left[\frac{2}{\rho\varepsilon_{2t}}(A_{ap} - K_{ap} - K_{tp} - P_{ap})\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{8.208}$$

若裂纹扩展过程比较缓慢，这时动能改变量的度量$K_{tp}=0$，于是(8.206)式可化为

$$T_p=\int_{L_1}^{L_2}\frac{\mathrm{d}L}{\left[\frac{2}{\rho\varepsilon_{2t}}(A_{ap}-K_{ap}-P_{ap})\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{8.209}$$

(8.208)式可化为

$$T_p=\int_{u_0}^{u_c}\frac{\left[1+\left(\frac{\partial(\mathrm{d}u_2)}{\partial(\mathrm{d}u_1)}\right)^2+\left(\frac{\partial(\mathrm{d}u_3)}{\partial(\mathrm{d}u_1)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(\mathrm{d}u_1)}{\left[\frac{2}{\rho\varepsilon_{2t}}(A_{ap}-K_{ap}-P_{ap})\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{8.210}$$

3. 寿命计算公式 I

假定伴随裂纹尖端的扩展是一个区域Ω时，寿命计算公式 I 为

$$T_p=\int_{L_1}^{L_2}\frac{\mathrm{d}L}{\left[\frac{2}{m_{\Omega p}}(A_{ap}-K_{ap}-K_{mp}-P_{ap})\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{8.211}$$

$$T_p=\int_{u_0}^{u_c}\frac{\left[1+\left(\frac{\partial(\mathrm{d}u_2)}{\partial(\mathrm{d}u_1)}\right)^2+\left(\frac{\partial(\mathrm{d}u_3)}{\partial(\mathrm{d}u_1)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{2}{m_\Omega}(A_{ap}-K_{ap}-K_{mp}-P_{ap})\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{8.212}$$

式中

$$A_{ap}=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V-\Omega}(\bar{\bar{\delta}}^2A_0+2A_0\varepsilon_2)\mathrm{d}v \tag{8.213}$$

$$K_{ap}=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V-\Omega}(\bar{\bar{\delta}}^2K+2K\varepsilon_2)\mathrm{d}v \tag{8.214}$$

$$K_{mp}=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\bar{\bar{\delta}}^2K_m\mathrm{d}\Omega \tag{8.215}$$

其中

$$K_m = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega} \rho(u_i,t)(u_i,t)\varepsilon_{2m} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2}(u_i,t)(u_i,t)m_{\Omega p} \tag{8.216}$$

$$m_{\Omega p} = \iiint_{\Omega} \rho\varepsilon_{2m} d\Omega$$

4. 寿命计算公式Ⅲ

寿命计算公式Ⅰ、Ⅱ都是从整体出发建立的。现在从局部出发建立寿命计算公式Ⅲ。

（1）变形固体的总能量泛函

(8.182)式表示固体系统的总能量。现将(8.182) 式用另一种形式表示。

已知

$$\delta F_p = 0$$

则

$$d\sigma_{ij} l_j = d\bar{P}_i \tag{8.217}$$

由于给定的位移边界为已知的固定边界，故有

$$\delta^2\left[\iint_{S_2} d\bar{u}_i d\sigma_{ij} l_j ds\right] = 0 \tag{8.218}$$

由(8.217)式与(8.218)式，可得

$$\delta^2\left[\iint_{S_1(\alpha)} (d\bar{P}_i du_i) ds(\xi_i)\right]$$

$$= \delta^2\left[\iint_{S_1(\alpha)} (d\sigma_{ij} l_j du_i) ds(\xi_i)\right]$$

$$=\delta^2\left[\iint_{S_1(\alpha)}(d\sigma_{ij}l_jdu_i)ds(\xi_i)+\iint_{S_2}d\sigma_{ij}l_jd\bar{u}_ids\right]$$

$$=\delta^2\left[\iiint_{V(\alpha)}(d\sigma_{ij}du_i)_{,j}dv(\xi_i)\right] \tag{8.219}$$

利用(8.219)式，(8.182)式可化为

$$F_p(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_{V_\alpha}[A_0(\xi_i(\alpha),\alpha)-K(\xi_i,\alpha)\right.$$

$$\left.-(d\sigma_{ij}du_i)_{,j}]\,dv(\xi_i)\right\}dt \tag{8.220}$$

利用坐标变换(6.1)式，把泛函(8.220)式化为固定积分域表示，则有

$$F_p(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_{V}[A_0(\xi_i(\alpha),\alpha)-K(\xi_i(\alpha),\alpha)\right.$$

$$\left.-(d\sigma_{ij}du_i)_{,j}]\,|J|\,dv\right\}dt \tag{8.221}$$

(2) 能量泛函的二阶变分

能量泛函(8.221)式的二阶变分为

$$\delta^2F_p=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(A_0-K-(d\sigma_{ij}du_i)_{,j})\,|J|\right.\right.$$

$$+2\frac{\partial}{\partial\alpha}(A_0-K-(d\sigma_{ij}du_i)_{,j})\frac{\partial}{\partial\alpha}|J|$$

$$\left.\left.+(A_0-K-(d\sigma_{ij}du_i)_{,j})\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\,|J|\right]_{\alpha=0}dv\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V\left[(\bar{\bar{\delta}}^2A_0+2A_0\varepsilon_2)\right.\right.$$

$$-(\bar{\bar{\delta}}^2K+2K\varepsilon_2)-(\bar{\bar{\delta}}^2(d\sigma_{ij}du_i)_{,j}$$

$$+2(d\sigma_{ij}du_i)_{,j}\varepsilon_2)\Big]dv\Big\}dt \qquad (8.222)$$

在变量函数满足一阶变分为零的条件下，令能量泛函(8.222)式的二阶变分等于零，于是得

$$\delta^2 F_p=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V (A_{bp}-K_{bp}-K-P_{bp})dv\right\}dt=0$$

$$(8.223)$$

若上式成立，可得

$$A_{bp}-K_{bp}-K-P_{bp}=0 \qquad (V) \qquad (8.224)$$

其中

$$A_{bp}=\frac{1}{2\varepsilon_2}\bar{\bar{\delta}}^2 A_g+A_0 \qquad (8.225)$$

$$K_{bp}=\frac{1}{2\varepsilon_2}\bar{\bar{\delta}}^2 K \qquad (8.226)$$

$$K=\frac{1}{2}\rho(u_{i,t})(u_{i,t}) \qquad (8.227)$$

$$P_{bp}=\frac{1}{2\varepsilon_2}\bar{\bar{\delta}}^2(d\sigma_{ij}du_i)_{,j}+(d\sigma_{ij}du_i)_{,j}$$

$$(8.228)$$

将(8.227)式代入(8.224)式中，得

$$\frac{1}{2}\rho(u_{i,t})^2=A_{bp}-K_{bp}-P_{bp} \qquad (8.229)$$

已知 $u_i,t=\frac{dL}{dt}$，则

$$dt=\frac{dL}{u_{i,t}} \qquad (8.230)$$

由(8.229)式求出$u_{i,t}$，并将$u_{i,t}$代入(8.230)式，得

$$T_p=\int_{t_1}^{t_2}dt=\int_{L_1}^{L_2}\frac{dL}{\left[\frac{2}{\rho}(A_{bp}-K_{bp}-P_{bp})\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (8.231)$$

若将

$$(\mathrm{d}L)^2=(\mathrm{d}u_1)^2+(\mathrm{d}u_2)^2+(\mathrm{d}u_3)^2$$

代入(8.231) 式，可得

$$T_p=\int_{u_0}^{u_c}\frac{\left[1+\left(\frac{\partial(\mathrm{d}u_2)}{\partial(\mathrm{d}u_1)}\right)^2+\left(\frac{\partial(\mathrm{d}u_3)}{\partial(\mathrm{d}u_1)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(\mathrm{d}u_1)}{\left[\frac{2}{\rho}(A_{bp}-K_{bp}-P_{bp})\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{8.232}$$

根据(8.224)式在积分域内任意点都成立的条件，可建立裂纹尖端点的寿命计算公式Ⅱ。

5．疲劳裂纹扩展寿命计算公式

对于疲劳裂纹扩展中的结构（或构件）的寿命计算公式，可化为循环次数表示，即

$$N_p=T_pN_0\leqslant N_c \tag{8.233}$$

其中T_p为由前面公式中求得的寿命值；N_0为单位时间内的循环次数；N_c为极限循环次数。

§8.5 蠕变理论范畴的断裂分析的变分问题

蠕变理论范畴的裂纹扩展的机理是一个十分复杂的问题，它与构件的几何形状、材料的物理力学性质、应力状态、温度效应，以及工作环境条件等相关联，是非线性非平衡态不可逆过程的热力学问题。当今这方面的研究成果还难以做定量的确切的数学描述。这里仅根据稳定蠕变流动理论来论述裂纹扩展中的能量释放量（率），裂纹扩展过程的稳定条件和临界条件，以及裂纹扩展时结构（或构件）的寿命计算公式。

8.5.1 裂纹扩展中能量释放量(率)

1. 变形固体系统的能量泛函

将固体系统分割成有限个元素之和，由于裂纹扩展的原因，固体系统的总能量为

$$F_c(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_{V(a)}[A_0(\xi_i(\alpha),\dot{u}_i(\xi_i,\alpha),\dot{\varepsilon}_{ij}(\xi_i,\alpha)\right.$$

$$-\dot{K}(\xi_i(\alpha),\dot{u}_i(\xi_i,\alpha))]\mathrm{d}v(\xi_i)$$

$$\left.-\iint_{S_a(\alpha)\cap S_1(\alpha)}\bar{P}_i\dot{u}_i(\xi_i,\alpha)\mathrm{d}s(\xi_i)\right\}\mathrm{d}t \qquad (8.234)$$

其中

$$A_0=A(\dot{\varepsilon}_{ij})-\bar{F}_i\dot{u}_i \qquad (8.235)$$

$$\dot{K}=\left(\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i\right)_{,t}$$

$A(\dot{\varepsilon}_{ij})$为(1.101)式。

利用坐标变换(6.1)式，把泛函(8.234)式化为用固定积分域表示，则有

$$F_c(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_{V_a}[A_0(\xi_i(\alpha),\dot{u}_i(\xi_i,\alpha),\dot{\varepsilon}_{ij}(\xi_i,\alpha))\right.$$

$$-\dot{K}(\xi_i(\alpha),\dot{u}_i(\xi_i,\alpha))]\,|J|\,\mathrm{d}v$$

$$\left.-\iint_{S_a\cap S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i(\xi_i,\alpha)\,|J_i|\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t \qquad (8.236)$$

式中$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式(6.10)式。

2. 能量泛函的变分

由可动边界的变分理论，泛函(8.236) 式的一阶变分等于零

的形式为

$$\delta F_c=\sum_{\alpha=1}^{M}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_{V_\alpha}-\Big[\Big(\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial(\dot{\varepsilon}_{ij})}\Big)_{,j}$$

$$+\mathrm{d}\bar{F}_i-\rho\ddot{u}_i\Big]\bar{\delta}(\dot{u}_i)\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_\alpha}(A_0-\dot{K})\delta n\mathrm{d}s+\iint_{S_\alpha}\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial(\dot{\varepsilon}_{ij})}l_j\bar{\delta}(\dot{u}_i)\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_\alpha\cap S_1}\Big[\Big(\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial(\dot{\varepsilon}_{ij})}l_j-\bar{P}_i\Big)\bar{\delta}(\dot{u}_i)+P_c\Big]\mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{M}\Big\{\iiint_{V_\alpha}\rho\dot{u}_i\bar{\delta}\ddot{u}_i\,\mathrm{d}v\Big\}\mathrm{d}t=0 \qquad (8.237)$$

式中

$$P_c=(A_0-\dot{K})\delta n-(\bar{P}_i\dot{u}_i\delta x_j)_{j\neq i} \qquad (8.238)$$

若假定$\bar{\delta}\ddot{u}_i=0$，即由于加速度的变分为零，而仅考虑由于裂纹扩展的原因，使能量泛函产生的变分。

若在元素V_α的边界上，关系式

$$\bar{\delta}(\dot{u}_i)=\delta(\dot{u}_i)-\dot{u}_{i,n}\delta n$$

成立，则变分方程(8.237)变为

$$\delta F_c=\sum_{\alpha=1}^{M}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_{V_\alpha}-\Big[\Big(\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial(\dot{\varepsilon}_{ij})}\Big)_{,j}$$

$$+\bar{F}_i-\rho\ddot{u}_i\Big]\bar{\delta}\dot{u}_i\mathrm{d}v+\iint_{S_\alpha}\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial(\dot{\varepsilon}_{ij})}l_j\,\delta\dot{u}_i\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{S_\alpha}\Big[(A_0-\dot{K})-\dot{u}_{i,n}\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial(\dot{\varepsilon}_{ij})}l_j\Big]\delta n\mathrm{d}s$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_1}\left[\left(\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial(\dot{\varepsilon}_{ij})}l_j-\bar{P}_i\right)\delta\dot{u}_i\right]ds$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_1}\left[P_c-\left(\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial(\dot{\varepsilon}_{ij})}l_j-\bar{P}_i\right)(\dot{u}_{i,n})\,\delta n\right]ds\Bigg\}dt$$

$$=0 \tag{8.239}$$

由(8.239)式可知，能量泛函的变分由两部份组成，其中一部份为区域固定由变量泛函的改变产生的变分；另一部份是由于积分域的变动而产生的变分。裂纹扩展中的能量释放量是通过积分区域的变动由能量泛函产生的变分来计算的。

就固体内部分割的任意元素而言，当待解函数在元素内部满足动力平衡方程、应力应变速度(1.94)式、应变速度与位移速度(1.93)式、位移边界条件(1.99)式；在元素边界上位移速度与边界改变量$\delta n(\delta x_i)$均为连续函数时，则变分方程(8.239)变为

$$N_C=\int_{t_1}^{t_2}\Bigg\{\iint\limits_{S_a}\left[(A_0-\dot{K})-\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}l_j\dot{u}_{i,n}\right]\delta n ds$$

$$+\iint\limits_{S_a}\left[\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}l_j\,\delta\dot{u}_i\right]ds$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_1}\left[\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right]\delta\dot{u}_i ds$$

$$+\iint\limits_{S_a\cap S_1}\left[P_C-\left(\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right)(\dot{u}_{i,n})\,\delta n\right]ds\Bigg\}dt$$

$$=0 \tag{8.240}$$

(1) 若在元素边界上，$\delta\dot{u}_i$与$\delta n(\delta x_i)$相互无关时，则方程(8.240)式中的各积分项有下面几种情况。

在元素边界S_{ab}上：

$$N_{c,ab}=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[\left(A_0-K-\left(\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial \dot{e}_{ij}}l_j\right)\dot{u}_{i,n}\right)_{S_{ab}+0}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(A_0-K-\left(\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial \dot{e}_{ij}}l_j\right)\dot{u}_{i,n}\right)_{S_{ab}-0}\right]\delta n ds\right\}dt$$

(8.241)

式中假定 $\left(\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial \dot{e}_{ij}}l_j\right)_{S_{ab}+0}=\left(\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial \dot{e}_{ij}}l_j\right)_{S_{ab}-0}$

在元素边界S_{ah}上：

$$N_{c,ah}=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_{S_{ah}}\left[A_0-K-\left(\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial \dot{e}_{ij}}l_j\right)\dot{u}_{i,n}\right]\delta n ds\right\}dt$$

(8.242)

在元素边界S_{as_1}上：

$$N_{c,s_1}=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_{S_{as_1}}\left[P_c-\left(\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial \dot{e}_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right)\dot{u}_{i,n}\delta n\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial \dot{e}_{ij}}l_j-\bar{P}_i\right)\delta\dot{u}_i\right]ds\right\}dt \tag{8.243}$$

(2) 在元素边界S_a上，若$\delta\dot{u}_i$与$\delta n(\delta x_i)$相关时，且令$\dot{u}_i=\dot{R}_i$，则有

$$\delta\dot{u}_i=\dot{R}_{i,k}\delta x_k=\dot{R}_{i,n}\delta n$$

于是方程(8.240)式中的各积分项有下面几种情况。

在元素边界S_{ab}上：

$$N_{c,ab}=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_{S_{ab}}\left[\left(A_0-K+(\dot{R}_{i,n}-\dot{u}_{i,n})\right.\right.\right.$$

$$\left.\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial \dot{e}_{ij}}l_j\right)_{S_{ab}-0}-\left(A_0-K+(\dot{R}_{i,n}\right.$$

$$\left.\left.\left.-\dot{u}_{i,n})\frac{\partial A(\dot{e}_{ij})}{\partial \dot{e}_{ij}}l_j\right)_{S_{ab}-0}\right]\delta n ds\right\}dt \tag{8.244}$$

在元素边界S_{ah}上：

$$N=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint\limits_{S_{ah}}\left[A_0-\dot{K}-\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}l_j\dot{u}_{i,n}\right]\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t$$

(8.248)

或

$$N=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint\limits_{S_{ah}}\left[A_0-\dot{K}+(\dot{R}_{i,n}-\dot{u}_{i,n})\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}l_j\right]\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t$$

(8.249)

此式就是沿裂纹边界法线方向单位长度的能量释放量，即能量释放率。

结论Ⅰ：当任意元素V_a处于固体内部，其边界$S_a=S_{ab}\cup S_{ah}$，于是变分方程(8.247)式变为

$$N_c=N_{c,ab}+N_{c,ah}=0 \tag{8.250}$$

或为

$$N_c=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint\limits_{S_a}\left[A_0-\dot{K}-\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}l_j\dot{u}_{i,n}\right]\delta n\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t$$

$$=0 \tag{8.251}$$

N积分为

$$N=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint\limits_{S_a}\left[A_0-\dot{K}-\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}l_j\dot{u}_{i,n}\right]\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t \tag{8.252}$$

上述N积分是沿裂纹边界法线方向的能量释放率，当然亦可化为沿坐标x_i方向的能量释放率。

8.5.2 裂纹扩展中的稳定性分析

利用可动边界的变分理论求得能量泛函的一阶变分与二阶变分，然后根据裂纹扩展的稳定状态与临界状态，求得裂纹扩展的稳定性条件与临界条件。

1．变形固体系统的能量泛函

在外界因素作用下，由于裂纹扩展的原因，固体系统的总能量泛函为

$$F_{\sigma}(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_{V(\alpha)}[A_0(\xi_i(\alpha),\dot{u}_i(\xi_i,\alpha),\dot{\varepsilon}_{ij}(\xi_i,\alpha))$$

$$-\dot{K}(\xi_i(\alpha),\dot{u}_i(\xi_i,\alpha),u_i(\xi,\alpha))]dv(\xi_i)$$

$$-\iint_{B_1(\alpha)}\bar{P}_i\dot{u}_i(\zeta_i,\alpha)ds(\zeta_i)\Big\}dt \qquad (8.253)$$

式中

$$A_0=A(\dot{\varepsilon}_{ij})-\bar{F}_i\dot{u}_i$$

$A(\dot{\varepsilon}_{ij})$为(1.101)式。

利用坐标变换(6.1)式，把泛函(8.253)式化为用固定积分域表示，则有

$$F_{\sigma}(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_{V}[A_0(\xi_i(\alpha),\dot{u}_i(\xi_i,\alpha),\dot{\varepsilon}_{ij}(\xi_i,\alpha))$$

$$-\dot{K}(\xi_i(\alpha),\dot{u}_i(\xi_i,\alpha),u_i(\xi_i,\alpha))]|J|dv$$

$$-\iint_{B_1}\bar{P}_i\dot{u}_i(\zeta_i,\alpha)|J_i|ds\Big\}dt \qquad (8.254)$$

式中$|J|$与$|J_i|$为雅各比行列式(6.10)式。

2．能量泛函的变分

下面分析能量泛函的二阶变分。

能量泛函(8.254)式的二阶变分为

$$\delta^2F_{\sigma}=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_{V}\Big[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(A_0-\dot{K})|J|$$

$$+2\frac{\partial}{\partial\alpha}(A_0-\dot{K})\frac{\partial}{\partial\alpha}|J|+(A_0-\dot{K})\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}|J_1|\Big]_{\alpha=0}dv$$

$$
-\iint_{S_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(\bar{P}_i\dot{u}_i)|J_i|+2\frac{\partial}{\partial\alpha}(\bar{P}_i\dot{u}_i)\frac{\partial}{\partial\alpha}|J_i|\right.
$$

$$
\left.\left.+(\bar{P}_i\dot{u}_i)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}|J_i|\right]_{\alpha=0}\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t
$$

$$
=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V\left[\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}\,\partial\dot{\varepsilon}_{kl}}\delta(\dot{\varepsilon}_{ij})\delta(\dot{\varepsilon}_{kl})\right.\right.
$$

$$
\left.-2\rho\,\delta u_i\,\delta\dot{u}_i\right]\mathrm{d}v
$$

$$
+2\iiint_V\left[\left(\frac{\partial A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}}(\tilde{\delta}\dot{u}_i)\right)_{,j}\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial}{\partial x_j}(A_0-\dot{K})\,\dot{\varepsilon}x_j\right](\delta x_i)_{,i}\mathrm{d}v
$$

$$
+2\iiint_V(A_0-\dot{K})[(\delta x_i)_{,i}(\delta x_j)_{,j}-(\delta x_j)_{,i}(\delta x_i)_{,j}]\,\mathrm{d}v
$$

$$
-2\iint_{S_1}\left[(\bar{P}_i\dot{u}_i)\,(\delta x_j)_{,j\neq i}\right]\mathrm{d}s
$$

$$
-2\iint_{S_1}(\bar{P}_i\dot{u}_i)[(\delta x_j)_{,j}(\delta x_k)_{,k}
$$

$$
\left.-(\delta x_j)_{,k}(\delta x_k)_{,j}\Big]_{\substack{j\neq i\\k\neq i}}\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t \qquad)(8.255)
$$

式中$\bar{P}_i\dot{u}_i$的二阶变分等于零。

利用下述条件将(8.255)式进行化简：

(1) 式中的待解函数满足能量泛函的一阶变分为零的条件；

(2) $\tilde{\delta}\dot{u}_i=0$，$\tilde{\delta}u_i=0$；

(3) $\delta x_i=u_i$；

(4) $\varepsilon_{ii}=u_{i,i}=0$，$\dot{\varepsilon}_{ii}=\dot{u}_{i,i}=0$。

于是二阶变分(8.255)式可化为

$$\delta^2 F_c = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V\left[\frac{\partial^2 A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}\partial\dot{\varepsilon}_{kl}}(\dot{\varepsilon}_{ij})_{,m}(\dot{\varepsilon}_{kl})_{,n}\delta x_m\delta x_n\right.\right.$$

$$\left.-\rho(\dot{u}_i)_{,m}(\dot{u}_i)_{,n}\delta x_m\delta x_n\right]dv$$

$$+2\iiint_V(A_0-\dot{K})\varepsilon_2\,dv$$

$$\left.-2\iint_{S_1}(\bar{P}_i\dot{u}_i)\varepsilon_{4i}ds\right\}dt \qquad (8.256)$$

3. 裂纹扩展的稳定性条件

在待解函数满足一阶变分为零的条件下，由$\delta^2 F_c\geqslant 0$的条件，可求得裂纹扩展中的稳定条件与临界条件。

(1) 稳定性条件

当$\varepsilon_2>0$，$\varepsilon_{4i}>0$时，则

$$\frac{\partial^2 A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\varepsilon}_{ij}\partial\dot{\varepsilon}_{kl}}(\dot{\varepsilon}_{ij})_{,m}(\dot{\varepsilon}_{kl})_{,n}-\rho(\dot{u}_i)_{,m}(\dot{u}_i)_{,n}>0 \qquad (8.257)$$

$$\iiint_V(A_0-\dot{K})\varepsilon_2 dv-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i\varepsilon_{4i}ds>0 \qquad (8.258)$$

这是一组明显的裂纹扩展的稳定性条件。

(2) 稳定载荷参数

若$\bar{P}_i=P_{si}k_i$，且P_{si}为常数时，由(8.258)式得

$$P_{si}<\frac{\iiint_V(A_0-\dot{K})\varepsilon_2\,dv}{\iint_{S_1}k_i\dot{u}_i\varepsilon_{4i}ds} \qquad (8.259)$$

这是裂纹扩展时的稳定载荷参数。

(3) 临界条件

当$\varepsilon_2>0$，$\varepsilon_{4i}>0$时，则

$$\frac{\partial^2 A(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}\partial \dot{\varepsilon}_{kl}}(\dot{\varepsilon}_{ij})_{,m}(\dot{\varepsilon}_{kl})_{,n}-\rho(\dot{u}_i)_{,m}(\dot{u}_i)_{,n}=0 \quad (8.260)$$

$$\iiint_V (A_0-\dot{K})\varepsilon_2 \mathrm{d}v-\iint_{S_1}(\overline{P}_i\dot{u}_i)\varepsilon_{4i}\mathrm{d}s=0 \quad (8.261)$$

这是一组明显的裂纹扩展时的临界条件。

(4) 临界载荷参数

若$\overline{P}_i=k_iP_{cr}$，且P_{cr}为常数时，由(8.261)式得

$$P_{cr}=\frac{\iiint_V (A_0-\dot{K})\varepsilon_2\,\mathrm{d}v}{\iint_{S_1} k_i\dot{u}_i\varepsilon_{4i}\,\mathrm{d}s} \quad (8.262)$$

这便是裂纹扩展时临界载荷参数。

4. 裂纹扩展的稳定性定理

在待解函数满足能量泛函的一阶变分为零的条件下，满足方程(8.257)、(8.258)式和(8.260)、(8.261)式的应变速度与位移速度，使裂纹扩展处于稳定状态或处于临界状态。

稳定载荷参数与临界载荷参数分别由(8.259)式和(8.262)式求得。

8.5.3 裂纹扩展中的结构(或构件)的寿命计算公式

1. 基本条件

依据下面条件，建立裂纹扩展中的结构（或构件）的寿命计算公式：

(1) 裂纹扩展中的能量泛函的变分问题是可动边界的变分问题；

(2) 裂纹扩展的临界状态为

$$\delta F_c = 0,\ \delta^2 F_c = 0$$

(3) 裂纹扩展的临界速度系指临界裂纹扩展状态中动能式中的速度，根据临界速度建立寿命计算公式。

2. **寿命计算公式 I**

根据裂纹尖端的扩展速度为临界速度来建立寿命计算公式。

根据(8.256) 式可将能量泛函的二阶变分表示为

$$\delta^2 F_c = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_V(\bar{\bar{\delta}}^2 A_0 - \bar{\bar{\delta}}^2 \dot{K})\mathrm{d}v$$

$$+ 2\iiint_V (A_0 - \dot{K})\varepsilon_2 \mathrm{d}v$$

$$- 2\iint_{S_1} \bar{P}_i \dot{u}_i \varepsilon_{4i} \mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}(A_{ac} - K_{ac} - K_{tc} - K_t - P_{ac})\mathrm{d}t \qquad (8.263)$$

其中

$$A_{ac} = \frac{1}{2}\iiint_V(\bar{\bar{\delta}}^2 A_0 + 2A_0\varepsilon_2)\mathrm{d}v \qquad (8.264)$$

$$K_{ac} = \frac{1}{2}\iiint_V(\bar{\bar{\delta}}^2 \dot{K} + 2\dot{K}\varepsilon_2)\mathrm{d}v \qquad (8.265)$$

$$K_{tc} = \frac{1}{2}\bar{\bar{\delta}}^2 \dot{K}_t \qquad (8.266)$$

$$K_t = \left(\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i\right)_{,t}\varepsilon_{2t} = (\rho \dot{u}_i \ddot{u}_i)\varepsilon_{2t}$$

$$= \rho\dot{u}_{i_t}\dot{u}_{i_t}\varepsilon_{2t} \qquad (8.267)$$

$$P_{ac} = \iint_{S_1}(\bar{P}_i\dot{u}_i)\varepsilon_{4i}\mathrm{d}s \qquad (8.268)$$

式中$\lim\limits_{\Omega\to 0}(A-\Omega)=A$，$A$可为包括裂纹尖端在内的任意元素的 区域，$S_1$为已知力$P_i$的作用边界，$\Omega$为含裂纹尖端的区域。

当待解函数满足一阶变分为零的条件，若令(8.263) 式等于零，则有

$$K_i=A_{ac}-K_{ac}-K_{tc}-P_{ac} \tag{8.269}$$

将(8.267) 代入上式，可得

$$\rho\dot{u}_{it}u_{it}\varepsilon_{2t}=A_{ac}-K_{ac}-K_{tc}-P_{ac}$$

$$\dot{u}_{it}=\frac{1}{\rho u_{it}\varepsilon_{2t}}(A_{ac}-K_{ac}-K_{tc}-P_{ac}) \tag{8.270}$$

已知临界速度为

$$\dot{u}_{it}=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$T_c=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t=\int_{L_1}^{L_2}\frac{\mathrm{d}L}{\dot{u}_{it}} \tag{8.271}$$

将(8.270) 式代入(8.271)式，则得

$$T_c=\int_{L_1}^{L_2}\frac{\mathrm{d}L}{\dfrac{1}{\rho u_{it}\varepsilon_{2t}}(A_{ac}-K_{ac}-K_{tc}-P_{ac})} \tag{8.272}$$

这便是裂纹扩展中结构（或构件）的寿命计算公式 I。

若$(\mathrm{d}L)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2=(\mathrm{d}u_1)^2+(\mathrm{d}u_2)^2+(\mathrm{d}u_3)^2$，则

$$\mathrm{d}L=\left[1+\left(\frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial u_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u_1 \tag{8.273}$$

将(8.273)式代入(8.272)式，则有

$$T_c=\int_{u_0}^{u_c}\frac{\left[1+\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial u_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u_1}{\dfrac{1}{\rho u_{it}\varepsilon_{2t}}(A_{ac}-K_{ac}-K_{tc}^{\prime}-P_{ac})} \tag{8.274}$$

3. 寿命计算公式Ⅱ

若伴随裂纹尖端点的扩展是一个区域Ω，下面建立寿命计算公式Ⅱ。

类似于公式(8.272)与(8.274)式，有下面公式：

$$T_c=\int_{L_1}^{L_2}\frac{\mathrm{d}L}{\left[\frac{1}{m_{\Omega c}}(A_{ac}-K_{ac}-K_{mc}-P_{ac})\right]} \tag{8.275}$$

$$T_c=\int_{u_0}^{u_c}\frac{\left[1+\left(\frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial u_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u_1}{\frac{1}{m_{\Omega c}}(A_{ac}-K_{ac}-K_{mc}-P_{ac})} \tag{8.276}$$

式中

$$A_{ac}=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V-\Omega}(\bar{\bar{\delta}}^2A_0+2A_0\varepsilon_2)\mathrm{d}v \tag{8.277}$$

$$K_{ac}=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V-\Omega}(\bar{\bar{\delta}}^2\dot{K}+2\dot{K}\varepsilon_2)\mathrm{d}v \tag{8.278}$$

$$K_{mc}=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\bar{\bar{\delta}}^2K_m\mathrm{d}\Omega \tag{8.279}$$

$$K_m=\iiint\limits_{\Omega}\rho u_i\dot{u}_l\varepsilon_{2m}\mathrm{d}\Omega=\dot{u}_lm_{mc} \tag{8.280}$$

其中

$$m_{\Omega c}=\iiint\limits_{\Omega}\rho u_i\varepsilon_{2m}\mathrm{d}\Omega$$

4. 寿命计算公式Ⅲ

寿命计算公式Ⅰ、Ⅱ都是从整体出发建立的计算公式。现在从局部出发建立寿命计算公式Ⅲ。

(1) 变形固体系统的能量泛函

已知固体系统的能量泛函为(8.253)式。若满足下面的条件时，(8.253)式可化为另一种表示形式。

已知在$\delta F_c=0$的条件下，则有

$$\bar{P}_i=\sigma_{ij}l_j \qquad (S_1) \qquad (8.281)$$

假定待解函数满足位移边界条件

$$\overline{\dot{u}_i}=\dot{u}_i \qquad (S_2) \qquad (8.282)$$

在给定的固定位移边界S_2上，有

$$\bar{\bar{\delta}}\left[\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\right]=0 \qquad (8.283)$$

利用上述3个条件，泛函(8.253)可化为

$$\begin{aligned}F_c(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_{V(\alpha)}&[A_0(\xi_i(\alpha),\dot{u}_i(\xi_i,\alpha),\dot{e}_{ij}(\xi_i,\alpha))\\&-\dot{K}(\xi_i(\alpha),\dot{u}_i(\xi_i,\alpha),\dot{u}_i(\xi_i,\alpha))\\&-(\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha)\dot{u}_i(\xi_i,\alpha))_{,j}]\mathrm{d}v(\xi_i)\end{aligned} \qquad (8.284)$$

利用坐标变换(6.1)式，把泛函(8.284)式化为用固定积分域表示，则有

$$\begin{aligned}F_c(\alpha)=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_{V}&[A_0(\xi_i(\alpha),\dot{u}_i(\xi_i,\alpha),\dot{e}_{ij}(\xi_i,\alpha))\\&-\dot{K}(\xi_i(\alpha),\dot{u}_i(\xi_i,\alpha),\dot{u}(\xi_i,\alpha))\\&-(\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha)\dot{u}_i(\xi_i,\alpha))_{,j}]\,|J|\,\mathrm{d}v\Big\}\mathrm{d}t\end{aligned} \qquad (8.285)$$

(2) 能量泛函的二阶变分

能量泛函(8.285)式的二阶变分为

$$\begin{aligned}\delta^2F_c=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_{V}\Big[&\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(A_0-\dot{K}-(\sigma_{ij}\dot{u}_i)_{,j})\,|J|\\&+2\frac{\partial}{\partial\alpha}(A_0-\dot{K}-(\sigma_{ij}\dot{u}_i)_{,j})\frac{\partial}{\partial\alpha}|J|\end{aligned}$$

$$+(A_0-\dot{K}-(\sigma_{ij}\dot{u}_i)_{,j})\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}|J|\Big]_{\alpha=0}\mathrm{d}v\Big\}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_V[(\bar{\bar{\delta}}^2A_0+2A_0\varepsilon_2)$$

$$-(\bar{\bar{\delta}}^2\dot{K}+2\dot{K}\varepsilon_2)-(\bar{\bar{\delta}}^2(\sigma_{ij}\dot{u}_i)_{,j}$$

$$+2(\sigma_{ij}\dot{u}_i)_{,j}\varepsilon_2)]\mathrm{d}v\Big\}\mathrm{d}t \tag{8.286}$$

在待解函数满足一阶变分为零的条件下，若令能量泛函的二阶变分(8.286) 式等于零，则有

$$\delta^2F_c=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\iiint_V[A_{bc}-K_{bc}-K-P_{bc}]\mathrm{d}v\Big\}\mathrm{d}t=0 \tag{8.287}$$

若上式成立，可得

$$A_{bc}-K_{bc}-K_t-P_{bc}=0 \tag{8.288}$$

其中

$$A_{bc}=\frac{1}{2\varepsilon_2}\bar{\bar{\delta}}^2A_0+A_0 \tag{8.289}$$

$$K_{bc}=\frac{1}{2\varepsilon_2}\bar{\bar{\delta}}^2\dot{K} \tag{8.290}$$

$$P_{bc}=\frac{1}{2\varepsilon_2}\bar{\bar{\delta}}^2(\sigma_{ij}\dot{u}_i)_{,j}+(\sigma_{ij}\dot{u}_i)_{,j} \tag{8.291}$$

$$K_t=\dot{K}=\rho u_i\dot{u}_i \tag{8.292}$$

将(8.292) 式代入(8.288) 式，则得

$$\rho u_i\dot{u}_i=A_{bc}-K_{bc}-P_{bc}$$

所以

$$\dot{u}_i=\frac{1}{\rho u_i}(A_{bc}-K_{bc}-P_{bc}) \tag{8.293}$$

$\dot{u}_i$为裂纹尖端处的临界速度。已知

$$\dot{u}_i=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

故

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}L}{\dot{u}_i}$$

所以

$$T_c=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t=\int_{L_1}^{L_2}\frac{\mathrm{d}L}{\dot{u}_i} \tag{8.294}$$

将(8.293)式代入(8.294)式，则得

$$T_c=\int_{L_1}^{L_2}\frac{\mathrm{d}L}{\left[\frac{1}{\rho\dot{u}_i}(A_{bc}-K_{bc}-P_{bc})\right]} \tag{8.295}$$

若取

$$(\mathrm{d}L)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2=(\mathrm{d}u_1)^2+(\mathrm{d}u_2)^2+(\mathrm{d}u_3)^2$$

则有

$$\mathrm{d}L=\left[1+\left(\frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial u_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u_1 \tag{8.296}$$

将(8.296)式代入(8.295)式中，则得

$$T_c=\int_{u_0}^{u_c}\frac{\left[1+\left(\frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial u_1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u_1}{\left[\frac{1}{\rho\dot{u}_i}(A_{bc}-K_{bc}-P_{bc})\right]} \tag{8.297}$$

方程(8.295)式与(8.297)式为裂纹扩展时结构（或构件）的寿命计算公式Ⅰ。

5. 疲劳裂纹扩展寿命计算公式

对于疲劳裂纹扩展中的结构（或构件）的寿命计算公式为

$$N_c=T_cN_0\leqslant N_n$$

其中 T_c 为上述公式中求得的寿命值；N_0 为单位时间内的循环次数；N_n 为极限循环次数。

§8.6 结 论

利用变分问题描述断裂力学方面的裂纹扩展问题，是一个可动边界的变分问题。

基于可动边界的能量泛函的变分，可求得裂纹扩展时能量泛函的释放量（率）。

基于能量泛函的一阶变分与二阶变分，可求得裂纹扩展的稳定性条件和临界条件。

在能量泛函的一阶变分与二阶变分为零的条件下，可求得裂纹扩展时，结构（或构件）的寿命估算公式。

参 考 文 献

1 斯米尔诺夫 B И. 高等数学教程（第四卷第一分册）. 北京：高等教育出版社，1958

2 钱伟长著. 变分法及有限元(上册). 北京：科学出版社，1980

3 柯朗 R，希伯尔特 D；钱敏，郭敦仁译. 数学物理方法（I）. 北京：科学出版社，1958

4 牛庠均. 固体的离散型变分原理——有限元离散分析的变分原理. 北京：应用数学与力学，1981，2(5)

5 Niu Xiang jun. The Boundary Integral—Variational Thorems of an Arbitrary Element in the Solid——Compute the Energy Release Rate of an Arbitrary Crack Extension. Applied Mathematics and Mechanics, 1984, 5(1)

6 牛庠均. 裂纹扩展的稳定性分析(一). 北京工业大学学报，1991，17(2)

7 牛庠均. 裂纹扩展的稳定性分析(二). 北京工业大学学报，1991，17(2)

8 牛庠均. 裂纹扩展的寿命估算方法. 北京工业大学学报, 1991, (2)
9 Niu Xiang jun, Dynamical Fracture Criterions for the Nonlinear Solid, ICFFM, Shang hai, 1987
10. 欧阳鬯, 弹性·塑性·有限元, 长沙: 湖南科学出版社, 1983

第九章　模糊因子加权变分原理

§9.1　概　述

9.1.1　问题的提出

在工程结构数值分析过程中，人们最关心的问题是解的误差估计，为求出不断改进解的精度的有效方法，逐渐形成了自适应有限元法与边界元法[1~4]。

数值分析过程中的误差可分为离散误差、舍入误差与数学模型误差。当代国内外科学家研究的重点是改进离散误差。而本章的目的是提供一种新的数学模型，以企在数值分析过程中，通过不断改进数学模型提高解的精度，以取得理想的逼近值。实际上，各种杂交元法就是为提高精度，改进数学模型，而产生的一种有成效的方法[5]。不过，在各种杂交元法的数值分析过程中，数学模型一经确定，在数值分析过程中，这种模式就是不变的了。

9.1.2　解的近似性

在工程结构问题的求解过程中，由于多种因素使解具有近似性，也可以说，解的模糊性（这里是否为模糊数学中严格定义的模糊性变不重要）形成解的近似集合（或叫解的模糊集合）。这里采用模糊数学中有关从属函数的概念、思路和方法，建立模糊因子加权变分原理，以达到提高解的精度的目的[6]。

9.1.3 变分法中的对偶原理[7]

变分法中的对偶原理是指一个物理（工程）问题可用不同形式的两个变分问题来描述。在这两个变分问题中的变分约束条件与变分条件是相对应的互逆变换的结果，其真实解是相同的，但近似解不一定相同。如弹性力学中的最小势能原理与最小余能原理就是一对偶原理，但其近似解是从不同的方面逼近真实解的。这里，关键是利用变分约束条件与变分条件互逆变换的方法，通过改进数学模型，以达到在数值分析过程中提高解的精度的目的。

9.1.4 模糊因子加权变分原理的泛函的构造

利用模糊数学中有关从属函数和变分数学的概念、思路和方法，构造模糊因子加权变分原理中的泛函，并适当的选取模糊因子，以达到提高解的精度的目的。

定义1： 一个物理（工程）问题用不同的能量泛函的变分问题来描述，选取从势能函数出发建立的能量泛函μ_i与从余能函数出发建立的能量泛函U_i构造模糊因子加权变分原理中的泛函。

定义2： 选取模糊数学中的从属函数为模糊因子α，$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值。在数值计算过程中可由计算的中间结果反馈，通过人机对话随时调整α值，以得到解的理想逼近值。

定义3： 选取互补模糊因子为

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\alpha(x_i)\\ \alpha_2&=1-\alpha(x_i)\end{aligned}\right\}\tag{9.1}$$

定义4： 模糊因子加权变分原理的泛函为

$$W_i=\alpha\mu_i+(1-\alpha)U_i\tag{9.2}$$

当$\alpha=1$时，方程(9.2)式变为

$$W_i=\mu_i\tag{9.3}$$

当$\alpha=0$时，方程(9.2)式变为

$$W_i = U_i \tag{9.4}$$

其中

$$W_i \Rightarrow W_1,\ W_2,\ \cdots,\ W_n$$

在变分约束条件与变分条件为互逆变换的各种不同的匹配时，可以形成各种不同类型的模糊因子加权变分原理。

§9.2 弹性力学范畴的模糊因子加权变分原理

基于弹性力学的各类广义变分原理中的广义泛函，建立弹性力学范畴中的模糊因子加权变分原理[8]。

9.2.1 模糊因子加权变分原理Ⅰ

1. 加权泛函

令三类独立变量函数的势能广义泛函(4.18)式为

$$\begin{aligned}\mu_{e1} = \iiint_V \Big[& \left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \bar{F}_i u_i\right) \\ & - \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij} - a_{ijkl}\varepsilon_{kl}) - \frac{1}{2}(\sigma_{ij} + a_{ijkl}\varepsilon_{kl}) \\ & \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i}\right)\Big]\mathrm{d}v \\ & - \iint_{S_1} \bar{P}_i u_i \mathrm{d}s - \iint_{S_2} \frac{1}{2}(\sigma_{ij} + a_{ijkl}\varepsilon_{kl}) l_j (u_i - \bar{u}_i)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{9.5}$$

令三类独立变量函数的余能广义泛函(4.80)式为

$$\begin{aligned}U_{e1} = \iiint_V \Big[& -\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j} - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i}\right) \\ & - \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} - b_{ijkl}\sigma_{kl}) - u_i\left((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j} + \bar{F}_i\right)\Big]\mathrm{d}v\end{aligned}$$

$$+\iint_{S}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}s+\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{9.6}$$

于是加权泛函为

$$W_{e1}=\alpha\mu_{e_1}+(1-\alpha)U_{e1} \tag{9.7}$$

2．加权变分原理 I

若σ_{ij}，ε_{ij}，u_i均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当选取α值，使泛函(9.7)式实现驻值条件的σ_{ij}，ε_{ij}，u_i为弹性力学问题的理想逼近值。

若$\alpha=1$时，则加权变分原理退化为势能广义变分原理；若$\alpha=0$时，则加权变分原理退化为余能广义变分原理。在数值求解过程中，适当调整α值，使解在加权意义下取得理想逼近值。

9.2.2 模糊因子加权变分原理II

1．加权泛函

当$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$时，则泛函(9.5)式变为

$$\mu_{e2}=\iiint_{V}\left[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_iu_i\right]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl})l_j(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}s \tag{9.8}$$

当$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0$时，则泛函(9.6)式变为

$$U_{e2}=\iiint_{V}\left[\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\right]\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}s+\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{9.9}$$

于是加权泛函为

$$W_{e2}=\alpha\mu_{e2}+(1-\alpha)U_{e2} \tag{9.10}$$

2．加权变分原理Ⅰ

若σ_{ij}，ε_{ij}，u_i均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当选取α值，使泛函(9.10)式实现驻值条件的σ_{ij}，ε_{ij}，u_i为弹性力学问题的理想逼近值。

在此原理中，μ_{e2}的变分约束条件为应变位移关系式；变分条件为平衡方程、应力应变关系式，以及全部边界条件。U_{e2}的变分约束条件为平衡方程；变分条件为应力应变关系式、应变位移关系式，以及全部边界条件。所以，应变位移关系式与平衡方程为μ_{e2}与U_{e2}互逆变换的结果。

9.2.3 模糊因子加权变分原理III

1．加权泛函

当$0.5(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0$时，则泛函(9.5)式变为

$$\mu_{e3}=\iiint_V-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\left[\bar{P}_i-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\right]u_i\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_2}\left[\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\right]\bar{u}_i\mathrm{d}s \tag{9.11}$$

当$b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij}=0$时，用$\sigma_{ij}$表示$\varepsilon_{ij}$，则泛函(9.6)式变为

$$U_{e3}=\iiint_V\left[-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-u_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\right]\mathrm{d}v$$

$$+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}s+\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{9.12}$$

于是加权泛函为

$$W_{e3}=\alpha\mu_{e3}+(1-\alpha)U_{e3} \tag{9.13}$$

2．加权变分原理Ⅰ

若σ_{ij}，ε_{ij}，u_i均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可

连续取值，适当调整α的值，使泛函(9.13)式实现驻值条件的σ_{ij}，ε_{ij}，u_i为弹性力学问题的理想逼近值。

在此原理中，μ_{e3}的变分约束条件为平衡方程；变分条件为应变位移关系式、应力应变关系式，以及全部边界条件。U_{e3}的一般约束条件为应力应变关系式；变分条件为平衡方程、应变位移关系式，以及全部边界条件。所以，平衡方程与应力应变关系式为μ_{e3}与U_{e3}的互逆变换的结果。

9.2.4 模糊因子加权变分原理Ⅳ

1. 加权泛函

当$a_{ijkl}\varepsilon_{kl}-\sigma_{ij}=0$时，并用$\varepsilon_{ij}$表示$\sigma_{ij}$，则泛函(9.5)式变为

$$\begin{aligned}\mu_{e4}=&\iiint_V\Big[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_iu_i\\&-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\Big]\mathrm{d}v\\&-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j(u_i-\bar{u}_i)\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{9.14}$$

当$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$时，用$\varepsilon_{ij}$表示$u_{i,j}$，则泛函(9.6)式变为

$$\begin{aligned}U_{e4}=&\iiint_V\Big[\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\\&-u_i((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i)\Big]\mathrm{d}v\\&+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\mathrm{d}s+\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{9.15}$$

于是加权泛函为

$$W_{e4}=\alpha\mu_{e4}+(1-\alpha)U_{e4} \tag{9.16}$$

2．加权变分原理Ⅳ

若σ_{ij}，ε_{ij}，u_i均为独立变量函数，且 $\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当调整α的值，使泛函(9.16)式实现驻值条件的σ_{ij}，ε_{ij}，u_i为弹性力学问题的理想逼近值。

在此原理中，μ_{e4}的一般约束条件为应力应变关系式；变分条件为平衡方程、应变位移关系式，以及全部边界条件。U_{e4}的变分约束条件为应变位移关系式；变分条件为平衡方程、应力应变关系式，以及全部边界条件。所以，应力应变关系式与应变位移关系式为μ_{e4}与U_{e4}的互逆变换的结果。

9.2.5 模糊因子加权变分原理Ⅴ

1．加权泛函

当$\varepsilon_{ij}-\dfrac{1}{2}u_{i,j}-\dfrac{1}{2}u_{j,i}=0$，$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0$，$\bar{u}_i-u_i=0$，

并用ε_{ij}表示σ_{ij}时，则泛函(9.5)变为

$$\mu_{e5}=\iiint\limits_V\left[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\bar{F}_iu_i\right]\mathrm{d}v-\iint\limits_{S_t}\bar{P}_iu_i\mathrm{d}s \tag{9.17}$$

当$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\bar{F}_i=0$，$\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$，$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0$时，则泛函(9.6)式变为

$$U_{e5}=\iiint\limits_V-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\mathrm{d}v+\iint\limits_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{9.18}$$

于是加权泛函为

$$W_{e5}=\alpha\mu_{e5}+(1-\alpha)U_{e5} \tag{9.19}$$

2．加权变分原理Ⅴ

若σ_{ij}与u_i为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当调整α值，使泛函(9.19)式实现驻值条件的σ_{ij}与u_i为弹性力学问题的理想逼近值。

这是由最小势能原理的泛函与最小余能原理的泛函为基础而形成的加权变分原理。

§9.3 有限变形弹性力学范畴的模糊因子加权变分原理

基于有限变形弹性力学中的各类广义变分原理中的广义泛函，建立有限变形弹性力学范畴中的模糊因子加权变分原理。

9.3.1 模糊因子加权变分原理I

1. 加权泛函

三类独立变量函数的势能广义泛函(4.137)式为

$$\begin{aligned}\mu_{n1}=&\iiint_V\Big[\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}-\overline{F}_iu_i\Big)\\&-\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big)\Big(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Big)\\&-\frac{1}{2}e_{ij}\Big(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big)\Big]dv\\&-\iint_{S_1}\overline{P}_iu_ids-\iint_{S_1}\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big)(\delta_{ki}\\&+u_{k,i})l_j(u_k-\overline{u}_k)ds\end{aligned}\tag{9.20}$$

式中$A(e_{ij})$为(1.26)式。

令三类独立变量函数的余能广义泛函(4.202)式为

$$
\begin{aligned}
U_{n1}= & \iiint_V \Big[\frac{1}{2}\sigma_{ij}\Big(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Big) \\
& +\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\Big(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j} \\
& -\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\Big)+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\Big(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}\Big) \\
& +u_k\Big(\Big(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\Big)_{,j}+\bar{F}_k\Big)\Big]\mathrm{d}v \\
& -\iint_{S_1}\Big[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k\Big]u_k\mathrm{d}s \\
& -\iint_{S_2}\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\bar{u}_k)\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{9.21}
$$

式中$A(e_{ij})$为(1.26)式；$B(\sigma_{ij})$为(1.29)式。

于是加权泛函为

$$
W_{n1}=\alpha\mu_{n1}+(1-\alpha)U_{n1} \tag{9.22}
$$

2. 加权变分原理 I

若σ_{ij}，e_{ij}，u_i均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当选取α值，使泛函(9.22)式实现驻值条件的σ_{ij}，e_{ij}，u_i为有限变形弹性力学问题的理想逼近值。

若$\alpha=1$时，则加权变分原理退化为有限变形弹性力学的势能广义变分原理；若$\alpha=0$时，则加权变分原理退化为有限变形弹性力学的余能广义变分原理。

9.3.2 模糊因子加权变分原理II

1. 加权泛函

当$e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}=0$时，则泛函(9.20)式变为

$$\mu_{n2}=\iiint\limits_V[A(e_{ij})-\bar{F}_k u_k]\mathrm{d}v-\iint\limits_{S_1}\bar{P}_i u_i\mathrm{d}s$$

$$-\iint\limits_{S_2}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(u_k-\bar{u}_k)\mathrm{d}s \tag{9.23}$$

当$\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k=0$时，则泛函(9.21)式变为

$$U_{n2}=\iiint\limits_V\left[-B(\sigma_{ij})+\sigma_{ij}e_{ij}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\right]\mathrm{d}v$$

$$-\iint\limits_{S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]u_k\mathrm{d}s$$

$$-\iint\limits_{S_2}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\bar{u}_k)\mathrm{d}s \tag{9.24}$$

于是加权泛函为

$$W_{n2}=\alpha\mu_{n2}+(1-\alpha)U_{n2} \tag{9.25}$$

2. 加权变分原理Ⅱ

若σ_{ij}，e_{ij}，u_i均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当选取α值，使泛函(9.25)式实现驻值条件的σ_{ij}，e_{ij}，u_i为有限变形弹性力学问题的理想逼近值。

在此原理中，μ_{n2}的变分约束条件为应变位移关系式；变分条件为应力应变关系式、平衡方程以及全部边界条件。U_{n2}的变分约束条件为平衡方程；变分条件为应力应变关系式、应变位移关系式以及全部边界条件。所以，应变位移关系式与平衡方程为μ_{n2}与U_{n2}互逆变换的结果。

9.3.3 模糊因子加权变分原理III

1. 加权泛函

当

$$\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\overline{F}_k=0$$

时，则泛函(9.20)式变为

$$\mu_{n3}=\iiint_V\left[-\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)\left(\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}\left[\overline{P}_k-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right]u_k ds$$

$$+\iint_{S_2}\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\bar{u}_i)\right]ds$$

(9.26)

当

$$e_{ij}-\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}=0$$

时，用σ_{ij}代替ε_{ij}，则泛函(9.21)变为

$$U_{n3}=\iiint_V\left[B(\sigma_{ij})+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}\right.$$

$$\left.+u_i((\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i}))_{,j}+\overline{F}_k)\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\overline{P}_k]u_k ds$$

$$-\iint_{S_2}\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(\bar{u}_k)ds \tag{9.27}$$

于是加权泛函为

$$W_{n3}=\alpha\mu_{n3}+(1-\alpha)U_{n3} \tag{9.28}$$

2. 加权变分原理Ⅲ

若σ_{ij}，e_{ij}，u_i均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可

连续取值，适当调整α值，使泛函(9.28)式实现驻值条件的σ_{ij}，e_{ij}，u_i为有限变形弹性力学问题的理想逼近值。

在此原理中，μ_{n3}的变分约束条件为平衡方程；变分条件为应力应变关系式、应变位移关系式以及全部边界条件。U_{n3}的一般约束条件为应力应变关系式；变分条件为平衡方程、应变位移关系式以及全部边界条件。所以，平衡方程与应力应变关系式为μ_{n3}与U_{n3}的互逆变换的结果。

9.3.4 模糊因子加权变分原理IV

1. 加权泛函

当

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}=0$$

时，用e_{ij}表示σ_{ij}，则泛函(9.20)式变为

$$\begin{aligned}\mu_{n4}=&\iiint_V\Big[\left(A(e_{ij})-\bar{F}_k u_k\right)\\&-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\Big]\mathrm{d}v\\&-\iint_{S_1}\bar{P}_i u_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j(u_k-\bar{u}_k)\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{9.29}$$

当

$$e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}=0$$

时，用u_i表示e_{ij}，则泛函(9.21)式变为

$$\begin{aligned}U_{n4}=&\iiint_V\Big(-B(\sigma_{ij})+\sigma_{ij}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\\&+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}+u_k\left(\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k\right)\Big]\mathrm{d}v\end{aligned}$$

$$-\iint_{S_1}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k]u_k\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_2}[\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})\,l_i\,\bar{u}_k\mathrm{d}s \tag{9.30}$$

于是加权泛函为

$$W_{n4}=\alpha\mu_{n4}+(1-\alpha)U_{n4} \tag{9.31}$$

2. 加权变分原理Ⅳ

若σ_{ij}，e_{ij}，u_i均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当选取α值，使泛函(9.31)式实现驻值条件的σ_{ij}，e_{ij}，u_i为有限变形弹性力学问题的理想逼近值。

在此原理中，μ_{n4}的一般约束条件为应力应变关系式；变分条件为平衡方程、应变位移关系式以及全部边界条件。U_{n4}的一般约束条件为应变位移关系式；变分条件为平衡方程、应力应变关系式以及全部边界条件。所以，应力应变关系式与应变位移关系式为μ_{n4}与U_{n4}的互逆变换的结果。

9.3.5 模糊因子加权变分原理Ⅴ

当

$$e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}=0$$

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=0$$

$$u_i-\bar{u}_i=0$$

时，用e_{ij}表示σ_{ij}，则泛函(9.20)式变为

$$\mu_{n5}=\iiint_V[A(e_{ij})-\bar{F}_ku_k]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_ku_k\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j\right](u_k-\bar{u}_k)\mathrm{d}s$$

$$(9.32)$$

当

$$e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=0,$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki}+u_{k,i})\right)_{,j}+\bar{F}_k=0,$$

$$\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j-\bar{P}_k=0$$

时，并e_{ij}用σ_{ij}表示，则泛函(9.21)式变为

$$U_{n5}=\iiint_V\left[B(\sigma_{ij})+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}\right]dv$$
$$-\iint_{S_2}[(\bar{u}_k)\sigma_{ij}(\delta_{ki}+u_{k,i})l_j]ds \qquad (9.33)$$

于是加权泛函变为

$$W_{n5}=\alpha\mu_{n5}+(1-\alpha)U_{n5} \qquad (9.34)$$

2．加权变分原理Ⅴ

若σ_{ij}与u_i为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当调整α值，使泛函(9.21)式实现驻值条件的σ_{ij}与u_i为有限变形弹性力学问题的理想逼近值。

§9.4　塑性形变理论范畴的模糊因子加权变分原理

基于塑性形变理论的各类广义变分原理的广义泛函，构造塑性形变理论范畴的模糊因子加权变分原理。

9.4.1　模糊因子加权变分原理Ⅰ

1．加权泛函

令三类独立变量函数的势能广义泛函(4.271)式为

$$\mu_{d1}=\iiint_V\Big[\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\bar{F}_iu_i\Big)-\frac{1}{2}\Big(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)$$

$$\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\Big(\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)\Big]dv$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_i ds-\iint_{S_2}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j(u_i-\bar{u}_i)ds \tag{9.35}$$

令三类独立变量函数的余能广义泛函(4.316)式为

$$U_{d1}=\iiint_V\Big[\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)$$

$$+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\Big)+u_i\Big(\Big(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\Big)_{,j}+\bar{F}_i\Big)\Big]dv$$

$$-\iint_{S_1}\Big(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i\Big)u_i ds+\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j ds \tag{9.36}$$

于是加权泛函为

$$W_{d1}=\alpha\mu_{d1}+(1-\alpha)U_{d1} \tag{9.37}$$

式中$A(\varepsilon_{ij})$为(4.242)式，$B(\sigma_{ij})$为(4.243)式。

2. 加权变分原理I

若σ_{ij}，ε_{ij}，u_i均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当选取α值，使泛函(9.37)式实现驻值条件的σ_{ij}，ε_{ij}，u_i为塑性形变理论问题的理想逼近值。

若$\alpha=1$时，则加权变分原理退化为势能广义变分原理；若$\alpha=0$时，则加权变分原理退化为余能广义变分原理。在数值求解过程中，适当调整α值，使解在加权意义下取得理想逼近值。

9.4.2 模糊因子加权变分原理II

1. 加权泛函

当

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$$

时，则泛函(9.35)式变为

$$\mu_{d2}=\iiint_V[A(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_iu_i]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_ids$$

$$-\iint_{S_1}\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)l_j(u_i-\bar{u}_i)ds \qquad (9.38)$$

当

$$\left(\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0$$

时，则泛函(9.36)式变为

$$U_{d2}=\iiint_V[-B(\sigma_{ij})+\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}]dv$$

$$-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_ids-\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_jds \qquad (9.39)$$

于是加权泛函为

$$W_{d2}=\alpha\mu_{d2}+(1-\alpha)U_{d2} \qquad (9.40)$$

2．加权变分原理Ⅱ

若σ_{ij}，ε_{ij}，u_i均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当选取α的值，使泛函(9.40)式实现驻值条件的σ_{ij}，ε_{ij}，u_i为塑性形变理论问题的理想逼近值。

在此原理中，μ_{d2}的变分约束条件为应变位移关系式；变分条件为平衡方程、应力应变关系式，以及全部边界条件。U_{d2}的变分约束条件为平衡方程；变分条件为应力应变关系式、应变位移关系式，以及全部边界条件。所以，应变位移关系式与平衡方程为μ_{d2}与U_{d2}的互逆变换的结果。

9.4.3 模糊因子加权变分原理III

1. 加权泛函

当

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0$$

时，则泛函(9.35)式变为

$$\mu_{d3}=\iiint_V -\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv-\iint_{S_1}\left[\bar{P}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right]u_i ds$$

$$-\iint_{S_2}\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)l_j\right]\bar{u}_i ds \tag{9.41}$$

当

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}-\varepsilon_{ij}=0$$

时，并用σ_{ij}代替ε_{ij}，则泛函(9.36)式变为

$$U_{d3}=\iiint_V\left[B\left(\sigma_{ij}\right)+u_i\left(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i\right)\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}\left(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i\right)u_i ds-\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j ds \tag{9.42}$$

于是加权泛函为

$$W_{d3}=\alpha\mu_{d3}+(1-\alpha)U_{d3} \tag{9.43}$$

2. 加权变分原理Ⅲ

若σ_{ij}，ε_{ij}，u_i均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当调整α的值，使泛函(9.43)式实现驻值条件的σ_{ij}，ε_{ij}，u_i为塑性形变理论问题的理想逼近值。

9.4.4 模糊因子加权变分原理IV

1. 加权泛函

当

$$\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}-\sigma_{ij}=0$$

时，并用ε_{ij}代替σ_{ij}，则泛函(9.35)式变为

$$\mu_{d4}=\iiint_V\left[\left(A(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_i u_i\right)-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_i u_i ds-\iint_{S_2}\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}l_j(u_i-\bar{u}_i)ds \tag{9.44}$$

当

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$$

时，并用ε_{ij}代替$u_{i,j}$，则泛函(9.36)式变为

$$U_{d4}=\iiint_V\left[-B(\sigma_{ij})+\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+u_i\left(\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i\right)\right]dv-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i ds-\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j ds \tag{9.45}$$

于是加权泛函为

$$W_{d4}=\alpha\mu_{d4}+(1-\alpha)U_{d4} \tag{9.46}$$

2. 加权变分原理Ⅳ

若σ_{ij}，ε_{ij}，u_i均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当调整α值，使泛函(9.46)式实现驻值条件的σ_{ij}，ε_{ij}，u_i为塑性形变理论问题的理想逼近值。

在此原理中μ_{d4}的变分约束条件为应力应变关系式；变分条件为平衡方程、应变位移关系式，以及全部边界条件。U_{d4}的变分约束条件为应变位移关系式；变分条件为平衡方程、应力应变关系式，以及全部边界条件。所以，应力应变关系式与应变位移关系式为μ_{d4}与U_{d4}的互逆变换的结果。

9.4.5 模糊因子加权变分原理V

1. 加权泛函

当

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$$

$$\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}=0$$

$$\bar{u}_i-u_i=0$$

时，并用ε_{ij}表示σ_{ij}时，则泛函(9.35)式变为

$$\mu_{d5}=\iiint_V\left[A(\varepsilon_{ij})-\bar{F}_iu_i\right]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_iu_ids \qquad (9.47)$$

当

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{,j}+\bar{F}_i=0$$

$$\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=0,$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0$$

时，并用σ_{ij}表示ε_{ij}则泛函(9.36)式变为

$$U_{d5}=\iiint_V B(\sigma_{ij})dv-\iint_{S_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_jds \qquad (9.48)$$

于是加权泛函为

$$W_{d5}=\alpha\mu_{d5}+(1-\alpha)U_{d5} \qquad (9.49)$$

2. 加权变分原理V

若σ_{ij}，ε_{ij}与u_i为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当选取α值，使泛函(9.49)式实现驻值条件的σ_{ij}，ε_{ij}与u_i为塑性形变理论问题的理想逼近值。

§9.5 塑性流动理论范畴的模糊因子加权变分原理

基于塑性流动理论中的各类广义变分原理中的广义泛函，建立塑性流动理论范畴中的模糊因子加权变分原理。

9.5.1 模糊因子加权变分原理Ⅰ

1. 加权泛函

令三类独立变量函数的势能广义泛函(4.375)式为

$$\mu_{p1}=\iiint_V\left[\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\right.$$

$$\cdot\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)$$

$$\left.-\frac{1}{2}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)\right]\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\mathrm{d}\bar{P}_i\mathrm{d}u_i\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_2}\frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)l_j\left(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i\right)\mathrm{d}s \tag{9.50}$$

式中$A(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})$为(4.355)式。

令三类独立变量函数的余能广义泛函(4.433)式为

$$U_{p1}=\iiint_V\left[\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}u_{i,j}+\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{d}\sigma_{ij}\left(\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B}{\partial(\mathrm{d}\sigma_{ij})}\right)$$

$$\left.+\mathrm{d}u_i\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\right]\mathrm{d}v-\iint_{S_1}\left(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}\bar{P}_i\right)\mathrm{d}u_i\mathrm{d}s$$

$$-\iint_{S_2} d\bar{u}_i d\sigma_{ij} l_j ds \qquad (9.51)$$

式中$A(d\varepsilon_{ij})$为(4.355)式；$B(d\sigma_{ij})$为(4.356)式。

于是加权泛函为

$$W_{p1}=\alpha\mu_{p1}+(1-\alpha)U_{p1} \qquad (9.52)$$

2. 加权变分原理I

若$d\sigma_{ij}$，$d\varepsilon_{ij}$，du_i均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当选取α值，使泛函(9.52)式实现驻值条件的$d\sigma_{ij}$，$d\varepsilon_{ij}$，du_i为塑性流动理论问题的理想逼近值。

若$\alpha=1$时，于是加权变分原理退化为塑性流动理论的势能广义变分原理；若$\alpha=0$时，于是加权变分原理退化为塑性流动理论问题的余能广义变分原理。

9.5.2 模糊因子加权变分原理II

1. 加权泛函

当

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}-\frac{1}{2}du_{j,i}=0$$

时，则泛函(9.50)式变为

$$\mu_{p2}=\iiint_V A\,(d\varepsilon_{ij})dv-\iint_{S_1} d\bar{P}_i du_i ds$$

$$-\iint_{S_2}\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\,(du_i-d\bar{u}_i)ds \qquad (9.53)$$

当

$$\left(\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0$$

时，则泛函(9.51)式变为

$$U_{p2}=\iiint_V\left[-B\,(d\sigma_{ij})+d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}\left(d\sigma_{ij}l_j-d\overline{P}_i\right)du_i ds-\iint_{S_1}d\overline{u}_i d\sigma_{ij}l_j ds$$

(9.54)

于是加权泛函为

$$W_{p2}=\alpha\mu_{p2}+(1-\alpha)U_{p2} \qquad (9.55)$$

2. 加权变分原理II

若$d\sigma_{ij}$，$d\varepsilon_{ij}$，du_i均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当选取α值，使泛函(9.55)式实现驻值条件的$d\sigma_{ij}$，$d\varepsilon_{ij}$，du_i为塑性流动理论问题的理想逼近值。

在此原理中，μ_{p2}的变分约束条件为应变位移关系式；变分条件为平衡方程、应力应变关系式，以及全部边界条件。U_{p2}的变分约束条件为平衡方程；变分条件为应力应变关系式、应变位移关系式，以及全部边界条件。所以，应变位移关系式与平衡方程为μ_{p2}与U_{p2}的互逆变换的结果。

9.5.3 模糊因子加权变分原理III

1. 加权泛函

当

$$\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}=0$$

时，则泛函(9.50)式变为

$$\mu_{p3}=\iiint_V-\frac{1}{2}d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}dv-\iint_{S_1}\left[d\overline{P}_i\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\right]du_i ds$$

$$-\iint_{S_2}\frac{1}{2}\left(d\sigma_{ij}+\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\right)l_j\,d\overline{u}_i\Big)ds \qquad (9.56)$$

当

$$d\varepsilon_{ij}-\frac{\partial B(d\sigma_{ij})}{\partial(d\sigma_{ij})}=0$$

时，并用$d\sigma_{ij}$代替$d\varepsilon_{ij}$，则泛函(9.51)式变为

$$U_{p3}=\iiint_V[B\ (d\sigma_{ij})+du_i(d\sigma_{ij,j})]dv$$
$$-\iint_{S_1}(d\sigma_{ij}l_j-d\bar{P}_i)du_ids-\iint_{S_2}d\bar{u}_id\sigma_{ij}l_jds \qquad (9.57)$$

于是加权泛函为

$$W_{p3}=\alpha\mu_{p3}+(1-\alpha)U_{p3} \qquad (9.58)$$

2. 加权变分原理Ⅲ

若$d\sigma_{ij}$，$d\varepsilon_{ij}$，du_i均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当调整α值，使泛函(9.58)式实现驻值条件的$d\sigma_{ij}$，$d\varepsilon_{ij}$，du_i为塑性流动理论问题的理想逼近值。

在此原理中，μ_{p3}的变分约束条件为平衡方程；变分条件为应力应变关系式、应变位移关系式，以及全部边界条件。U_{p3}的一般约束条件为应力应变关系式；变分条件为平衡方程、应变位移关系式，以及全部边界条件。所以，平衡方程与应力应变关系式为μ_{p3}与U_{p3}的互逆变换的结果。

9.5.4 模糊因子加权变分原理Ⅳ

1. 加权泛函

当

$$\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}-d\sigma_{ij}=0$$

时，并用$d\varepsilon_{ij}$代替$d\sigma_{ij}$，则泛函(9.50)式变为

$$\mu_{p4}=\iiint_V\left[A\ (d\varepsilon_{ij})-\frac{\partial A}{\partial(d\varepsilon_{ij})}\left(d\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}du_{i,j}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}du_{j,i}\right)\right]dv-\iint_{S_1}d\bar{P}_idu_ids$$

$$-\iint_{s_2} \frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})} l_j(\mathrm{d}u_i-\mathrm{d}\bar{u}_i)\mathrm{d}s \qquad (9.59)$$

当

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}=0$$

时，用$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$表示$\mathrm{d}u_{i,j}$，则泛函(9.51)式变为

$$U_{p4}=\iiint_V\left[-B(\mathrm{d}\sigma_{ij})+\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}+\mathrm{d}u_i\left(\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}\right)_{,j}\right]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{s_1}(\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j-\mathrm{d}P_i)\mathrm{d}u_i\mathrm{d}s-\iint_{s_2}\mathrm{d}\bar{u}_i\mathrm{d}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \qquad (9.60)$$

于是加权泛函为

$$W_{p4}=\alpha\mu_{p4}+(1-\alpha)U_{p4} \qquad (9.61)$$

2. 加权变分原理Ⅳ

若$\mathrm{d}\sigma_{ij}$，$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$，$\mathrm{d}u_i$均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当调整$\alpha$值，使泛函(9.61)式实现驻值条件的$\mathrm{d}\sigma_{ij}$，$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$，$\mathrm{d}u_i$为塑性流动理论问题的理想逼近值。

在此原理中，μ_{p4}的一般约束条件为应力应变关系式；变分条件为平衡方程、应变位移关系式，以及全部边界条件。U_{p4}的变分约束条件为应变位移关系式，变分条件为平衡方程、应力应变关系式，以及全部边界条件。所以，应力应变关系式与应变位移关系式为μ_{p2}与U_{p2}的互逆变换的结果。

9.5.5 模糊因子加权变分原理Ⅴ

1. 加权泛函

当

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{i,j}-\frac{1}{2}\mathrm{d}u_{j,i}=0$$

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}-\frac{\partial A}{\partial(\mathrm{d}\varepsilon_{ij})}=0$$

$$du_i - d\bar{u}_i = 0$$

时，并用$d\varepsilon_{ij}$表示$d\sigma_{ij}$时，则泛函(9.50)式变为

$$\mu_{p5} = \iiint_V A(d\varepsilon_{ij})dv - \iint_{S_1} d\bar{P}_i du_i ds \qquad (9.62)$$

当

$$d\sigma_{ij,j} = 0$$

$$d\varepsilon_{ij} - \frac{\partial B}{\partial(d\sigma_{ij})} = 0$$

$$d\sigma_{ij} l_j - d\bar{P}_i = 0$$

时，并用$d\sigma_{ij}$表示$d\varepsilon_{ij}$则泛函(9.51)式变为

$$U_{p5} = \iiint_V B(d\sigma_{ij})dv - \iint_{S_2} d\bar{u}_i d\sigma_{ij} l_j ds \qquad (9.63)$$

于是加权泛函为

$$W_{p5} = \alpha\mu_{p5} + (1-\alpha)U_{p5} \qquad (9.64)$$

2. 加权变分原理V

若$d\sigma_{ij}$与du_i为独立变量函数，且 $\alpha \in [0,1]$，在此区间可连续取值，适当调整α值，使泛函(9.64)式实现驻值条件的 $d\sigma_{ij}$与du_i为塑性流动理论问题的理想逼近值。

这一节中的四类方程皆为函数的增量关系，在论述过程中为了方便，把增量二字省去。

§9.6 蠕变理论范畴的模糊因子加权变分原理

基于蠕变流动理论中的各类广义变分原理中的广义泛函，建立蠕变流动理论范畴中的模糊因子加权变分原理。

9.6.1 模糊因子加权变分原理I

1. 加权泛函

令三类独立变量函数的势能广义泛函(4.490)式为

$$
\begin{aligned}
\mu_{c1}=\iiint_V\Big[&\left(\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\right)\\
&-\frac{1}{1+\mu}(\sigma'_{ij}+\mu 2g(H)\dot{e}_{ij})\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right)\\
&-\frac{1}{1+\mu}\dot{e}_{ij}(\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij})\Big]dv-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i ds\\
&-\frac{1}{1+\mu}\iint_{S_2}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{e}_{ij})l_j(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)ds
\end{aligned}
\tag{9.65}
$$

令三类独立变量函数的余能广义泛函(4.548)式为

$$
\begin{aligned}
U_{c1}=\iiint_V\Big[&\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\dot{u}_{i,j}+\frac{1}{1+m}\sigma'_{ij}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right)\\
&+\frac{1}{m(1+m)}\sigma'_{ij}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\right)\\
&+\dot{u}_i((2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i)\Big]dv\\
&-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_i\sigma_{ij}l_j ds
\end{aligned}
\tag{9.66}
$$

于是加权泛函为

$$
W_{c1}=\alpha\mu_{c1}+(1-\alpha)U_{c1}
\tag{9.67}
$$

2. 加权变分原理I

若σ'_{ij}，$\dot{e}_{ij}$，$\dot{u}_i$均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当选取α值，使泛函(9.67)式实现驻值条件的σ'_{ij}，$\dot{e}_{ij}$，$\dot{u}_i$为稳定蠕变流动理论问题的理想逼近值。

若$\alpha=1$时，则加权变分原理退化为势能广义变分原理；若

$\alpha=0$时，则加权变分原理退化为余能广义变分原理。在数值求解过程中，适当调整α值，使解在加权意义下取得理想逼近值。

9.6.2 模糊因子加权变分原理II

1. 加权泛函

当

$$\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0$$

时，则泛函(9.65)式变为

$$\mu_{c2}=\iiint_V\left(\frac{1}{1+\mu}2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\right)dv$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}$$

$$+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)ds \qquad (9.68)$$

当

$$(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i=0$$

时，则泛函(9.66)式变为

$$U_{c2}=\iiint_V\left[\frac{1}{m}\sigma'_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{m(1+m)}\cdot\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}\right]dv$$

$$-\iint_{S_1}\left(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i\right)\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_i\sigma_{ij}l_j ds \qquad (9.69)$$

于是加权泛函为

$$W_{c2}=\alpha\mu_{c2}+(1-\alpha)U_{c2} \qquad (9.70)$$

2. 加权变分原理 I

若σ'_{ij}，$\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\dot{u}_i$均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当选取α值，使泛函(9.70)式实现驻值条件的σ'_{ij}，$\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\dot{u}_i$为稳定蠕变流动理论问题的理想逼近值。

在此原理中，μ_{c2} 的变分约束条件为应变位移速度关系式；变分条件为平衡方程、应力应变速度关系式，以及全部边界条件 U_{c2} 的变分约束条件为平衡方程；变分条件为应力应变速度关系式、应变位移速度关系式，以及全部边界条件。所以，应变位移关系式与平衡方程为 μ_{c2} 与 U_{c2} 的互逆变换的结果。

9.6.3 模糊因子加权变分原理III

1. 加权泛函

当

$$\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i=0$$

时，则泛函(9.65)式变为

$$\mu_{c3}=\iiint_V\left[-\frac{1}{1+\mu}\sigma'_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+\frac{1-\mu}{1+\mu}2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\right]dv$$
$$-\iint_{S_1}\left[\bar{P}_i-\frac{1}{1+\mu}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j\right]\dot{u}_i ds$$
$$-\iint_{S_2}\frac{1}{1+m}(\sigma_{ij}+2\mu g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})l_j(\dot{u}_i)ds \qquad (9.71)$$

当

$$\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0$$

时，并用 σ'_{ij} 代替 $\dot{\varepsilon}_{ij}$，则泛函(9.66)式变为

$$U_{c3}=\iiint_V\left[\frac{1}{1+m}\ \frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}+\dot{u}_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\right]dv$$
$$-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\dot{u}_i ds-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}_i\sigma_{ij}l_j ds \qquad (9.72)$$

于是加权泛函为

$$W_{c3}=\alpha\mu_{c3}+(1-\alpha)U_{c3} \qquad (9.73)$$

2. 加权变分原理III

若σ'_{ij}，$\dot{e}_{ij}$，$\dot{u}_i$均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当调整α值，使泛函（9.73）式实现驻值条件的σ'_{ij}，$\dot{e}_{ij}$，$\dot{u}_i$为稳定蠕变流动理论问题的理想逼近值。

在此原理中，μ_{c3}的变分约束条件为平衡方程；变分条件为应力应变速度关系式、应变位移速度关系式，以及全部边界条件。U_{c3}的一般约束条件为应力应变速度关系式；变分条件为平衡方程、应变位移速度关系式，以及全部边界条件。所以，平衡方程与应变位移速度关系式为μ_{c3}与U_{c3}的互逆变换的结果。

9.6.4 模糊因子加权变分原理IV

1. 加权泛函

当

$$\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{e}_{ij}=0$$

时，并用$\dot{e}_{ij}$代替σ'_{ij}，则泛函(9.65)式变为

$$\mu_{c4}=\iiint\limits_V\Big[\frac{1}{1+\mu}2g(H)\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i$$

$$-2g(H)\dot{e}_{ij}\left(\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}\right)\Big]\mathrm{d}v$$

$$-\iint\limits_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i\mathrm{d}s-\iint\limits_{S_2}2g(H)\dot{e}_{ij}l_j(\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i)\mathrm{d}s \qquad (9.74)$$

当

$$\dot{e}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0$$

时，并用$\dot{e}_{ij}$代替$\dot{u}_{i,j}$，则泛函(9.66)式变为

$$U_{c4}=\iiint\limits_V\Big[\frac{1}{m}\sigma'_{ij}\dot{e}_{ij}-\frac{1}{m(1+m)}\cdot\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}$$

$$+\dot{u}_i((2g(H)\dot{e}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i)\Big]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\dot{u}_i\mathrm{d}s-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{9.75}$$

于是加权泛函为

$$W_{c4}=\alpha\mu_{c4}+(1-\alpha)U_{c4} \tag{9.76}$$

2．加权变分原理Ⅳ

若σ'_{ij}，$\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\dot{u}_i$均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$,在此区间可连续取值，适当调整α值，使泛函(9.76)式实现驻值条件的σ'_{ij}，$\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\dot{u}_i$为稳定蠕变流动理论问题的理想逼近值。

在此原理中，μ_{c4}的变分约束条件为应力应变速度关系式；变分条件为平衡方程、应变位移速度关系式，以及全部边界条件。U_{c4}的变分约束条件为应变位移速度关系式；变分条件为平衡方程、应力应变速度关系式，以及全部边界条件。所以，应力应变速度关系式与应变位移速度关系式为μ_{c4}与U_{c4}的互逆变换的结果。

9.6.5 模糊因子加权变分原理Ⅴ

1．加权泛函

当

$$\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{u}_{i,j}-\frac{1}{2}\dot{u}_{j,i}=0$$

$$\sigma'_{ij}-2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}=0$$

$$\dot{u}_i-\bar{\dot{u}}_i=0$$

并用$\dot{\varepsilon}_{ij}$代替σ'_{ij}时，则泛函(9.65)式变为

$$\mu_{c5}=\iiint_V\left[\frac{1}{1+\mu}2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-\bar{F}_i\dot{u}_i\right]\mathrm{d}v$$

$$-\iint_{S_1}\bar{P}_i\dot{u}_i\mathrm{d}s \tag{9.77}$$

当

$$\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}=0$$

$$(2g(H)\dot{\varepsilon}_{ij})_{,j}+\bar{F}_i=\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0$$

时，并用σ'_{ij}代换$\dot{\varepsilon}_{ij}$则泛函(9.66)变为

$$U_{c5}=\iiint_V\left[\frac{1}{1+m}\frac{1}{2}f(T)\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}\right]\mathrm{d}v-\iint_{S_2}\bar{\dot{u}}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{9.78}$$

于是加权泛函为

$$W_{c5}=\alpha\mu_{c5}+(1-\alpha)U_{c5} \tag{9.79}$$

2. 加权变分原理V

若$\sigma'_{ij}(\sigma_{ij}),\dot{\varepsilon}_{ij},\dot{u}_i$,为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当选取$\alpha$值，使泛函(9.79)式实现驻值条件的$\sigma'_{ij},\varepsilon_{ij},\dot{u}_i$为稳定蠕变流动理论问题的理想逼近值。

§9.7 结 论

采用模糊数学中的有关从属函数与变分方法中的对偶原理的概念、思路与方法，建立了模糊因子加权变分原理。

在数值计算过程中，不同的数学模型产生不同的误差，基于模糊因子加权变分原理，把不同的数学模型集于一式之中，通过适当调整模糊因子改进数学模型，达到提高解的精度的目的。在一定精度条件下，可达到加速收敛的效果。

模糊因子在数值计算过程中，可通过人机对话系统，根据计算结果的信息反馈，实时调整模糊因子，以取得理想逼近值。

加权变分原理给出了变分原理的最广泛的形式统一于同一公

式之中，对于编制大型通用程序系统是很有用的理论基础。

模糊因子的理论分析，有待于进一步探讨。

参 考 文 献

1 Babuska I, Rheinboldt W C. A Posteriori error estimates for the finite element method, Int. J. Num. Meth Eng. 12, 1597～1615, 1978

2 De J P, Gago S R. A posteriori error analysis and adaptivity for the finite element method, ph. D. thesis, University of Wales, 1982

3 辛克维奇 O C, 摩根K；陶振宗等译. 有限元与近似方法. 北京：人民交通出版社，1989

4 余德浩. 边界元数学理论的某些新发展，第一届全国解析与数值结合法会议论文集. 湖南：湖南大学出版社，1989

5 Pian T H H, Tong P. Basis of finite element method for solid continua. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1969, 1(1)

6 浅居喜代治等著；赵汝怀译. 模糊系统理论入门. 北京：北京师范大学出版社，1982

7 Courant R, Hilbert D. 数学物理方法I(中译本). 北京：北京科学出版社，1958

8 牛庠均，姚传玺，康柯辛. 最佳变分原理——模糊因子加权变分原理. 北京工业大学学报，1991，17(2)